

12+

Sapere Aude – Дерзай знать!

ISSN 1814-6422

ПОТЕНЦИАЛ

Ежемесячный журнал для старшеклассников и учителей

№04, 2018

МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА

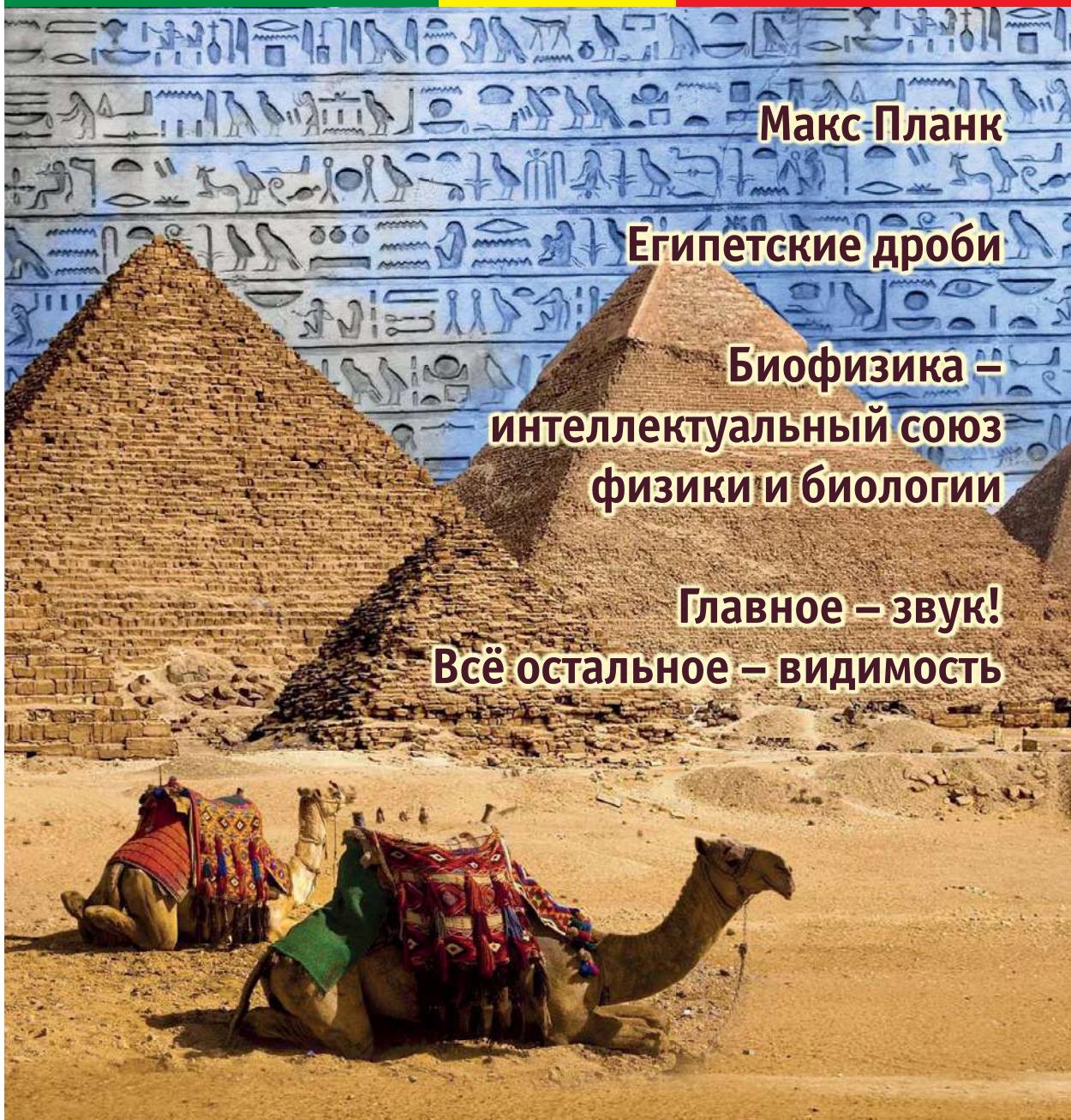
ИНФОРМАТИКА

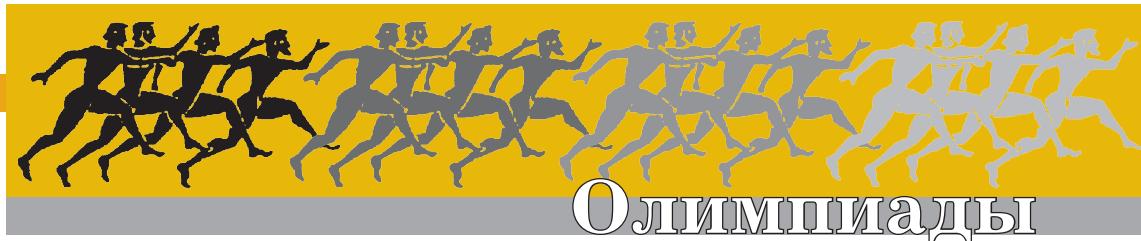
Макс Планк

Египетские дроби

Биофизика –
интеллектуальный союз
физики и биологии

Главное – звук!
Всё остальное – видимость





Муравьёв Сергей Евгеньевич
исполняющий обязанности заведующего кафедрой
теоретической ядерной физики Национального
исследовательского ядерного университета «МИФИ»,
кандидат физико-математических наук.



Скрытный Владимир Ильич
Старший преподаватель кафедры физических проблем
материаловедения Национального исследовательского
ядерного университета «МИФИ».

Инженерная олимпиада школьников 2017–2018 учебного года. Заключительный тур

В 2012 году на карте олимпиадного движения нашей страны появилась новая олимпиада – Инженерная олимпиада школьников. Олимпиада проводится пятью ведущими инженерными вузами – Национальным исследовательским ядерным университетом «МИФИ», Российским университетом транспорта (РУТ МИИТ), Нижегородским государственным техническим университетом им. Р. Е. Алексеева, Самарским университетом им. С. П. Королева, Санкт-Петербургским государственным электротехническим университетом «ЛЭТИ».

Олимпиада эта необычная. С одной стороны, она по физике. С другой стороны, это не совсем «школьная» физика. Это физика в окружающей нас технике, физика тех или иных физических явлений вокруг нас, и вообще – физика в жизни человека.



