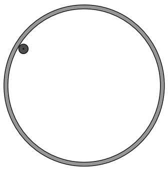
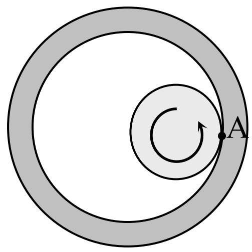
Решения и критерии оценивания
Задач заключительного тура
Инженерной олимпиады школьников, 11 класс, 2018-2019 учебный год

1. Инженеры-взрывотехники, изучая взрыв экспериментального субъядерного заряда, установили, что сразу после взрыва заряд превращается в шарообразное однородное облако мельчайшей пыли радиуса R и плотности ρ_0. Начальная скорость v каждой пылинки облака направлена от его центра и пропорциональна расстоянию r от нее до центра облака: $v = Hr$, где H - известный коэффициент. Считая, что в дальнейшем скорости пылинок не меняются, определите плотность пыли на расстоянии $R/4$ от центра облака через время t после взрыва.

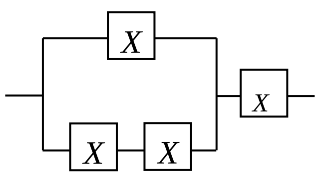


2. К стене прислонили и удерживают обруч. В одной точке в стене «внутри» обруча в стену вбили гвоздь так, что обруч касается его (см. рисунок). Найти геометрическое место точек стены, в которые нужно вбить второй гвоздь внутри обруча, чтобы обруч оставался неподвижным. Ответ обосновать (даже правильный ответ без обоснования засчитываться не будет).



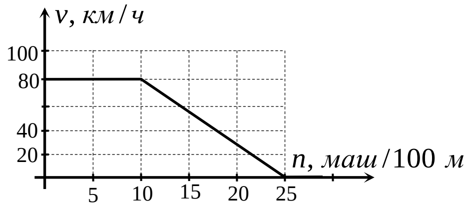
3. В конце 19 века в связи с развитием машиностроения велись интенсивные работы по преобразованию одного движения в другое. Например, вращательного в движение по прямой или s-образное. Тогда математики вспомнили о теореме, доказанной 900 лет назад известным персидским математиком Насиром ад-Туси. Эта теорема сводится к следующему. Пусть по внутренней поверхности полого цилиндра с внутренним радиусом R катится без проскальзывания диск радиуса $R/2$. Какой будет траектория движения точки на поверхности диска (например, точки А на рисунке)? Ответ обоснуйте. Найдите зависимость величины скорости точки А от времени, если диск вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω, а в начальный момент точка А касалась поверхности цилиндра в самой правой ее точке (см. рисунок).

4. Работая в секретной военной лаборатории Чебурашка и крокодил Гена синтезировали необычный материал. Его удельная теплоемкость c зависит от температуры t в шкале Цельсия по закону: $c(t) = c_0(1+\gamma t)$, где $c_0 = 2{,}1\cdot 10^3$ Дж/(кг$\cdot$град) и $\gamma = 0{,}05$ град$^{-1}$ – известные постоянные. Образец данного материала массой $m = 0{,}5$ кг и начальной температурой $t_0 = 0°$С бросают в воду массой $2m$ и температурой $t_1 = 45°$С. Какая установится температура? Удельная теплоемкость воды $c = 2c_0 = 4{,}2\cdot 10^3$ Дж/(кг$\cdot$град), потерями тепла пренебречь.



5. Элемент X обладает следующей вольтамперной характеристикой (зависимостью тока через него I от приложенного к нему электрического напряжения): $I = \alpha U^2$, где α - известное число. Из четырех одинаковых элементов X собрали цепь, схема которой приведена на рисунке. Найти ее вольтамперную характеристику.

