Вариант выездного тура

1. Решите уравнение $(x^2+6x)^2-4(x+3)^2=9$.

2. Решите уравнение $25^{\log_{1/5}(3-x)}=3^{\log_{1/3}(2x^2-x+3)}$.

3. Решите уравнение $|\sqrt{x+2}-3|+|5-\sqrt{x+2}|=2$.

4. Найдите число корней уравнения $\sin 2x=\cos 48^\circ$, лежащих на отрезке $[-450^\circ;500^\circ]$.

5. Определите, при каких значениях параметра a функция $f(x)=(10a+6)x+(a-5)\sin 2x-8\cos x-3(a+2)$ имеет на интервале $\left(-{}^{\pi}/2;{}^{\pi}/6\right)$ единственную критическую точку (максимум).

6. В треугольной пирамиде $ABCD$ длина ребра $AB=8$. Треугольники ABC и ABD — равнобедренные ($AC=CB$, $AD=DB$) с высотами $CH=\sqrt{10}$ и $DH=4$. Плоскости ABC и ABD взаимно перпендикулярны. Найдите минимальную площадь сечения пирамиды, которое проходит через среднюю линию MN треугольника ABC ($MN\parallel AB$) и пересекает грань ABD.

Решение

1. Сделаем замену $y:=(x+3)^2$, тогда $x^2+6x=y-9$ и уравнение принимает вид $(y-9)^2-4y=9$, $y^2-22y+72=0$. Решениями этого уравнения являются значения $y=4$ и $y=18$. Поэтому $(x+3)^2=4$, $(x+3)^2=18$, отсюда $x+3=\pm2$, $x+3=$ $=\pm3\sqrt{2}$.

Ответ: $x_1=-5$; $x_2=-1$; $x_{3,4}=-3\pm3\sqrt{2}$.

2. ОДЗ логарифма $3-x>0$, т. е. $x<3$. На ОДЗ имеем

$$25^{\log_{1/5}(3-x)}=25^{\log_{25}(3-x)-2}=\frac{1}{(3-x)^2};$$

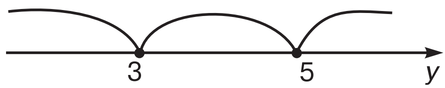
$$3^{\log_{1/3}(2x^2-x+3)}3^{\log_3(2x^2-x+3)^{-1}}=\frac{1}{2x^2-x+3}.$$

Отсюда $(3-x)^2 = 2x^2 - x + 3$, $x^2 + 5x - 6 = 0$. Решениями этого уравнения являются $x_1 = -6$ и $x_2 = 1$.

Ответ: $x_1 = -6$; $x_2 = 1$.

3. Сделаем замену $y := \sqrt{x+2}$. Тогда уравнение примет вид

$$|y-3| + |5-y| = 2.$$



Раскрывая модули получаем: а) При $y \leqslant 3$ получаем $(3-y) + (5-y) = 2$, $y = 3$. б) При $3 \leqslant y \leqslant 5$ получаем $(y-3)+(5-y) = 2$, $2 = 2$ и следовательно, решениями являются все $3 \leqslant y \leqslant 5$. в) при $5 \leqslant y$ получаем $(y-3)+(y-5) = 2$, $y = 5$. Значит, решениями вспомогательного уравнения являются $y \in [3;5]$. Возвращаясь к исходной неизвестной, получаем систему

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} \geqslant 3 \\ \sqrt{x+2} \leqslant 5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+2 \geqslant 9 \\ x+2 \leqslant 25 \\ x+2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 7 \leqslant x \leqslant 23.$$

Ответ: $x \in [7;23]$.

4. Переведём градусную меру углов в радианы: $42^\circ = \dfrac{7\pi}{30}$, $450^\circ = \dfrac{5\pi}{2}$, $500^\circ = \dfrac{25\pi}{9}$. Уравнение принимает вид $\sin 2x = \sin\dfrac{7\pi}{30}$. Получаем две серии решений $x = \dfrac{7\pi}{60} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \dfrac{23\pi}{60} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Отберём корни, лежащие на промежутке $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; \dfrac{25\pi}{9}\right]$. Для первой серии получаем неравенство $-\dfrac{5\pi}{2} \leqslant \dfrac{7\pi}{60} + \pi n \leqslant \dfrac{25\pi}{9}$, $-450 \leqslant 21 + 60n \leqslant 500$, $-\dfrac{471}{60} \leqslant n \leqslant \dfrac{479}{60}$,