Учитывая технологические приложения физики, в задание включаются прикладная механика и статика (с простейшими расчётами статических инженерных конструкций и кинематики различных механических устройств), техническая термодинамика, электротехника цепей постоянного и переменного тока, электроника, техническая оптика, элементы ядерных технологий. В задания Инженерной олимпиады школьников включается рассмотрение работы тех или иных инженерных устройств по принципу «Как это работает?», присутствуют задачи-оценки, однако задание не выходит за рамки школьной программы по физике.

За несколько лет проведения Инженерной олимпиады школьников удалось отработать принципы составления задания олимпиады, сделать его достаточно интересным и решаемым лучшими школьниками страны. В результате все участники Инженерной олимпиады школьников могут почувствовать, что инженерная физика – это действительно интересно! А победители и призёры олимпиады могут получить значительные льготы при поступлении в вузы (любые, а не только в вузы-организаторы!), поскольку Инженерная олимпиада школьников входит в Перечень олимпиад школьников Российской Федерации олимпиад школьников.

Приходите на Инженерную олимпиаду будущих лет. Скучно не будет! Будет интересно!!

Ниже приведены задания и решения задач заключительного тура Инженерной олимпиады школьников 2017–2018 учебного года.

Задания

9–10 классы

1. Школьник проделал следующий эксперимент. Он встал перед зеркалом, закрыл один глаз, а затем приkleил на то место зеркала, на котором он видел изображение своего закрытого глаза, маленький кусочек бумаги. После этого, не меняя положения головы, он открыл тот глаз, который был закрыт, и закрыл другой. На каком месте своего изображения он увидит теперь кусочек бумаги? Ответ обосновать.