6. При исследовании автомобильных пробок инженерам-дорожникам приходится рассчитывать пропускные способности дорог, максимальное количество машин, которые могут проехать по тому или иному участку дороги, причем исходя из возможностей и предпочтений усредненного водителя. Пусть по прямому участку шоссе движется поток машин. Их скорости одинаковы и не меняются с течением времени. Дан график зависимости скорости, с которой едут машины в потоке v (в километрах в час), от числа машин n, приходящихся на 100 м дороги. Какое максимальное количество машин может проехать за 1 час около некоторой отметки на дороге?



Решения. Критерии оценивания

1. Докажем, что облако остается однородным с течением времени. Для этого рассмотрим все пылинки, которые находятся на расстояниях от r_1 до r_2 от центра облака. Масса этих пылинок равна

$$m = \rho_0 V = \rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi r_2^3 - \frac{4}{3}\pi r_1^3 \right) = \rho_0 \frac{4}{3}\pi \left(r_2^3 - r_1^3 \right) \qquad (*)$$

где V - объем сферического слоя с внутренним радиусом r_1, внешним r_2. Через время t после взрыва только эти пылинки окажутся на расстояниях от $r_1 + v(r_1)t = r_1(1+Ht)$ до $r_2 + v(r_2)t = r_2(1+Ht)$ от центра облака. Действительно, пылинки, находящиеся в начальный момент на расстояниях, бóльших r_2 от центра, имеют бóльшие скорости, улетят дольше пылинок, находящихся на расстоянии r_2, и в этот слой не попадут. Пылинки, находящиеся в начальный момент на расстояниях, меньших r_1 от центра, имеют меньшие скорости и отстанут от пылинок, находящихся на расстоянии r_1. Поэтому в сферическом слое с внутренним радиусом $r_1(1+Ht)$ и внешним $r_2(1+Ht)$ через время t после взрыва окажутся пылинки суммарной массой (*). И, следовательно, плотность пылинок в указанном слое будет равна

$$\rho(t) = \frac{m}{V} = \frac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi \left(r_2^3 - r_1^3 \right)}{\frac{4}{3}\pi \left(\left(r_2(1+Ht) \right)^3 - \left(r_1(1+Ht) \right)^3 \right)} = \frac{\rho_0}{(1+Ht)^3}$$

Таким образом, плотность облака осколков взрыва через время t после взрыва не зависит ни от r_1, ни от r_2, и значит, останется постоянной по всему облаку. Учитывая, что дальше, чем на расстоянии $R(1+Ht)$ от центра облака частиц вообще не будет, получаем окончательно для плотности пыли через время t после взрыва

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_0}{\left(1+Ht\right)^3}, & \text{при } r < R\left(1+Ht\right) \\ 0, & \text{при } r > R\left(1+Ht\right) \end{cases}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):
1. Доказано, что облако будет однородным в любой момент времени – 0,5 балла.
2. Правильно найден радиус облака в любой момент времени - 0,5 балла
3. Правильно найдена плотность облака внутри облака – 0,5 балла
4. Приведен правильный ответ, включающий в себя обе плотности – ненулевую внутри облака, нулевую – вне – 0,5 балла

2. Для нахождения области, вбивание в которую второго гвоздя сохраняет обруч в равновесии, можно провести следующие рассуждения. Отпустим обруч, не вбивая второй гвоздь, и найдем, как он движется. Тогда те положения второго гвоздя, которые препятствуют такому движению, будут положениями, оставляющими обруч в покое.

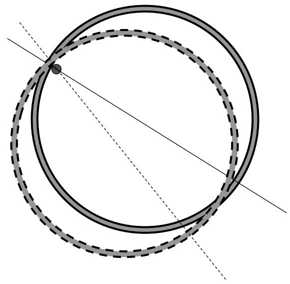


Рис. 1

Очевидно, при отпускании обруч будет вращаться вокруг гвоздя, поскольку одна его точка всегда с гвоздем контактирует, а центр обруча должен опускаться. Т.е. через малое время после отпускания обруч займет положение, показанное пунктиром на рисунке 1 (тонкая прямая линия проходит через гвоздь и центр обруча в первоначальном положении, тонкая пунктирная – через гвоздь и центр обруча спустя малое время после его отпускания). А это значит, что точка обруча, контактирующая с гвоздем, является мгновенным центром вращения обруча, все участки обруча, выделенные на рисунке 2 красным пунктиром, движутся при его отпускании в направлении внутренней области обруча, выделенные зелеными точками – в направлении его внешней области. Поэтому положения второго гвоздя в любой точке внутренней области обруча, выделенной на рисунке красным пунктиром, будут препятствовать рассмотренному движению.

