Решения
Задач заключительного тура олимпиады «Росатом»
Физика, 11 класс. Москва

1. Три точечных тела, заряженные разными зарядами, но имеющие одинаковые массы, представляют собой замкнутую систему. В некоторый момент времени тела оказываются на одной прямой, при этом ускорение одного из них (неизвестно какого – крайнего или среднего) равно a, второго (тоже неизвестно какого) - $3a$. Найти ускорение третьего тела в этот момент. Между телами действуют только кулоновские силы.

Решение. Ускорения зарядов не зависят от их скоростей, поэтому без ограничения общности можно считать, что в рассматриваемый момент заряды покоятся. В этом случае суммарный импульс системы зарядов равен нулю, а поскольку она замкнута, он будет равен нулю и в дальнейшем.

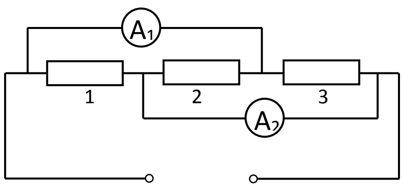
Так как тела находятся на одной прямой, то силы могут действовать только вдоль этой прямой, ускорения могут быть направлены только вдоль этой прямой. Условию задачи не противоречат два случая направления ускорений: два данных ускорения тел направлены одинаково (первый случай), или противоположно (второй случай).

В первом случае за некоторый малый интервал времени Δt два заряда, ускорения которых нам даны, приобрели скорости $a\Delta t$ и $3a\Delta t$, направленные одинаково. Значит, импульс этих зарядов равен $m4a\Delta t$, поэтому таким же должен быть и импульс третьего заряда, следовательно третий заряд должен приобрести скорость $4a\Delta t$, направленную противоположно. Значит, его ускорение равно $4a$ и направлено противоположно ускорениям $\vec{a}$ и $3\vec{a}$.

Аналогично, если данные в условии ускорения направлены противоположно, ускорение третьего заряда равно $2a$ и направлено так же, как вектор ускорения $\vec{a}$.

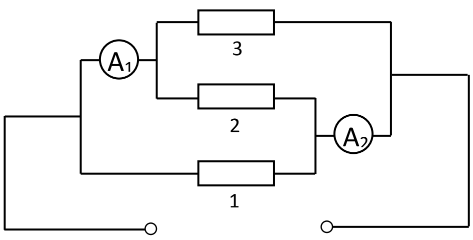
Обратим внимание, что полученный результат не зависит от знаков зарядов и расстояний между ними.

2. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, два из трех резисторов одинаковы, третий отличается от них. Известно, что показания первого амперметра $I_1 = I$, второго $I_2 = 2I/3$. Известно, что сопротивление первого резистора r. Найти сопротивления второго и третьего резисторов. Считать, что сопротивления амперметров равны нулю.



Решение. Если бы совпадали сопротивления крайних резисторов, ток через амперметры был бы одинаковым. Поэтому есть две возможности – равны друг другу сопротивления второго и третьего резисторов $r_2 = r_3$ (а сопротивление первого от них отличается), или равны друг другу сопротивления первого и второго резисторов $r_1 = r_2$ (а отличным от них является третье сопротивление).

Поскольку амперметры не имеют сопротивлений, резисторы включены в цепь параллельно источнику, причем амперметр A_1 измеряет ток, текущий через второй и третий резисторы, амперметр A_2 – через первый и второй (см. рисунок). Поэтому



$$i_2 + i_3 = I_1 = I$$

$$i_1 + i_2 = I_2 = \frac{2}{3} I$$

где i_1, i_2 и i_3 - токи, текущие через первый, второй и третий резисторы. Отсюда заключаем, что в первом случае, когда $r_2 = r_3$ (и соответственно $i_2 = i_3$), $i_2 = i_3 = I/2$, $i_1 = I/6$. Поэтому в этом случае сопротивление второго и третьего резисторов втрое меньше сопротивления первого

$$r_2 = r_3 = \frac{r}{3}$$

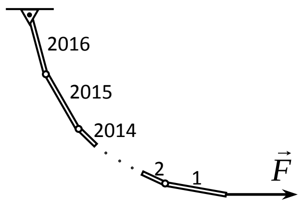
Во втором случае $r_1 = r_2$, $i_1 = i_2 = I/3$, $i_3 = 2I/3$. Сопротивление третьего резистора вдвое меньше сопротивления первого и второго:

