Заключительный тур олимпиады Росатом, весна, 2016, Математика, 11 класс

Задание

1. Сколько пар $(x;\ y)$ целых чисел, являющихся решениями уравнения $7x-5y=23$, удовлетворяют неравенству $x^2+y^2\le 37$? Найти пару $(x;\ y)$, для которой $x+y$ наибольшее.

2. Найти x, при котором выражение $\left(\sin^2 x-\cos x-1/4\right)^2+\left(\cos 2x+\cos x\right)^2$ принимает наименьшее значение.

3. Для квадратного трехчлена $P_1(x)=x^2-x-6$ и натурального числа n определим многочлены $P_2(x)=P_1(2x),\ P_3(x)=P_2(2x),\ \ldots,\ \ P_n(x)=P_{n-1}(2x)$. Решить уравнение $P_n(x)=0$ и найти сумму корней многочлена

$$Q_n(x)=P_1(x)+P_2(x)+\ldots+P_n(x).$$

4. Петя и Вова играют в кости на фантики. Ведущий игру Петя выигрывает, если при бросании им двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков не превосходит 4 и проигрывает во всех остальных случаях. Проиграв, Петя отдаёт Вове 1 фантик, выиграв – получает от Вовы *k* фантиков. Игра считается справедливой, если среднее значение выигрыша каждым игроком равна нулю. Найти значение *k*, при котором игра будет справедливой?

5. Функция $\chi(t)=\begin{cases}1,\ \text{при}\ t>0,\\ 0,\ \text{при}\ t\le 0\end{cases}$. При каких значениях a система $\begin{cases}x\cdot\chi(x-a)+y\cdot\chi(y-2a)=5a\\ x+2y=2\end{cases}$ имеет единственное решение?

6. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AD=8$, $AB=4$ расположены три круга K, K_1 и K_2. Круг K касается кругов K_1, K_2 внешним образом, а также прямых AD и BC. Круги K_1, K_2 касаются также сторон AD, AB и AD, CD соответственно. Найти максимальное возможное значение суммы площадей трех кругов.

Решения

1. Запишем общее решение уравнения $7x-5y=23:\ \begin{cases}x=-1+5t\\ y=-6+7t\end{cases},\ t\in Z$. Подставляя найденные x и y в неравенство $x^2+y^2\le 37$,получим неравенство относительно t: $(5t-1)^2+(7t-6)^2\le 37\to 37t^2-47t\le 0$.

Отсюда находим $t \in [0; 47/37]$. С учетом целочисленности t, получаем $t_1 = 0, t_2 = 1$. При $t_1 = 0$ имеем $\begin{cases} x = -1 \\ y = -6 \end{cases}$, а при $t_2 = 1$ – $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$. Во второй паре значение $x + y$ наибольшее. Оно равно 5.

2. Перепишем выражение в виде $\left(-\cos^2 x - \cos x - 3/4\right)^2 + \left(2\cos^2 x + \cos x - 1\right)^2$ и введем обозначение $\cos x = t$, тогда выражение преобразуется к виду

$$\left(t^2 + t - 3/4\right)^2 + \left(2t^2 + t - 1\right)^2 = \left((t + 3/2)(t - 1/2)\right)^2 + \left((2t + 2)(t - 1/2)\right)^2 = \left((3t + 7/2)(t - 1/2)\right)^2$$

Минимальное значение этого выражения равно нулю, оно достигается при $t_1 = -\frac{7}{6}, t_2 = \frac{1}{2}$. Получаем уравнения $\cos x = -\frac{7}{6}$ и $\cos x = \frac{1}{2}$. Первое уравнение решений не имеет, второе уравнение имеет решения: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

3. Корни многочлена $P_1(x) = x^2 - x - 6$ равны $x_1^1 = 3,\ x_1^2 = -2$. Корни многочлена $P_2(x) = P_1(2x)$ равны $x_2^1 = 3/2,\ x_2^2 = -2/2 = -1$. Предполагаем, что корни многочлена $P_k(x)$ равны $x_k^1 = 3/2^{k-1},\ x_k^2 = -2/2^{k-1} = -1/2^{k-2}$. Тогда многочлен $P_{k+1}(x) = P_k(2x)$ будет иметь корни $x_{k+1}^1 = x_k^1/2 = 3/2^k,\ x_{k+1}^2 = x_k^2/2 = -1/2^{k-1}$, т.е. $x_n^1 = 3/2^{n-1},\ x_n^2 = -1/2^{n-2}$.