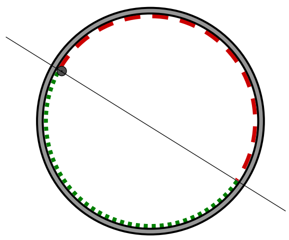


Рис. 2

Однако все-таки не все такие положения второго гвоздя оставят обруч в покое. Дело в том, что при некоторых положениях второго гвоздя, обруч будет двигаться не так, как это описано выше. Если вбить второй гвоздь в любые точки стены, лежащие около его левой части выше первого гвоздя (выделено желтым на рисунке 3), то обруч при отпускании будет поворачиваться относительно именно этого (второго) гвоздя. Поэтому данные положения второго гвоздя нужно исключить из найденной на рисунке 2 области вбивания второго гвоздя, оставляющие обруч в покое (из области красного пунктира на рисунке 2).

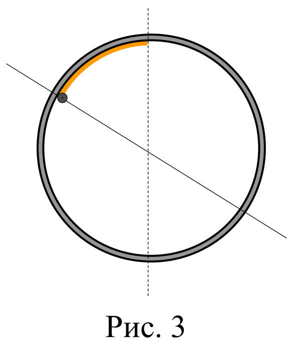


Рис. 3

В результате находим окончательно, что те точки внутри обруча, при вбивании гвоздя в любую из которых обруч останется в равновесии, лежат от верхней точки обруча до точки на том диаметре обруча, который проходит через первый гвоздь (рис. 4; выделено на рисунке красным).

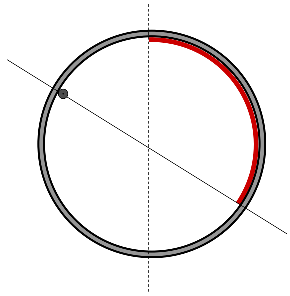


Рис. 4

Интересно отметить, что найденное решение остается справедливым и в том случае, когда первый гвоздь расположен внутри обруча в его нижней половине (рис. 5). И в этом случае положения второго гвоздя внутри обруча, сохраняющие обруч в покое, лежат от верхней точки обруча до диаметра, проходящего через первый гвоздь. Действительно, в этом случае верхний и нижний гвоздь меняются местами, и мы получаем такое же положение гвоздей, которое показано на рисунке 4 с заменой правой части обруча на левую.

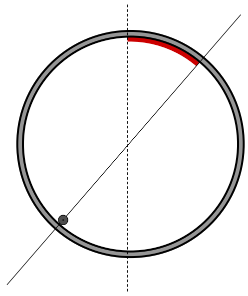


Рис. 5

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Правильно выстроена логика определения нужной области – либо как описано выше, либо с использованием формальных уравнений статики – 0,5 балла.
2. Правильно определена (и обоснована) нижняя граница искомой области – в точке пересечения обруча диаметром, проходящим через гвоздь - 0,5 балла
3. Правильно определена верхняя граница искомой области самая высокая точка обруча – 0,5 балла
4. Точные обоснования всех предыдущих пунктов – 0,5 балла

3. Найдем зависимость координаты точки А от времени. Выберем систему координат так, как показано на рисунке и будем считать, что в начальный момент времени x - координата точки А равнялась R, а y-координата – нулю (т.е. диск занимал положение, показанное на рисунке 1).