$-7\dfrac{51}{60} \leqslant n \leqslant 7\dfrac{59}{60}$, следовательно, учитывая, что n целое, получаем, что $-7 \leqslant n \leqslant 7$ и на промежутке лежит 15 корней из первой серии. Для второй серии получаем неравенство $-\dfrac{5\pi}{2} \leqslant \dfrac{23\pi}{60} + \pi k \leqslant \dfrac{25\pi}{9}$, $-450 \leqslant 69 + 60k \leqslant 500$, $-\dfrac{519}{60} \leqslant k \leqslant \dfrac{431}{60}$, $-8\dfrac{39}{60} \leqslant k \leqslant 7\dfrac{11}{60}$, следовательно, учитывая, что k целое, получаем, что $-8 \leqslant k \leqslant 7$ и на промежутке лежит 16 корней из второй серии.

Ответ: 31 корень.

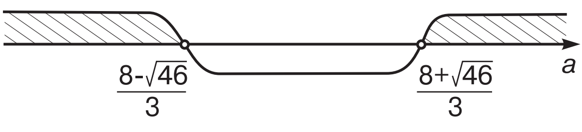
5. Продифференцируем $f(x)$:

$$f'(x) = 10a + 6 + 2(a-5)\cos 2x + 8\sin 2x.$$

Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то

$$f'(x) = 4[(5-a)\sin^2 x + 2\sin x + 3a - 1].$$

Сделаем замену $y := \sin x$. На интервале $(-{}^{\pi}/_{2}; {}^{\pi}/_{6})$ функция $y = \sin x$ сторого возрастает от -1 до ${}^{1}/_{2}$. Поэтому исходная задача равносильна следующей: определите при каких значениях параметра a функция $\varphi(y) = (5-a)y^2 + 2y + 3a - 1$ меняет на интервале $(-1; {}^{1}/_{2})$ свой знак ровно один раз, причём с плюса на минус. При $a = 5$ получаем $\varphi(y) = 2y + 14$, эта функция не меняет знака на интервале $(-1; {}^{1}/_{2})$. При $a \neq 5$ функция необходимое условие смены знака — положительность дискриминанта $D(a) = 4(3a^2 - 16a + 6)$.

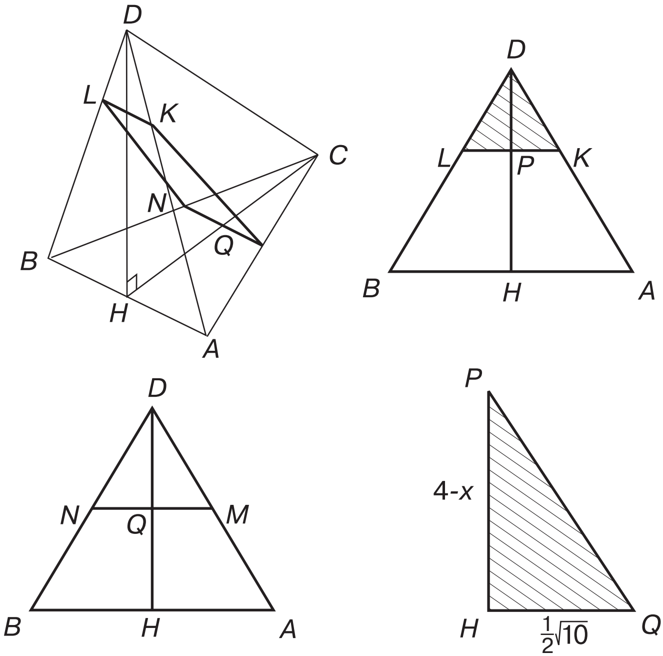


Значения $\varphi(y)$ на концах интервала $(-1; {}^{1}/_{2})$ равны $\varphi(-1) = 2a + 2$ и $\varphi({}^{1}/_{2}) = \dfrac{11a+5}{4}$. Поэтому $\varphi(y)$ на концах интервала области определения обращается в нуль при $a = -1$ и при $a = -{}^{5}/_{11}$. При $a = -1$ функция $\varphi(y) = 6y^2 + 2y - 4$ имеет нули