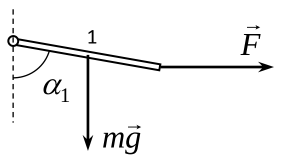
$$r_2 = r, \qquad r_3 = \frac{r}{2}$$

Таким образом, с данными условия совместимы два решения

$$1 \text{ ответ: } r_2 = r_3 = \frac{r}{3}; \qquad 2 \text{ ответ: } r_2 = r, \quad r_3 = \frac{r}{2}$$

3. 2016 одинаковых стержней массой m каждый соединены шарнирно и подвешены за 2016-ый стержень к потолку. На нижний конец нижнего стержня действует горизонтальная сила F. Найти угол между 2016 стержнем и вертикалью в равновесии.



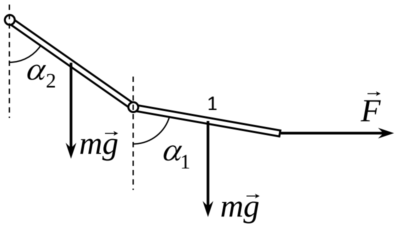


Решение. На первый стержень действуют – сила тяжести, внешняя сила $\vec{F}$, сила реакции шарнира (см. рисунок). Условие равновесия этого стержня (условие моментов относительно шарнира) дает

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha_1 = Fl\cos\alpha_1 \qquad (*)$$

Где m - масса стержня, l - его длина, α_1 - угол между первым стержнем и вертикалью. Из этого равенства находим

$$tg\,\alpha_1 = \frac{2F}{mg}$$



Рассмотрим теперь условие равновесия двух нижних стержней. В качестве внешних сил на них действуют – две силы тяжести, сила реакции второго шарнира (которым второй стержень связан с третьим) и сила $\vec{F}$ (см. рисунок). Используем далее условие моментов относительно второго шарнира. При этом заметим, что плечо силы $\vec{F}$ относительно второго шарнира больше плеча силы $\vec{F}$ относительно первого на величину $l\cos\alpha_2$, а силы тяжести первого стержня – на величину $l\cos\alpha_2$. Поэтому условие равновесия дает

$$mg\left(\frac{l}{2}\sin\alpha_1 + l\sin\alpha_2\right) + mg\frac{l}{2}\sin\alpha_2 = F\left(l\cos\alpha_1 + l\cos\alpha_2\right) \qquad (**)$$

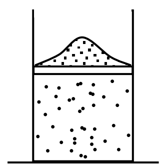
Но первые слагаемые в скобках в правой и левой частях равны друг другу согласно условию равновесия первого стержня (*). Поэтому равенство (**) отличается от равенства (*) тем, что в него входит только угол α_2, но две силы тяжести, причем одна из них с удвоенным плечом. Поэтому

$$tg\,\alpha_2 = \frac{2F}{3mg}$$

Отсюда ясно, как будут находиться следующие углы – в знаменателе будут появляться нечетное число, равное $2k-1$, где k - номер стержня, угол наклона которого исследуется. Поэтому для 2016 стержня имеем

$$tg\,\alpha_{2016} = \frac{2F}{4031mg}$$

4. В теплоизолированном сосуде под массивным поршнем, на котором лежит куча песка, находится одноатомный идеальный газ. Объем газа V, давление p. Песок (по одной песчинке) снимают с поршня, и объем газа медленно увеличивается вдвое. Какой была бы кинетическая энергия поршня в тот момент, когда объем газа вырос вдвое, если бы песок сняли с поршня весь сразу? Атмосферное давление отсутствует. **Указание.** В адиабатическом процессе давление и объем идеального газа связаны соотношением $pV^{\gamma} = const$, где γ - известное число ($\gamma > 1$).