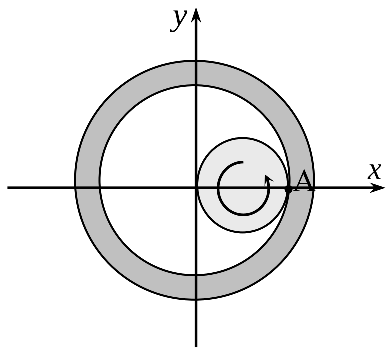


Рис.1.

Прежде, чем найти зависимость координат точки А от времени $x_A(t)$ и $y_A(t)$, сделаем небольшую подготовительную работу. Докажем, что если центр диска вращается без проскальзывания по внутренней поверхности цилиндра удвоенного радиуса, то сам диск вращается вокруг своей оси с той же угловой скоростью, но в противоположном направлении (например, по и против часовой стрелки). Что касается направлений вращения, то они очевидны (например, из рисунка 2, на котором центр диска вращается по часовой стрелке вокруг оси цилиндра, а тоска А против часовой стрелки вокруг центра диска – в систем отсчета $x'-y'$). Величины угловых скоростей вращения диска вокруг своей оси и его центра вокруг оси цилиндра можно связать так. Пусть центр диска

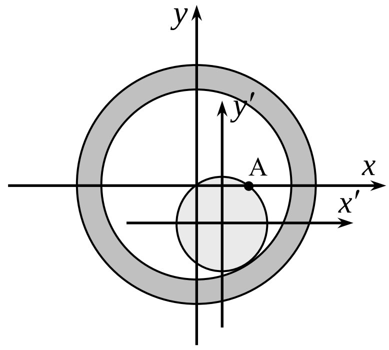


Рис. 2.

совершил четверть оборота вокруг оси цилиндра. Но тогда и точка А совершит ровно четверть оборота вокруг оси диска (см. рис. 3). Это связано с тем, что длина полуокружности диска и длина четверти окружности внутренней поверхности цилиндра (при двукратном отличии радиусов) совпадают, и следовательно точка А, начав движение из положения, в котором она касается поверхности полости справа, через четверть оборота центра диска вокруг оси цилиндра окажется в центре полости (на оси цилиндра) и, следовательно также совершит четверть оборота вокруг центра диска (см. рис. 3).

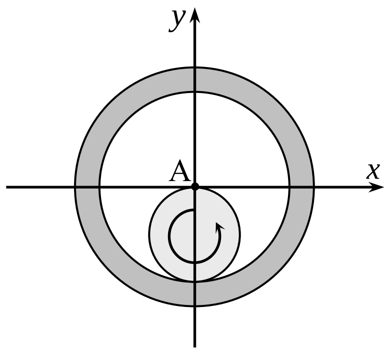


Рис. 3.

Поэтому зависимости координат центра диска x_c и y_c от времени, и координат точки А в системе координат, начало которой связано с центром диска, а оси направлены так же (рис. 2) x'_A и y'_A можно записать как

$$\begin{aligned} x_c(t) &= \frac{R}{2}\cos(-\omega t) = \frac{R}{2}\cos\omega t \\ y_c(t) &= \frac{R}{2}\sin(-\omega t) = -\frac{R}{2}\sin\omega t \end{aligned} \qquad (*)$$

$$\begin{aligned} x'_A(t) &= \frac{R}{2}\cos\omega t \\ y'_A(t) &= \frac{R}{2}\sin\omega t \end{aligned} \qquad (**)$$

(здесь учтены свойства четности тригонометрических функций и то обстоятельство, что и центр диска движется вокруг оси цилиндра по окружности радиуса $R/2$, и точка А движется вокруг центра диска по окружности радиуса $R/2$). Из формул (*) и (**) находим координаты точки А как функции времени:

$$\begin{aligned} x_A(t) &= x_c(t) + x'(t) = R\cos\omega t \\ y_A(t) &= y_c(t) + y'(t) = 0 \end{aligned} \qquad (***)$$