$y = -1$, $y = {}^2/_3$, поэтому значение $a = -1$ не удовлетворяет условию задачи. При $a = -{}^5/_{11}$ функция $\varphi(y) = \dfrac{2}{11}(30y^2 + 11y - 13)$ имеет нули $y = -{}^{13}/_{15}$, $y = {}^1/_2$, поэтому значение $a = -{}^5/_{11}$ тоже не удовлетворяет. Остаётся случай когда $\varphi(-1) > 0$ и $\varphi({}^1/_2) < 0$. Так как $\varphi(-1) = 2a + 2$ и $\varphi({}^1/_2) = 11a + 5$, то решением задачи являются значения a, которые удовлетворяют неравенствам $a > -1$ и $a < -{}^5/_{11}$.

Ответ: $a \in (-1; -{}^5/_{11})$.

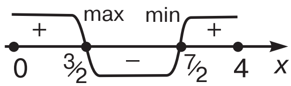
6.

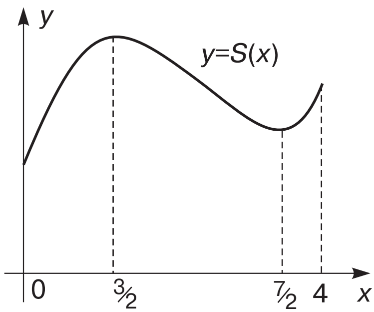


Сначала рассмотрим треугольник ABD. Положим $x := DP$, по условию задачи $0 \leqslant x \leqslant 4$, $PH = 4 - x$. Треугольники ABD и KLD подобны и $AB = 8$, $DH = 4$. Поэтому $\dfrac{KL}{AB} = \dfrac{x}{DH}$ и, значит, $KL = 2x$. Теперь рассмотрим треугольник ABC. Так как MN средняя линия треугольника ABC, то $HQ = \frac{1}{2}CH =$

$= \sqrt{10}/2$ и $MN = 4$. Треугольник PHQ прямоугольный, поэтому $PQ = \sqrt{(4-x)^2 + \frac{5}{2}}$. Сечение пирамиды является трапецией с высотой PQ и основаниями MN и KL. Её площадь равна $S(x) = \frac{1}{2}(MN + KL) \cdot PQ = (x+2)\sqrt{(4-x)^2 + \frac{5}{2}}$. Задача сведена к нахождению минимума функции $S(x)$ на отрезке $[0; 4]$. Производная функции $S(x)$ равна

$$S'(x) = \frac{4x^2 - 20x + 21}{2\sqrt{(4-x)^2 + \frac{5}{2}}} = \frac{(2x-3)(2x-7)}{2\sqrt{(4-x)^2 + \frac{5}{2}}}.$$





Следовательно, минимальное значение функция $S(x)$ принимает либо при $x = 0$, либо при $x = 7/2$. Так как $S(0) = \sqrt{74}$ и $S(7/2) = \frac{11}{4}\sqrt{11}$, то $S_{\min} = S(0)$.

Ответ: $S_{\min} = \sqrt{74}$.

Вариант предварительного тура

1. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{1+x}}{x-1} \geqslant \dfrac{5-x}{x-1}$.
2. Решите уравнение $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = \dfrac{2|x - 7\pi/2|}{x - 7\pi/2}$.
3. Определите, при каких значениях x величины $5 \cdot 2^x$, $10 - \sqrt{x^2 - 1}$ и $20 \cdot 2^{-x}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \sin 2y, \\ 2\sin(4x+8y)\sin(3x+10y) + 5\cos(7x+2y) = 4. \end{cases}$$

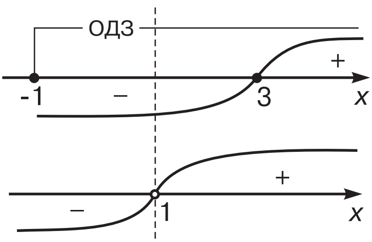
5. Определите, при каких значениях параметра a пересечение множеств $(x-a+1)^2 + (y-2a-3)^2 \leqslant 80$ и $(x-2a+3)^2 + (y-4a+1)^2 \leqslant 20a^2$ представляет собой круг. Постройте чертёж при $a = 2$.