Многочлен $P_k(x)$ имеет вид $P_k(x) = 4^{(k-1)}x^2 - 2^{k-1}x - 6$, а многочлен

$$Q_n(x) = \left(1 + 4 + ... + 4^{n-1}\right)x^2 - \left(1 + 2 + ... + 2^{n-1}\right)x - 6n = \frac{4^n - 1}{3}x^2 - \left(2^n - 1\right)x - 6n.$$

Дискриминант многочлена $Q_n(x)$ равен $D/4 = (2^n - 1)^2 + 8n(4^n - 1) > 0$, поэтому действительные корни есть. По теореме Виета их сумма равна $\frac{3(2^n - 1)}{4^n - 1}$.

4. Общее число исходов опыта $n = 6 \cdot 6 = 36$, из них благоприятствуют выигрышу 6 исходов: $(1;1), (1;2), (1;3), (2;1), (2;2), (3;1)$. Вероятность выигрыша Пети $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, вероятность проигрыша Пети равна $1 - p = \frac{5}{6}$ Игра будет справедливой, если $kp = 1 \cdot (1 - p)$. В нашем случае $k\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Отсюда находим $k = 5$.

5. Рассмотрим 4 случая.

В области $A(x > a, y > 2a)$ система примет вид: $\begin{cases} x + y = 5a \\ x + 2y = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 10a - 2 \\ y_1 = 2 - 5a \end{cases}$. Это решение принадлежит области A, если $\begin{cases} 10a - 2 > a \\ 2 - 5a > 2a \end{cases} \to a \in \left(\frac{2}{9}; \frac{2}{7}\right)$.

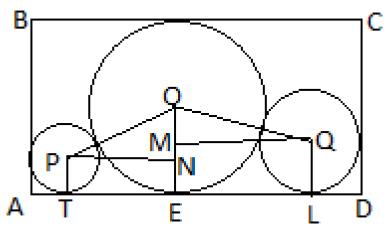
В области $B(x>a, y\le 2a)$ система примет вид: $\begin{cases} x=5a \\ x+2y=2 \end{cases} \to \begin{cases} x_2=5a \\ y_2=(2-5a)/2 \end{cases}$. Это решение принадлежит области B, если $\begin{cases} 5a>a \\ (2-5a)/2\le 2a \end{cases} \to a\in\left[\dfrac{2}{9};+\infty\right)$.

В области $C(x\le a, y\le 2a)$ система может иметь решения только при $a=0$ и имеет вид: $\begin{cases} 0=5a \\ x+2y=2 \end{cases} \to \begin{cases} x_3=2-2t \\ y_3=t,\ t\in R \end{cases}$. Условия принадлежности решения к области С приводит к неравенствам $\begin{cases} 2-2t\le 0 \\ t\le 0 \end{cases} \to \begin{cases} t\ge 1 \\ t\le 0 \end{cases}$. Последнее показывает, в области С система несовместна при любых a.

В области $D(x\le a, y>2a)$ система примет вид: $\begin{cases} y=5a \\ x+2y=2 \end{cases} \to \begin{cases} x_3=2-10a \\ y_3=5a \end{cases}$. Это решение принадлежит области D, если $\begin{cases} 2-10a\le a \\ 5a>2a \end{cases} \to a\in\left[\dfrac{2}{11};+\infty\right)$.