Отсюда следует, что точка А движется вдоль горизонтальной прямой по гармоническому закону (***), а зависимость модуля ее скорости от времени определяется соотношением

$$v_A(t) = |R\omega\sin\omega t|$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Понято, что направления вращения центра диска и точки на ободе вокруг центра диска противоположны, а угловые скорости равны – 0,5 балла
2. Есть правильные рисунки (с обоснованиями), показывающие положение центра диска и фиксированной точки на ободе в разные моменты времени – 0,5 балла.
3. Доказано, что любая фиксированная точка диска движется при его вращении по прямой через ось цилиндрической полости – 0,5 балла
4. Правильно найдена зависимость скорости точки на поверхности диска от времени – 0,5 балла

4. Пусть установившаяся температура воды в стакане равна t_x. Тогда вода отдает количество теплоты, равное

$$Q = 2mc\left(t_1 - t_x\right) = 4mc_0\left(t_1 - t_x\right)$$

Поскольку потерь тепла нет, это количество теплоты получит материал с переменной теплоемкостью. Чтобы рассчитать, к какому изменению температуры приведет это тепло, разделим температурный интервал $t_x \div t_0$ на такие малые интервалы Δt_i, внутри каждого из которых теплоемкость секретного материала можно считать постоянной. Тогда количество теплоты, полученное секретным материалом, есть сумма количеств теплоты, полученных на каждом малом интервале, а последние могут быть найдены по стандартной формуле. Поэтому имеем

$$Q = \sum_i mc\left(t_i\right)\Delta t_i = mc_0\left(\sum_i \Delta t_i + \gamma \sum_i t_i \Delta t_i\right)$$

Первая сумма скобках равна полному изменению температуры $t_x - t_0 = t_x$ (все температуры заданы в градусах Цельсия. Вторая сумма в скобках аналогично сумме, которую приходится вычислять при вычислении работы силы упругости, и которая вычисляется графически. Применяя здесь аналогичные соображения находим эту сумму

$$\sum_i t_i \Delta t_i = \frac{1}{2}t_x^2$$

Отсюда получаем уравнение для искомой температуры t_x

$$\gamma t_x^2 + 10t_x - 8t_1 = 0 \qquad (*)$$

Решая квадратное уравнение (*), находим

$$t_x = \frac{-10 + \sqrt{100 + 32\gamma t_1}}{2\gamma} = 31{,}2^\circ\,\mathrm{C}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

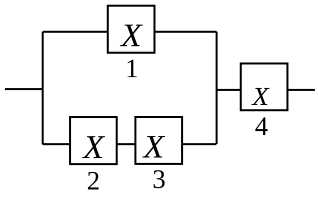
1. Правильная идея решения – использование уравнений теплового баланса для каждой малой передачи тепла – 0,5 балла

2. Правильное использование уравнений теплового баланса для малых изменений температуры - 0,5 балла.

3. Графический способ вычисления указанной суммы – 0,5 балла.

4. Правильное решение, правильные вычисления – 0,5 балла

5. Установим связь между током через рассматриваемый участок цепи и приложенным к нему напряжением. Для упрощения изложения пронумеруем элементы так, как это показано на рисунке.



Пусть сила электрического тока, текущего через рассматриваемый участок цепи, равна I. Тогда именно такой ток течет через элемент 4 - $I_4 = I$. Поэтому напряжение на нем равно

$$U_4 = \left(\frac{I}{\alpha}\right)^{1/2}$$

Поскольку сила тока, текущего через рассматриваемые элементы пропорциональна квадрату напряжения, приложенного к ним, а напряжение на элементе 1 в два раза больше напряжения на элементах 2 и 3, то сила тока, текущего через элемент 1 в 4 раза больше силы тока, текущего через элементы 2 и 3. А так как $I_1 + I_{2,3} = I_4$, то

$$I_1 = \frac{4}{5}I, \qquad I_{2,3} = \frac{1}{5}I$$

(здесь I_1 - сила тока, текущего через элемент 1, $I_{2,3}$ - сила тока, текущего через элементы 2 и 3. Отсюда находим напряжение на элементах 1 и цепочке 2-3

$$U_1 = U_{2-3} = \left(\frac{I_1}{\alpha}\right)^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{I}{\alpha}\right)^{1/2}$$