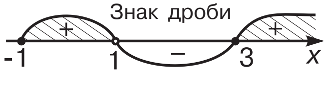
6. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (четырёхугольник основания $ABCD$ выпуклый) боковые рёбра SA, SB и SC перпендикулярны и имеют длину 3. Длина ребра SD равна 9. Найдите: 1) угол наклона ребра SD к плоскости основания; 2) наибольший возможный объём пирамиды $SABCD$.

1. ОДЗ $x \geqslant -1$, $x \neq 1$. Перенося дробь из правой части неравенства в левую получаем неравенство $\dfrac{\sqrt{1+x}-5+x}{x-1} \geqslant 0$. Определим на ОДЗ знаки числителя и знаменателя. Определим где числитель обращается в нуль

$$\sqrt{1+x} = 5 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x = 25 - 10x + x^2 \\ 5 - x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 11x + 24 \\ x \leqslant 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; x = 8 \\ x \leqslant 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$





Числитель обращается в нуль только при $x = 3$, в этой точке он меняет знак с "$-$" на "$+$". Знаменатель отрицательный при $x < 1$ и положительный при $x > 1$.

Ответ: $x \in [-1; 1) \cup [3; +\infty)$.

2. Введя вспомогательный аргумент получаем $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin(2x - {}^{\pi}/_{3})$ и уравнение принимает вид $\sin(2x - {}^{\pi}/_{3}) = \dfrac{|x - {}^{7\pi}/_{2}|}{x - {}^{7\pi}/_{2}}$. При $x > {}^{7\pi}/_{2}$ получаем $\sin(2x - {}^{\pi}/_{3}) = 1$, $2x - {}^{\pi}/_{3} = {}^{\pi}/_{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = {}^{5\pi}/_{12} + \pi n$. Учитывая, что $x > {}^{7\pi}/_{2}$ получаем условие на n: ${}^{5\pi}/_{12} + \pi n > {}^{7\pi}/_{2}$, $5 + 12n > 42$, $n > {}^{37}/_{12} = 3\frac{1}{12}$, $n \geqslant 4$, $n \in \mathbb{Z}$. При $x < {}^{7\pi}/_{2}$ получаем $\sin(2x - {}^{\pi}/_{3}) = -1$, $2x - {}^{\pi}/_{3} = -{}^{\pi}/_{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $x = -{}^{\pi}/_{12} + \pi k$. Учитывая, что $x < {}^{7\pi}/_{2}$ получаем условие на k: $-{}^{\pi}/_{12} + \pi k < {}^{7\pi}/_{2}$, $-1 + 12k < 42$, $k < {}^{43}/_{12} = 3\frac{7}{12}$, $k \leqslant 3$.

Ответ: $x = \dfrac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 4$; $x = -\dfrac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 4$.

3. Три числа являются последовательными членами арифметической прогрессии, тогда и только тогда, когда сумма первого и третьего чисел равна удвоенному второму:

$$5 \cdot 2^x + \frac{20}{2^x} = 2(10 - \sqrt{x^2 - 1}). \qquad (*)$$

Для оценки левой части равенства $(*)$ воспользуемся тем, что для любых двух неотрицательных чисел a и b их среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического: $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$, причём равенство выполнено только при $a = b$. В силу этого неравенства имеем $5 \cdot 2^x + \frac{20}{2^x} \geqslant 2\sqrt{5 \cdot 2^x \cdot \frac{20}{2^x}}$. Ясно, что выражение в правой части равенства $(*)$ удовлетворяет неравенству $2(10 - \sqrt{x^2 - 1}) \leqslant 2 \cdot 10 = 20$. Поэтому соотношение $(*)$ может выполняться, только если обе части равенства обращаются в 20. Поскольку $2(10 - \sqrt{x^2 - 1}) = 20$ только при $x = \pm 1$, то подставляя $x = \pm 1$ в $(*)$, получаем, что единственным решением является $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

4. Решим первое уравнение системы

$$\sin x = \sin 2y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 2y + 2\pi n, & (1) \\ x = \pi - 2y + 2\pi n. & (2) \end{array} \right.$$