2. Имеются два одинаковых калориметра, в которые налито одинаковое количество воды: в первый – с температурой $t_1 = 20^\circ\text{C}$, во второй – с температурой $t_2 = 100^\circ\text{C}$. Кроме

того, в первом калориметре находится некоторое тело. Когда тело вынимают из первого калориметра и перекладывают во второй, в нём устанавливается температура $t_x = 63^\circ\text{C}$. Какая температура установится в первом калориметре, если тело вынуть из второго калориметра и снова опустить в первый? Всеми потерями тепла пренебречь.

3. Дифференциальный ворот состоит из двух блоков с радиусами r и $2r$, наложенных на одну ось и склеенных между собой (рис. 1). На блоки ворота в противоположных направлениях намотана верёвка, на которой висит подвижный блок, радиус которого по-



добрал так, что свободные концы вёёвки вертикальны. К оси подвижного блока прикреплён груз массой m . Ручку ворота длиной $4r$ вращают с угловой скоростью ω так, как показано на рис. 1. С какой скоростью поднимается груз? Какую силу необходимо прикладывать к ручке ворота, чтобы груз поднимался равномерно? Трения нет, все блоки невесомы.

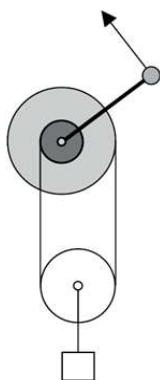


Рис. 1

4. При проектировании подъёмных машин используются механизмы, делающие невозможным обратное движение грузов при отключении их двигателей (самотормозящие). На рис. 2 показан механизм, состоящий из двух ползунов 1 (деталей, совершающих скользящее движение по направляющим 4), соединённых шарнирно с двумя стержнями 2, которые

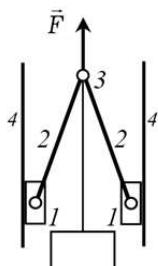


Рис. 2

между собой также соединены шарниром 3. Объясните принцип торможения механизма при «выключении» силы F . При каком коэффициенте трения между ползунами и направляющими механизм будет самотормозящим?

5. Два очень длинных стержня вращаются с постоянными угловыми скоростями ω и 2ω вокруг параллельных осей, проходящих через их концы A и B (см. рис. 3). Расстояние

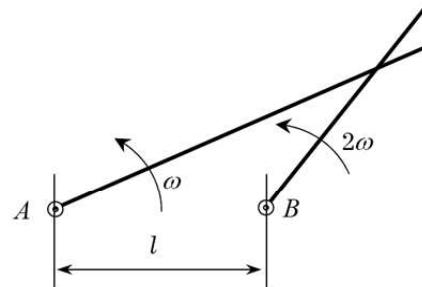


Рис. 3

между осями равно l , в начальный момент оба стержня направлены направо. По какой траектории движется точка пересечения стержней? Найти скорость и ускорение этой точки через время $t = \pi / 6\omega$ после начала движения. Ответ обосновать.

6. На рис. 4, слева показана вольтамперная характеристика (зависимость тока от напряжения) неидеального диода и его обозначение на электрических схемах. Используя неидеальные диоды, резисторы и провода, постройте такую электрическую цепь, вольтамперная характеристика которой показана на рис. 4, справа.

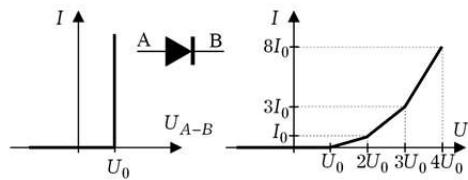


Рис. 4



11 класс

1. Задача 2 из задания для 9–10 классов.

2. Летом в жаркий день (часто в степи или пустыне) можно наблюдать такое явление, когда асфальт дороги становится как будто мокрым, при том что никакого дождя нет (см. фото на рис. 5). Объясните этот эффект, учитывая, что показатель преломления воздуха убывает с ростом температуры по закону $n(T)=1+0,000292T_0/T$ ($T_0=273\text{ К}$). Оцените расстояние, на котором человеку асфальт дороги будет казаться мокрым. Температура асфальта может достигать 60°C . Необходимые для оценки величины выберите, исходя из знаний, опыта и здравого смысла.



Рис. 5

3. Задача 5 из задания для 9–10 классов.

