Заключительный тур олимпиады Росатом, весна, 2016, Математика, 10 класс

Задание

1. Для функции $f(x)=x^2+2x-3$ решить уравнение $f\left(2f(x)\right)=117$.

2. Функция $t(x)$ определена на всей числовой оси так, что $t(x)=0$ для всех $x\le 0$ и $t(x)=1$ для $x>0$. Решить уравнение $\sin 2x = 0,5\cdot t\left(x-\pi/2\right)-1,5\cdot t\left(x-\pi\right)+t\left(x-2\pi\right)$.

3. $\{a_n\}-$ арифметическая прогрессия с $a_1=3$ и разностью $d=2$. S_n- сумма первых ее n членов. Функция $f(x)=ax^2+bx+c$ такова, что $f(a_n)=S_n$ для всех натуральных n. Найти a,b и c.

4. При каких натуральных n множество решений неравенства $15x^2-2(n+15)x+(n-6)(20-n)\le 0$ содержит ровно 3 целых числа?

5. Математической моделью шарикового подшипника является кольцо, образованное двумя концентрическими окружностями K_1 и K_2 радиусов r (внутреннее) и R (внешнее), а также n окружностей (шариков) радиуса ρ, расположенных внутри кольца, касающихся между собой и окружностей K_1 и K_2. Напишите формулу зависимости радиуса внешней окружности R от ρ и n.

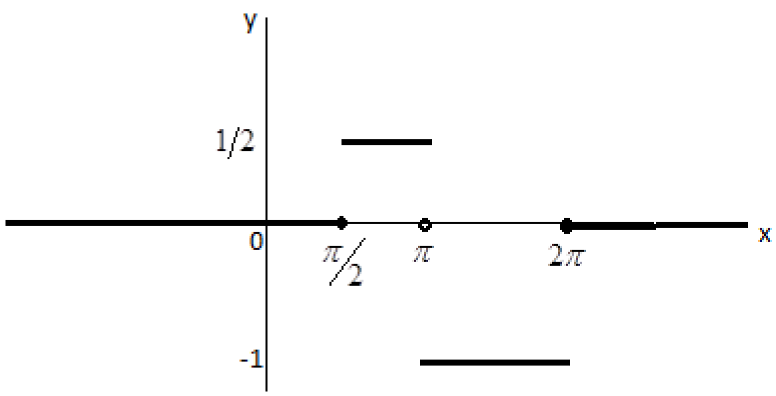
Решения

1. Обозначим $2f(x)=u$ и решим уравнение $f(u)=117$. Оно имеет вид $u^2+2u-3=117$ или $u^2+2u-120=0$. Его корни: $u_1=-12$ и $u_2=10$.

Случай 1. $2f(x)=10\to f(x)=5\to x^2+2x-3=5\to x^2+2x-8=0\to\left[\begin{array}{l}x_1=-4\\ x_2=2\end{array}\right.$.

Случай 2. $2f(x)=-12\to f(x)=-6\to x^2+2x-3=-6\to x^2+2x+3=0$ корней не имеет.

2. На рис. изображен график функции в правой части уравнения:



Случай 1. $\begin{cases}\sin 2x=0\\ x\in\left(-\infty;\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left(2\pi;+\infty\right)\end{cases}\to\begin{cases}x=\dfrac{\pi k}{2}\\ k\in Z,\ k\in(-\infty;1]\cup[5;+\infty)\end{cases}$.

Случай 2. $\begin{cases} \sin 2x = \dfrac{1}{2} \\ x \in \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right] \to 2x \in (\pi; 2\pi] \end{cases}$ $\to$ решений нет.