Подставляя выражение (1) во второе уравнение системы, получаем

$$2\sin(8y + 8\pi n + 8y)\sin(6y + 6\pi n + 10y) + \\ +5\cos(14y + 14\pi n + 2y) = 4,$$

$$2\sin^2 16y + 5\cos 16y = 4, \quad 2(1 - \cos^2 16y) + 5\cos 16y = 4,$$

$$2\cos^2 16y - 4\cos 16y + 2 = 0, \quad \cos 16y = \frac{1}{2} \text{ или } \cos 16y = 2$$

$$16y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ y = \pm\frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{8};\ x = \pm\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4} + 2\pi n.$$

Теперь подставим во второе уравнение системы выражение (2)

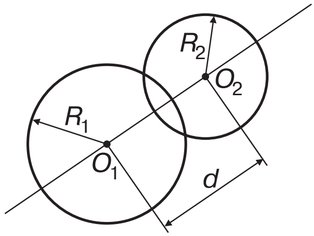
$$2\sin(-8y + 4\pi + 8\pi n + 8y)\sin(-6y + 3\pi + 6\pi n) + \\ +5\cos(-14y + 7\pi + 14\pi n + 2y) = 4,$$

$$-5\cos 12y = 4; \quad \cos 12y = -\frac{4}{5} \quad 12y = \pm\arccos\Big(-\frac{4}{5}\Big) + 2\pi k;$$

$$y = \pm\frac{1}{12}\arccos\Big(-\frac{4}{5}\Big) + \frac{\pi k}{6};\ x = \mp\frac{1}{6}\arccos\Big(-\frac{4}{5}\Big) - \frac{\pi k}{3} + \pi + 2\pi n.$$

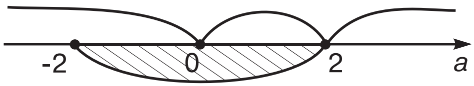
Ответ: $(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{8})$, $n, k \in \mathbb{Z}$
$(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{48} + \frac{\pi k}{8})$, $n, k \in \mathbb{Z}$
$(-\frac{1}{6}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{\pi k}{3} + \pi + 2\pi n; \frac{1}{12}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{\pi k}{6})$, $n, k \in \mathbb{Z}$
$(\frac{1}{6}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{\pi k}{3} + \pi + 2\pi n; -\frac{1}{12}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{\pi k}{6})$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

5. Множества $D_1 := \{(x; y) : (x - a + 1)^2 + (y - 2a - 3)^2 \leqslant 80\}$ и $D_2 := \{(x; y) : (x - 2a + 3)^2 + (y - 4a + 1)^2 \leqslant 20a^2\}$ являются

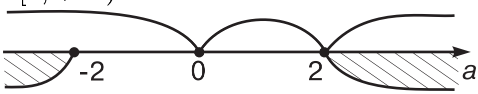


кругами радиусов $R_1 = 4\sqrt{5}$ и $R_2 = 2|a|\sqrt{5}$ с центрами в точках $O_1(a-1; 2a+3)$ и $O_2(2a-3; 4a-1)$ соответственно. Расстояние d между центрами кругов равно $\sqrt{(a-2)^2 + \big(2(a-2)\big)^2} = |a-2|\sqrt{5}$. Пересечение двух кругов является кругом, если один из кругов целиком лежит внутри другого. Расстояние от O_1 до точек круга D_2 не превосходит $d + R_2$, а от O_2 до точек круга D_1 не превосходит $d + R_1$, причём в D_2 есть точка, лежащая на расстоянии $d + R_2$ от O_1, а в D_1 — на расстоянии $d + R_1$ от O_2. Поэтому, если $D_2 \subset D_1$, то $d + R_2 \leqslant R_1$, а если $D_1 \subset D_2$, то $d + R_1 \leqslant R_2$.

Сначала определим при каких a выполнено включение $D_2 \subset D_1$. Так как $d + R_2 = |a-2|\sqrt{5} + 2|a|\sqrt{5} \leqslant 4\sqrt{5}$, то $|a| \leqslant 2$. При $a \in [-2;\, 0]$ получаем неравенство $(2-a) - 2a \leqslant 4$, $a \geqslant -2/3$, а при $a \in [0; 2]$ получаем $(2-a) + 2a \leqslant 4$, $a \leqslant 2$. Значение $a = 0$ следует исключить, так как при $a = 0$ пересечение D_1 и D_2 вырождается в точку. Следовательно, включение $D_2 \subset D_1$ выполнено при $a \in [-2/3; 2]$.