4. Электродвигатели переменного тока были предложены в конце XIX века Н. Тесла и Г. Феррарисом. Их идея состояла в том, чтобы с помощью переменных токов создать вращающееся магнитное поле, которое заставит вращаться магнит. Для создания такого поля они брали несколько соленоидов, пропускали через них переменные токи одинаковой частоты, но со сдвигом фазы. Рассмотрите систему четырёх соленоидов, показанную на рис. 6. Пусть в первом соленоиде течёт ток

$I_1 = A \cos \omega t$. С какими фазовыми сдвигами ($I_i = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i)$, $i=2,3,4$) должны течь токи во втором, третьем и четвёртом соленоидах, чтобы в области между ними было вращающееся магнитное поле? С какой угловой скоростью оно будет вращаться? Соленоиды намотаны так, что при одинаковых фазах тока поле всех соленоидов направлено одновременно либо из центра, либо к центру системы соленоидов.

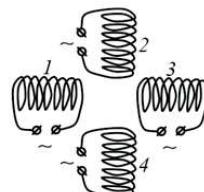


Рис. 6

5. По круглому стержню длиной l и радиуса r распространяется постоянный (т.е. не зависящий от времени) тепловой поток. Распределение температуры вдоль стержня определяется соотношением

$T(x) = T_1 + T_2(x-l)^2$, где x – координата поперечного сечения стержня; одному концу стержня отвечает координата $x=0$, второму $x=l$ (см. рис. 7). Какое количество теплоты уходит в окружающую среду через боковые стенки между точками $x=l/2$ и $x=3l/4$?

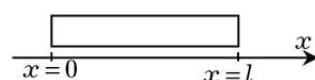


Рис. 7

Указание. Количество тепла q , переносимого в единицу времени через



единицу площади тонкого слоя толщиной Δx , одна поверхность которого имеет температуру t_1 , вторая температуру t_2 , определяется законом $q = \lambda(t_2 - t_1)/\Delta x$, где λ – коэффициент теплопроводности (закон Фурье).

6. Для замены опасных деформаций изгиба деформациями растяжения–сжатия и облегчения веса больших пролётных конструкций пролёты мостов часто делают из относительно лёгких металлических стержней, соединённых системой шарниров. Такая конструкция называется строительной фермой (от лат. *fimus* – прочный). Имеется мостовая ферма пешеходного моста, опирающаяся

слева на неподвижный шарнир 1, справа – на шарнирно-подвижную опору 10 (рис. 8). В узлах 3, 6, 8 к ферме приложены сосредоточенные силы $F_1 = F_2 = F_3 = 20$ кН. Найти силы натяжения стержней 6–9 и 7–10. Весом самой фермы пренебречь. Геометрические параметры фермы даны на рисунке, $l = 1$ м.

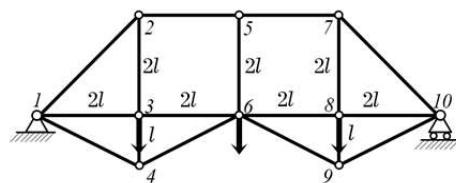


Рис. 8

Разбор заданий

9–10 классы

1. Построение хода лучей в зеркале (вид сверху) выполнено на рис. 9. Пусть школьник (школьник слева от зеркала; справа его изображение) закрыл левый глаз (ЛГ на рисунке). Поскольку его изображение находится в точке ЛГ', чтобы не видеть правым глазом изображение закрытого левого глаза, он должен приkleить бумажку на зеркало так, как это показано на рис. 9. Но как следует из этого рисунка, бумажка лежит и на пути луча, идущего от изображения правого глаза к левому глазу. Поэтому если школьник закроет правый глаз и откроет левый (не меняя положения головы), то он увидит, что бумажка закрывает изображение закрытого правого глаза.