Решение. Конечное давление газа найдем по закону адиабатического процесса

$$pV^{\gamma} = p_1(2V)^{\gamma}$$

Отсюда находим

$$p_1 = \frac{p}{2^{\gamma}}$$

Очевидно работа, совершенная газом в этом процессе, равна изменению его внутренней энергии

$$A = U_1 - U_2 = \frac{3}{2}\left(pV - p_1 2V\right) = \frac{3}{2}pV\left(1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}}\right)$$

Поскольку поршень массивный, то и при снятии всего песка сразу, он будет перемещаться достаточно медленно, и процесс будет равновесным. Поэтому во втором процессе газ совершит ту же самую работу. Но если в первом случае она тратилась на увеличение потенциальной энергии поршня и песчинок, которые оказались поднятыми на разные высоты, теперь она будет израсходована на изменение потенциальной и кинетической энергии поршня

$$A = \left(2Mgh - Mgh\right) + E_k \qquad (*)$$

где M - масса поршня, h - высота расположения поршня над дном сосуда в начальном состоянии. С другой стороны, в конечном состоянии (после снятия песка) давление газа равно давлению поршня

$$p_1 = \frac{Mg}{S}$$

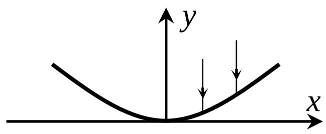
где S - площадь сечения сосуда. Поэтому формулу (*) можно привести к виду

$$A = \left(p_1 2V - p_1 V\right) + E_k = p_1 V + E_k = \frac{pV}{2^{\gamma}} + E_k$$

Отсюда находим

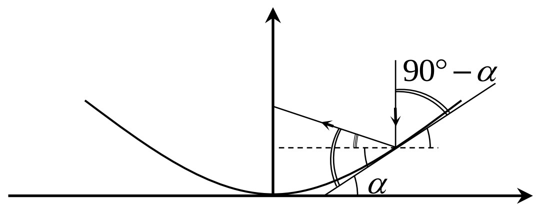
$$E_k = A - \frac{pV}{2^{\gamma}} = \frac{3}{2}pV\left(1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}}\right) - \frac{pV}{2^{\gamma}} = pV\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2^{\gamma}} - \frac{1}{2^{\gamma}}\right) = pV\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2^{\gamma}}\right)$$

5. Зеркало образовано вращением параболы $y = 2x^2$ вокруг оси y (параболическое зеркало). На зеркало параллельно оси y падают два луча: один на некотором расстоянии x, второй - на расстоянии $2x$ от оси y. Какой из лучей после отражения от поверхности зеркала пересечет ось y ближе к вершине параболы и на сколько? Найти расстояние от вершины параболы до точки пересечения этого луча с осью y.



Решение. Рассмотрим отражение от поверхности зеркала луча, имеющего (до отражения) координату x. Введем систему координат, как показано на рисунке. Тогда тангенс угла наклона поверхности зеркала в точке падения луча к оси x определяется производной нашей параболы

$$\mathrm{tg}\,\alpha = y' = 4x \qquad (*)$$



(угол α на рисунке; все углы α отмечены на рисунке одной дугой). Геометрически очевидно (см. рисунок), что угол между или отраженным лучом и зеркалом в точке падения равен $90° - \alpha$ (отмечен на рисунке двумя дугами). Поэтому угол между отраженным лучом и осью x равен $90° - 2\alpha$. Следовательно, координата точки пересечения отраженного луча и оси y определяется соотношением

$$y = 2x^2 + x\,\mathrm{tg}\,(90° - 2\alpha) = 2x^2 + \frac{x}{\mathrm{tg}\,(2\alpha)}$$

Используя, далее известную формулу для тангенса двойного угла и соотношение (*), получим

$$y = 2x^2 + \frac{x\left(1 - \mathrm{tg}^2\alpha\right)}{2\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{1}{8}.$$

Таким образом, расстояние от вершины параболы до точки пересечения рассматриваемого луча и оси y не зависит от луча. Это значит, что все лучи придут в точку, лежащую на расстоянии 1/8 от вершины параболы.