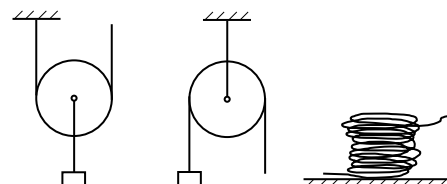


**Решения и критерии оценивания**  
**Задач заключительного тура**  
**Инженерной олимпиады школьников, 11 класс, 2018-2019 учебный год**  
**Комплект 2**

1. Имеется два сосуда, в которых находится серная кислота массой  $m$  и  $2m/3$ . Если смешать все содержимое сосудов, получится раствор с концентрацией  $C$ , а если смешать равные массы растворов, взятых из обоих сосудов, получится раствор концентрации  $1,2C$ . Найти концентрацию кислоты в сосудах.

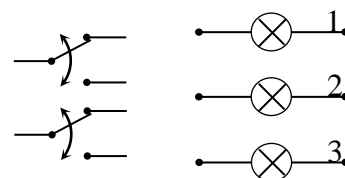
2. Имеются произвольные – подвижные (левый рисунок) или неподвижные (центральный рисунок) блоки и неограниченное количество веревки (правый рисунок). Подвижный блок позволяет получить двукратный выигрыш в силе, неподвижный – поменять



направление приложения усилия. Предложите подъемные механизмы, использующие подвижные и неподвижные блоки, которые будут давать выигрыш в силе в три раза и в пять раз. Задействуйте как можно меньшее число элементов. Можно использовать блоки разных радиусов, закреплять блоки разных радиусов на одной оси и т.д. В качестве решения нарисуйте предложенную схему соединения веревок и блоков и обоснуйте увеличение силы.

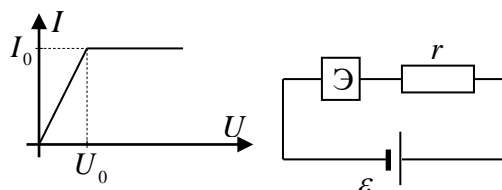
3. Кинофильм записан на пленке, которая намотана на катушку. За какое время пленка перемотается на другую точно такую же катушку, если вращать принимающую катушку с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Длина пленки  $l$ , радиус пустой катушки  $R$ . Толщина пленки много меньше диаметра катушки.

4. Предложите схему включения в бытовую электрическую сеть трех лампочек. Цепь должна содержать: три лампочки и два переключателя на два положения (рисунок) и иметь следующие режимы работы: при определенном положении двух переключателей нормальным накалом



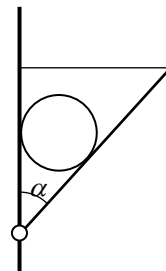
горит только первая лампа; при другом положении переключателей нормальным накалом горит только вторая лампа; при третьем положении переключателей нормальным накалом горит только третья лампа; при четвертом положении переключателей нормальным накалом горят все три лампы.

5. Вольтамперная характеристика (зависимость тока от напряжения) для некоторого элемента электрической цепи приведена на графике. Такой элемент (обозначен буквой Э на схеме цепи) с последовательно соединенным сопротивлением  $r$  подключают к источнику постоянной



ЭДС  $\varepsilon$ . Найти напряжение на элементе и силу электрического тока, протекающего через него. Сопротивлением источника пренебречь. Величины  $I_0$  и  $U_0$  - известны.

6. Цилиндрическое бревно массой  $m$  и радиусом  $R$  удерживают в горизонтальном положении с помощью двух одинаковых балок длиной  $l$  и вертикальной стены. Один конец каждой балки закреплен шарнирно на стене, второй - привязан к стене с помощью горизонтального троса (см. рисунок), при этом балки располагаются под углом  $\alpha$  к стене. При каком угле  $\alpha$  сила натяжения тросов минимальна? Найти минимальную силу натяжения тросов.