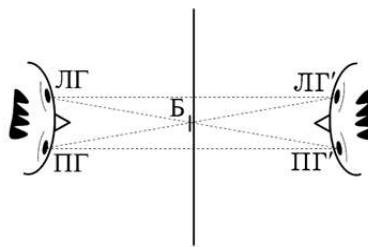


Рис. 9

2. Проще всего решить эту задачу, рассматривая сразу конечное состояние калориметров. С точки зрения содержащего они вернулись к первоначальному состоянию, но температура во втором калориметре уменьшилась от t_2 до t_x . Поэтому второй калориметр потерял энергию $Q = C(t_2 - t_x)$ (где C – теплоёмкость



калориметра вместе с водой, но без тела). Поскольку по условию потерями тепла можно пренебречь, всю эту энергию получил первый калориметр. Поэтому уравнение теплового баланса для двух перекладываний тела (во второй калориметр, а потом назад) даёт

$$C(t_2 - t_x) = (C + C_0)(t_y - t_1),$$

где C_0 – теплоёмкость тела, t_y – исходная температура первого калориметра после возвращения в него тела. Отсюда

$$t_y = t_1 + \frac{(t_2 - t_x)}{1 + \frac{C_0}{C}}. \quad (*)$$

А отношение теплоёмкостей можно найти, рассматривая первый процесс установления равновесия. Для перекладывания тела из первого калориметра во второй получаем из уравнения теплового баланса

$$\begin{aligned} C(t_2 - t_x) &= C_0(t_x - t_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \frac{C_0}{C} &= \frac{t_2 - t_x}{t_x - t_1}. \end{aligned}$$

Подставляя эту формулу в уравнение (*), получим

$$t_y = t_1 + \frac{(t_2 - t_x)(t_x - t_1)}{t_2 - t_1} = 39,9^\circ\text{C}.$$

3. Чтобы подъём груза совершался равномерно, удвоенная сила натяжения верёвки должна равняться силе тяжести груза. Отсюда находим силу натяжения верёвки

$$T = \frac{mg}{2}.$$

Так как ворот вращается равномерно, сумма моментов сил, приложенных к блоку, должна равняться нулю:

$$Tr + F4r - T2r = 0,$$

где F – сила, приложенная к ручке ворота. Отсюда находим

$$F = \frac{T}{4} = \frac{mg}{8}.$$

Найдём теперь скорость поднятия груза. Если ворот вращается с угловой скоростью ω , за время Δt на большой блок ворота наматывается верёвка длиной $\Delta l_1 = 2r\omega\Delta t$, с малого сматывается верёвка длиной $\Delta l_2 = r\omega\Delta t$. Поэтому верёвка, на которой висит подвижный блок, становится короче на величину

$$\Delta l_1 - \Delta l_2 = r\omega\Delta t,$$

а подвижный блок поднимается на половину этой величины:

$$\Delta x = \frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{2} = \frac{r\omega\Delta t}{2},$$

где Δx – величина, на которую поднялся блок (а, следовательно, и груз) за время Δt . Отсюда находим скорость поднятия груза (которая равна скорости поднятия блока)

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{r\omega}{2}.$$

4. При выключении силы F на стержни механизма будут действовать: сила натяжения троса, держащего груз, равная силе тяжести груза, сила реакции стенок и сила трения (собственной силой тяжести стержней пренебрегаем). Поэтому шарнир 3 начнёт двигаться вниз, стержни будут «вставать в распор», будет увеличиваться сила реакции, а за ней и сила трения, и возникнет эффект заклинивания стержней – когда сила трения сильно возрастёт и не даст падать грузу.

Найдём необходимый для заклинивания коэффициент трения. Для этого рассмотрим равновесное положение стержней. Условие моментов относительно ползуна даёт (напоминаем, что силой тяжести стержней мы пренебрегаем)



$$\frac{1}{2}mglsin\alpha = Nlcos\alpha,$$

где N – сила реакции шарнира, которая может быть только горизонтальной (из-за симметрии), l – длина стержня, α – угол между стержнями и направляющими (или стержнем и вертикальными тросами). Отсюда находим

$$N = \frac{1}{2}mg \operatorname{tg} \alpha.$$

С другой стороны, из условия равенства нулю суммы сил, действующих на стержень, заключаем, что такой же будет и сила реакции стеклок механизма, действующих на ползун. С третьей стороны, для покоя стержня сила трения, которая равна половине силе тяжести груза, не должна превосходить своего максимального значения kN , где k – коэффициент трения. Отсюда получаем условие покоя стержня

$$\frac{1}{2}kmg \operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1}{2}mg \Rightarrow k \geq \operatorname{ctg} \alpha.$$