Случай 3. $\begin{cases} \sin 2x = -1 \\ x \in (\pi; 2\pi] \end{cases} \to \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k \\ k = 2 \end{cases} \to x = \dfrac{7\pi}{4}$

3. Так как $\{a_n\}$ − арифметическая прогрессия с $a_1 = 3$ и $d = 2$, то $a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + 2(n-1) = 2n+1$, а $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \dfrac{3+2n+1}{2} \cdot n = (n+2)n = n^2 + 2n$. Запишем

$f(a_n) = a(2n+1)^2 + b(2n+1) + c = 4an^2 + (4a+2b)n + a + b + c$. Тогда равенство

$f(a_n) = \mathrm{S}_n$ принимает вид $4an^2 + (4a+2b)n + a + b + c = n^2 + 2n$. Так как оно выполняется для всех n, то коэффициенты многочленов равны:

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 4a + 2b = 2 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = 1/4 \\ b = 1/2 \\ c = -3/4 \end{cases}.$$

4. Найдем корни уравнения $15x^2 - 2(n+15)x + (n-6)(20-n) = 0$. Вычислим $D/4 = (n+15)^2 - 15(n-6)(20-n) = (4n-45)^2$ и подставим в формулу для корней квадратного уравнения. Получим: $x_n^1 = \dfrac{5n-30}{15}$, $x_n^2 = \dfrac{60-3n}{15}$. Перепишем неравенство в виде $15\left(x - x_n^1\right)\left(x - x_n^2\right) \le 0$

Решением этого неравенства является отрезок с концами в точках x_n^1 и x_n^2 ($\left[x_n^1; x_n^2\right]$, если $x_n^1 < x_n^2$ и $\left[x_n^2; x_n^1\right]$, если $x_n^2 < x_n^1$. Расстояние между корнями равно: $d = \left|x_n^1 - x_n^2\right| = \dfrac{|8n-90|}{15}$. Чтобы множество решений неравенства содержит ровно 3 целых числа необходимо выполнение условия $2 \le d < 4$.

Имеем $2 \le \dfrac{|8n-90|}{15} < 4$ или $15 \le |4n-45| < 30$. Решая это неравенство, получаем, что искомые n нужно выбирать среди чисел $(3,75; 7,5] \cup [15; 18,75)$.

При $n = 4$ отрезок решений неравенства $\left[-\dfrac{2}{3}; \dfrac{16}{5}\right]$ содержит четыре целых решения.

При $n = 5$ отрезок решений неравенства $\left[-\dfrac{1}{3}; 3\right]$ содержит четыре целых решения.

При $n = 6$ отрезок решений неравенства $\left[0; \dfrac{14}{5}\right]$ содержит три целых решения.

При $n = 7$ отрезок решений неравенства $\left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{13}{5}\right]$ содержит два целых решения.

При $n = 15$ отрезок решений неравенства $[1; 3]$ содержит три целых решения.

При $n=16$ отрезок решений неравенства $\left[\frac{4}{5};\frac{10}{3}\right]$ содержит три целых решения.

При $n=17$ отрезок решений неравенства $\left[\frac{3}{5};\frac{11}{3}\right]$ содержит три целых решения.

При $n=18$ отрезок решений неравенства $\left[\frac{2}{5};4\right]$ содержит четыре целых решения.

Условиям задачи удовлетворяют $n=6,15,16,17$

5. На рисунке приведено кольцо, образованное двумя концентрическими окружностями K_1 и K_2 радиусов r (внутреннее) и R (внешнее), а также окружности (шарики) радиуса ρ, расположенные внутри кольца, касающиеся между собой и окружностей K_1 и K_2 (по условию задачи таких окружностей n). Рассмотрим треугольник AOC: $AC=2\rho,\ AB=\rho,\ OA=r+\rho,$ $\measuredangle AOB=\frac{\pi}{n},\ R=r+2\rho$. Так как треугольник AOC равнобедренный и $AB=BC$, то OB является высотой, следовательно, треугольник AOB прямоугольный. Тогда $(R-\rho)\sin\frac{\pi}{n}=\rho$. Отсюда получаем $R=\dfrac{\rho\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{n}}$.