**Решения. Критерии оценивания**

1. Пусть концентрация кислоты массой  $m$  равна  $c_1$ , а кислоты массой  $2m/3$  -  $c_2$ . Тогда масса кислоты в первом и втором растворах есть

$$M_1 = c_1 m, M_2 = 2c_2 m / 3.$$

Следовательно, концентрация раствора, образовавшегося при смешении всего содержимого сосудов будут равна

$$C = \frac{c_1 m + 2c_2 m / 3}{5m / 3} = \frac{3c_1 + 2c_2}{5} \quad (*)$$

Если взять одинаковые массы растворов, то концентрация смеси будет равна

$$1,2C = \frac{c_1 + c_2}{2} \quad (**)$$

Решая систему уравнений (\*), (\*\*), получим

$$c_1 = 0,2C, c_2 = 2,2C$$

**Критерии оценивания:**

1. Школьник верно использовал определение концентрации – 0,5 балла
2. Правильное уравнение для концентрации раствора, полученного из всего содержимого – 0,5 балла
3. Правильное уравнение для концентрации раствора, полученного при смешении равных масс растворов – 0,5 балла
4. Правильное решение, правильные ответы - 0,5 балла

**Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.**

2. Схема соединения блоков для трехкратного увеличения силы и расстановка сил натяжения веревок приведена на рисунке 1. Аналогичные чертежи для пятикратного увеличения силы приведены на рисунке 2.

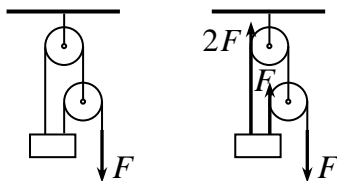


Рис. 1

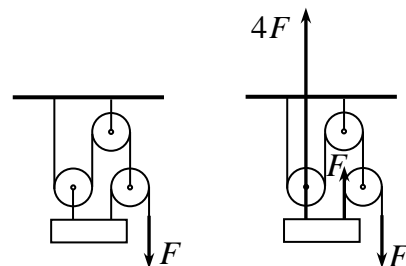
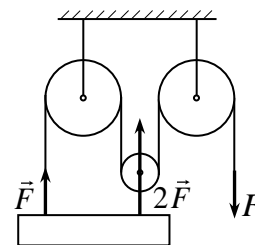


Рис. 2

Увеличение силы происходит при охватывании веревкой подвижного блока: в случае малой массы самого блока веревка, привязанная к его оси, будет давать удвоенную силу натяжения.

Можно предложить и другие варианты соединений веревок и блоков. Для трехкратного выигрыша в силе можно прикрепить к телу два веревки, одна из которых та же, что и

вытягивается внешней силой, а вторая привязана к оси подвижного блока, охватываемого внешней силой (см. рисунок). В результате, если веревка движется под действием некоторой силы  $F$ , на массивную плиту действует сила  $3F$ . Для пятикратного выигрыша в силе можно дублировать два левых блока, а соответствующие веревки привязать к массивной плите. Тогда на плиту будет действовать сила  $5F$ .



**Критерии оценивания:**

1. Обосновано использование подвижного блока для двукратного выигрыша в силе и неподвижного блока для изменения направления приложения силы – 1 балл.
2. Предложена и обоснована конструкция с трехкратным выигрышем в силе - 0,5 балла
3. Предложена и обоснована конструкция с пятикратным выигрышем в силе – 0,5 балла

**Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.**

3. Найдем, сколько оборотов пленки нужно сделать, чтобы заполнить катушку. Обозначим это число  $n$ . Тогда, очевидно

$$R = nd \tag{*}$$

где  $d$  - толщина пленки. С другой стороны, для полной длины пленки имеем

$$l = 2\pi d + 2\pi 2d + 2\pi 3d + \dots = 2\pi d (1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2\pi d \frac{n(n+1)}{2} \approx \pi dn^2 \tag{**}$$

Отсюда с учетом (\*) находим

$$l = \pi Rn$$

Или, другими словами, средняя длина одного витка пленки, намотанного на катушку, равна  $R/2$ .