Следовательно, напряжение на рассматриваемом участке цепи равно

$$U = U_1 + U_4 = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{I}{\alpha}\right)^{1/2} + \left(\frac{I}{\alpha}\right)^{1/2} = \frac{\left(2+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5}}\left(\frac{I}{\alpha}\right)^{1/2}$$

Поэтому вольтамперная характеристика рассматриваемого участка цепи может быть записана уравнением

$$I = \frac{5\alpha}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}U^2$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Использованы ВАХ элемента Х и правила сложения токов и напряжений для нахождения тока и напряжения на участке последовательного соединения 2-3 – 0,5 балла.
2. Использованы ВАХ элемента Х и правила сложения токов и напряжений для нахождения тока и напряжения на участке параллельного соединения 1 – (2-3) – 0,5 балла
3. Использованы ВАХ элемента Х и правила сложения токов и напряжений для нахождения тока и напряжения на участке последовательного соединения (1 – (2-3)) – 4 – 0,5 балла – 0,5 балла
4. Правильная вольтамперная характеристика рассматриваемого участка цепи – 0,5 балла.

6. Понятно, что это задача на отыскание оптимального дорожного режима. Если машин на дороге мало, то несмотря на большие скорости по дороге проезжает небольшое их количество. Если машин на дороге много, то они имеют малые скорости, и количество проезжающих по дороге машин снова мало. Поэтому при определенной максимальной пропускной способности дороги, нужно найти оптимальное значение концентрации машин на дороге.

Пусть, на 100 метров дороги приходится n машин. Найдем, сколько машин проезжают какую-то точку на шоссе за интервал времени Δt. Так как все машины движутся с одинаковой скоростью $v(n)$, мимо рассматриваемой точки успеют проехать те машины, которые находятся на расстоянии, не большем, чем $v\Delta t$ от этой точки. А их количество N можно найти из графика

$$N = 10vn\Delta t \qquad (*)$$

(здесь n - число машин, приходящихся на 100 метров дороги, скорость задана в километрах в час, время в часах). Таким образом, чтобы найти максимальное количество машин, которое может проехать мимо какой-то точки на дороге, нужно найти максимум выражения $v(n)n$ как функции числа машин n, приходящихся на 100 метров дороги. Дифференцируя эту функцию и приравнивая производную к нулю, получим

$$\left(v(n)n\right)' = v'(n)n + v(n) = 0$$

Таким образом, максимум произведения $v(n)n$ достигается в такой точке графика, в которой

$$v'(n) = -\frac{v(n)}{n}$$

или, другими словами, в которой угол наклона касательной к графику $v(n)$ равен углу наклона прямой, проведенной в эту точку из начала координат. Т.е. при таком значении n_0, при котором треугольник ОАВ – равнобедренный (см. рисунок). Это значит, что значение n_0 делит интервал ОВ пополам, или

$$n_0 = 12,5$$

Находя по графику значение $v(n_0) = 66,7$ км/ч, по формуле (*) находим максимальное количество машин, которое может проехать за 1 час мимо какой-то точки дороги

$$N_{\max} = 8337,5 \text{ машин.}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Понято и правильно обосновано, что максимальная пропускная способность шоссе связана с максимумов величины vn (обозначения см. в условии) – 0,5 балла.
2. Понято и правильно обосновано, как найти максимум этого произведения с помощью графика – 0,5 балла
3. Правильно найдено значение n, отвечающее максимуму пропускной способности шоссе – 0,5 балла.
4. Правильно найдена максимальная пропускная способность шоссе – 0,5 балла

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.