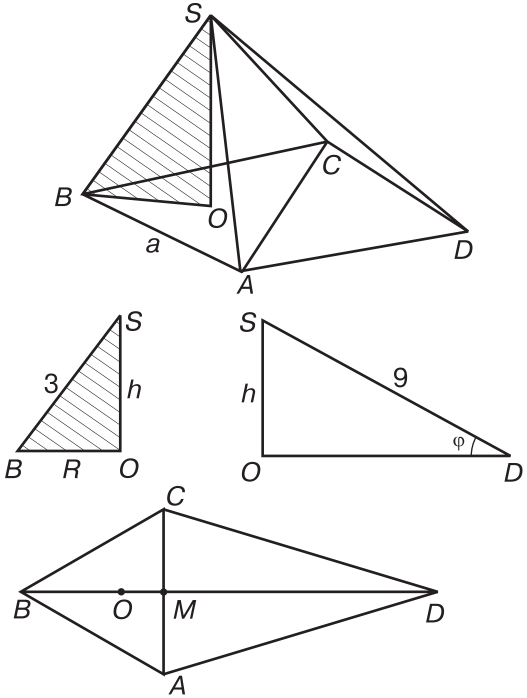


Теперь определим когда выполнено включение $D_1 \subset D_2$. Так как $d + R_1 = |a-2|\sqrt{5} + 4\sqrt{5} \leqslant 2|a|\sqrt{5}$, то $|a| \geqslant 2$. При $a \leqslant -2$ получаем $2 - a + 4 \leqslant -2a$, $a \leqslant 6$, а при $a \geqslant 2$ получаем $a - 2 + 4 \leqslant 2a$, $a \geqslant 2$. Следовательно, включение $D_1 \subset D_2$ выполнено при $a \in (-\infty; -6] \cup [2; +\infty)$.



Ответ: $a \in (-\infty; -6] \cup [-2/3; 0) \cup (0; +\infty)$.

6.



Треугольники SAB, SBC, SCA прямогольные, их катеты равны 3. Поэтому равны и их гипотенузы: $AB = BC = AC = 3\sqrt{2}$. Положим $a := AB$. Найдём высоту h пирамиды, опущенную из вершины S. Пусть точка O — основание этой высоты. Ясно, что O — центр равностороннего треугольника ABC, поэтому $OB = {}^{a}/_{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$. Высоту h находим из треугольника SBO по теореме Пифагора: $h = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{9-6} = \sqrt{3}$. Угол наклона ребра SD к плоскости основания равен углу $\varphi := SDO$ в прямоугольном треугольнике SDO. Так как катет, противолежащий углу SDO является высотой h пирамиды, а гипотенуза равна 9, то $\sin\varphi = {}^{\sqrt{3}}/_{9}$. Теперь найдём максимальный объём пирамиды. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника SDO находим, что $OD = \sqrt{SD^2 - h^2} = \sqrt{78}$. Так как высота пирамиды не зависит от расположения вершины D, то объём будет максимальным при максимальной площади основания S_{ABCD}. Площадь четырёхугольника $ABCD$ равна $S_{ABC}+S_{ACD}$, причём площадь треугольника ABC не зависит от расположения вершины D. Поэтому площадь S_{ABCD} будет максимальной при максимальной площади треугольника S_{ACD}. Так как $S_{ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot MD\sin\angle DMA$, то максимум площади S_{ACD} будет если $BD\perp AC$. В этом случае треугольник ACD является равнобедренным. В равностороннем треугольнике ABC длина OM равна расстоянию от центра треугольника до его стороны, поэтому $OM={}^{a}/_{2\sqrt{3}}={}^{\sqrt{6}}/_{2}$. Отсюда $MD=OD-OM=$ $=\frac{1}{2}(2\sqrt{13}-1)\sqrt{6}$. Значит, $S_{ACD}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot|MD|=\frac{1}{2}3\sqrt{3}(2\sqrt{13}-1)$. Площадь равностороннего треугольника ABC равна $S_{ABC}=$ $=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}=\frac{9}{2}\sqrt{3}$. Поэтому максимальная площадь основания равна $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ACD}=3\sqrt{3}(1+\sqrt{13})$ и, значит, максимальный объём пирамиды равен $V_{\max}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot h=3(1+\sqrt{13})$.

Ответ: $\varphi=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{9}$, $V_{\max}=3(1+\sqrt{13})$.