Из полученных результатов следует, что при $a\in\left(-\infty;\dfrac{2}{11}\right)$ система не имеет решений, при $a\in\left[\dfrac{2}{11};\dfrac{2}{9}\right)$ система имеет одно решение, при $a=\dfrac{2}{9}$ – два решения, при $a\in\left(\dfrac{2}{9};\dfrac{2}{7}\right)$ – три решения, при $a\in\left[\dfrac{2}{7};+\infty\right)$ – два решения. Таким образом, одно решение система имеет при $a\in\left[\dfrac{2}{11};\dfrac{2}{9}\right)$.

6. Пусть $\rho, r, R-$ радиусы окружностей K_1, K_2, K. Обозначим длину стороны AB через b, а длину стороны AC через a, тогда $2R=b$.



Пусть $AE=x-$ переменная, $x\in[R;a-R]$, $TE=PN=x-\rho=2\sqrt{R\rho}$,

$EL=QM=2\sqrt{Rr}=a-x-r$, $OP=R+\rho,\ OQ=R+r,\ OM=R-r,\ ON=R-\rho$.

Условия $\begin{cases} \rho+2\sqrt{R}\cdot\sqrt{\rho}-x=0 \\ r+2\sqrt{R}\cdot\sqrt{r}-a+x=0 \\ \rho^2+r^2\to\max \end{cases}$ приводят к зависимости r и ρ от x в виде $\begin{cases} \rho=\left(\sqrt{x+R}-\sqrt{R}\right)^2 \\ \rho=\left(\sqrt{a-x+R}-\sqrt{R}\right)^2 \end{cases}$.

Обозначая через $\varphi(x)=\left(\sqrt{x+R}-\sqrt{R}\right)^4$ приходим к тому, что

$\rho^2+r^2=\varphi(x)+\varphi(a-x)$.

Свойства функции $\varphi(x)$: 1) $\varphi(x)\uparrow$ на отрезке $[R;a-R]$

$$2)\ \varphi'(x)=\frac{2\left(\sqrt{x+R}-\sqrt{R}\right)^3}{\sqrt{x+R}}>0,\ x\in[R;a-R]$$

3) $\varphi''=\dfrac{\left(\sqrt{x+R}-\sqrt{R}\right)^2\left(2\sqrt{x+R}+\sqrt{R}\right)}{\left(\sqrt{x+R}\right)^3}>0,\quad x\in[R;a-R]$, т.е. функция $\varphi'(x)\uparrow$ на отрезке $[R;a-R]$.

Критические точки функции:

$(\rho^2+r^2)'=\varphi'(x)-\varphi'(a-x)=0\to\varphi'(x)=\varphi'(a-x)\to x=a-x\to x^*=\dfrac{a}{2}$

На концах отрезка значения функции $\rho^2+r^2=\varphi(x)+\varphi(a-x)$ одинаковые и равны $\varphi(R)+\varphi(a-R)=\left(\sqrt{2R}-\sqrt{R}\right)^4+\left(\sqrt{a}-\sqrt{R}\right)^4=\dfrac{b^2}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)^4+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{2a}-\sqrt{b}\right)^4$. Это значение наибольшее для ρ^2+r^2 при $b\le a\le 2b$. При этих же условиях, минимальное значение ρ^2+r^2 достигается при $x=a/2$ и оно равно $2\varphi\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{b}\right)^4}{2}$. Тогда наибольшее значение суммы площадей кругов

$$S_{\max}=\pi\left(R^2+\rho^2+r^2\right)_{\max}=\frac{\pi}{4}\left(6(3-2\sqrt{2})b^2+(\sqrt{2a}-\sqrt{b})^4\right),$$

а минимальное

$$S_{\min}=\pi\left(R^2+\rho^2+r^2\right)=\pi\left(\frac{b^2}{4}+\frac{\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{b}\right)^4}{2}\right).$$

Подставляя в формулу для $S_{\max}$ $b=4$, $a=8$, находим $S_{\max}=4\pi\left(19-12\sqrt{2}\right)$.