Поэтому чтобы перемотать всю пленку, катушка должна совершить

$$n = \frac{l}{\pi R}$$

Оборотов. А поскольку каждый оборот совершается за одинаковое время

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

время перемотки равно

$$t = nT = \frac{l}{\pi R} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2l}{R\omega}$$

**Критерии оценивания:**

1. Найдено количество оборотов пленки на катушке – 0,5 балла
2. Найдена длина ленты как сумма длин всех оборотов ленты. Проведено суммирование длин или обосновано использование средней длины одного оборота – 0,5 балла.
3. Найдено время одного оборота – 0,5 балла

4. Правильный ответ – 0,5 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.

4. Возможная схема включения лампочек приведена на рисунке 1.

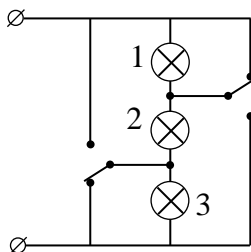


Рисунок 1.

Убедимся, что она работает именно так, как сказано в условии задачи. В положении, показанном на рисунке 1, нормальным накалом горит только лампочка 2, две другие не горят, поскольку «закорочены» проводами (предполагается, что провода сопротивлений не имеют).

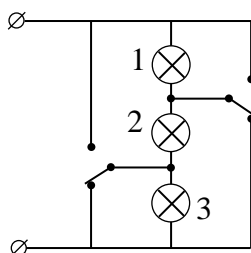


Рисунок 2.

Переключим один (верхний) переключатель (рисунок 2). В этом положении «закорочены» лампочки 2 и 3. Следовательно, нормальным накалом горит только лампа 1.

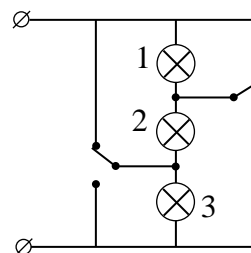


Рисунок 3.

Вернем назад верхний переключатель, а переключим нижний (рис. 3). В этом положении «закорочены» лампочки 1 и 2, поэтому нормальным накалом горит только лампочка 3.

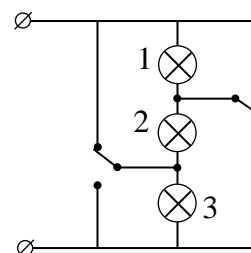


Рисунок 4.

Оставшееся положение переключателей показано на рисунке 4. Очевидно, что в этом положении все три лампочки подключены к источнику параллельно. И потому все три будут гореть нормальным накалом.

**Критерии оценивания:**

1. Предложен вариант цепи, содержащей три лампочки и два переключателя, в котором при некотором положении переключателей нормальным накалом горит одна лампочка, остальные не горят – 0,5 балла
2. Обосновано, что при другом положении переключателей в той же цепи нормальным накалом горит вторая лампочка – 0,5 балла.
3. Обосновано, что при другом положении переключателей в той же цепи нормальным накалом горит третья лампочка – 0,5 балла
4. Обосновано, что при другом положении переключателей в той же цепи нормальным накалом горят все лампочки – 0,5 балла

**Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.**

5. Рассмотрим малые значения ЭДС источника  $\varepsilon$ , при которых ток в цепи будет меньше значения  $I_0$ . В этом случае нелинейный элемент работает на растущем участке ВАХ, и для него справедлив закон Ома. Найдем параметры цепи в этом случае. Пусть ток в цепи равен  $I$  ( $I < I_0$ ). Тогда напряжение на элементе равно  $IU_0/I_0$ , на резисторе  $Ir$ , и закон Ома для замкнутой цепи с учетом идеальности источника дает

$$IU_0/I_0 + Ir = \varepsilon$$

Отсюда находим ток через элемент

$$I = \frac{\varepsilon I_0}{U_0 + rI_0}$$

И напряжение на нем

$$U_{\varepsilon} = \frac{IU_0}{I_0} = \frac{\varepsilon U_0}{U_0 + rI_0}.$$

Это решение верное, если ток в цепи меньше значения  $I_0$ , а напряжение меньше  $U_0$ . Или при

$$\varepsilon < U_0 + rI_0 \quad (*)$$

Если ЭДС источника больше указанного значения, то ток через элемент достигнет значения  $I_0$ , и при дальнейшем росте ЭДС расти не будет. Поэтому при  $\varepsilon \geq U_0 + rI_0$ ,  $I = I_0$ , а напряжение на элементе

$$U_{\varepsilon} = \varepsilon - I_0 r.$$

В итоге получаем окончательно для тока через нелинейный элемент и для напряжения на нем следующие значения

$$I = \frac{\varepsilon I_0}{U_0 + rI_0}, \quad U_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon U_0}{U_0 + rI_0} \quad \text{при} \quad \varepsilon < U_0 + rI_0$$

$$I = I_0, \quad U_{\varepsilon} = \varepsilon - I_0 r \quad \text{при} \quad \varepsilon > U_0 + rI_0$$

### Критерии оценивания:

1. Найдено напряжение на элементе и ток через него на линейном участке вольтамперной характеристики – 0,5 балла
2. Понято, что ток в цепи не может превышать  $I_0$  - 0,5 балла.
3. Из закона Ома для линейного участка найдено напряжение на элементе – 0,5 балла.
4. Правильные ответы – 0,5 балла

**Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.**

6. Условие равновесия бревна дает

$$2N \sin \alpha = mg \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{2 \sin \alpha} \quad (*)$$

где  $N$  - сила реакции балки, действующая на бревно.

Запишем теперь условие моментов сил, действующих на балку, относительно шарнира. На балку действуют: сила реакции бревна (\*), сила в шарнире, сила натяжения троса  $T$ . Поэтому условие моментов относительно шарнира дает

$$Nx = Tl \cos \alpha$$

где  $x$  - расстояние от шарнира до точки касания балки и бревна (см. рисунок).

Отсюда

$$T = \frac{Nx}{l \cos \alpha} = \frac{mgx}{2l \sin \alpha \cos \alpha} \quad (**)$$

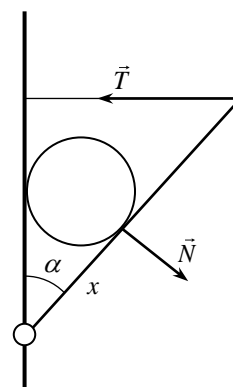
С другой стороны, геометрически очевидно, что

$$x = r \operatorname{ctg}(\alpha/2)$$

Поэтому

$$T = \frac{mgr}{2l \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg}(\alpha/2)} = \frac{mgr}{4l(\sin^2(\alpha/2) - 2\sin^4(\alpha/2))} \quad (***)$$

Чтобы выражение (\*\*\*) было минимально, его знаменатель должен быть максимален. Этот максимум найдем с помощью производной. Дифференцируя знаменатель и приравнявая производную к нулю, получим



$$(\sin^2(\alpha/2) - 2\sin^4(\alpha/2))' = \sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) - 4\sin^3(\alpha/2)\cos(\alpha/2) = 0$$

Отсюда находим угол  $\alpha$ , для которого сила натяжения тросов минимальна

$$\sin(\alpha/2) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ$$

А затем из (\*\*\*) и минимальную силу натяжения тросов

$$T_{\min} = \frac{2mgr}{l}$$

### **Критерии оценивания:**

1. Используются условия сил и условие моментов для нахождения силы натяжения – 0,5 балла.
2. Правильно найдена сила натяжения троса как функция угла наклона конструкции – 0,5 балла
3. Проведено исследование этой функции на максимум – 0,5 балла.
4. Правильный ответ для угла, при котором сила натяжения минимальна, и минимальная сила натяжения – 0,5 балла

**Оценка за задачу находится как сумма оценок перечисленных пунктов. Максимальная оценка за задачу – 2 балла.**

### **Оценка работы**

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.