Находя котангенс угла между стержнем и направляющей (через заданные размеры системы), получим

$$k \geq \frac{\sqrt{7}}{3} = 0,88.$$

5. Пусть после начала движения (когда стержни были направлены направо) прошло некоторое время t , которое меньше времени половины оборота правого стержня $t < \pi/2\omega$. Рассмотрим треугольник ABO (рис. 10), где A и B – концы стержней,

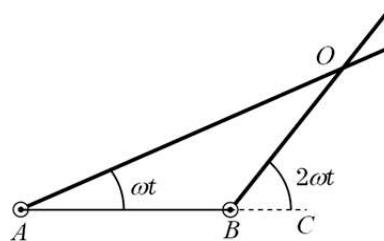


Рис. 10

вокруг которых они вращаются, O – точка пересечения стержней в этот момент. Очевидно, треугольник ABO равнобедренный, $AB=BO$. Действительно, поскольку угол BOC равен $2\omega t$, угол ABO в треугольнике ABO равен $\pi - 2\omega t$. А поскольку угол OAB равен ωt , угол AOB равен

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \pi - \angle OAB - \angle ABO = \\ &= \pi - \omega t - (\pi - 2\omega t) = \omega t. \end{aligned}$$

Таким образом, в треугольнике OAB имеем $\angle AOB = \angle OAB$, и, следовательно, этот треугольник равнобедренный, т. е. $AB=BO$ в любой момент времени. Поэтому расстояние от точки B до точки пересечения стержней остается одинаковым в процессе движения и равным l . Следовательно, точка пересечения стержней движется с постоянной угловой скоростью 2ω по окружности с центром в точке B и радиусом l . Поэтому величина скорости этой точки не меняется в процессе движения и равна

$$v = 2\omega l. \quad (*)$$

А её ускорение является центростремительным и равным

$$a = 4\omega^2 l. \quad (**)$$

Рассмотренное решение становится неверным через время $t > \pi/2\omega$, поскольку стержни перестают пересекаться. Однако через время, за которое правый стержень совершил ещё один оборот (через время $t > 3\pi/2\omega$ после начала движения стержней), стержни снова начнут пересекаться, причём точка их пересечения будет находиться ниже отрезка AB . Рассуждения, аналогичные приведённым выше, показывают, что траекторией точки пересечения стержней будет нижняя половина окружности, а её скорость и ускорение будут такими же. Затем (через время $t > 2\pi/\omega$ после начала



движения стержней) оба стержня будут направлены вправо, а далее движение точки их пересечения повторится.

Таким образом, в течение половины времени, за которое правый стержень совершил два полных оборота (а левый – один), стержни будут пересекаться, в течение второй половины времени – нет. При этом точка их пересечения будет двигаться так: сначала по верхней половинке окружности с центром в точке B и радиусом l ; потом стержни не будут пересекаться; потом – по нижней половинке окружности с центром в точке B и радиусом l . Когда стержни пересекаются, скорость и ускорение точки их пересечения являются постоянными и определяются формулами (*) и (**). Когда стержни не пересекаются, вопрос о скорости и ускорении точки их пересечения является бессмысленным.

6. Искомая цепь показана на рис. 11. Убедимся, что её вольтамперная характеристика будет именно

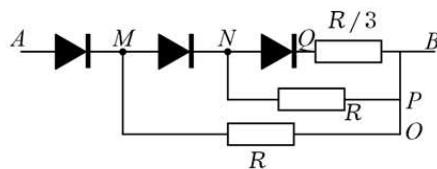


Рис. 11. $R = \frac{U_0}{I_0}$

такой, какой она изображена на рисунке в условии задачи. Если к цепи приложено напряжение, меньшее U_0 , все три диода закрыты, ток в цепи не течёт. Пусть к цепи приложено напряжение U , которое превосходит U_0 (но не превосходит $2U_0$). Тогда, очевидно, открывается диод AM , а остальные диоды по-прежнему за-

крыты. Тогда ток течёт через диод AM и резистор MO , причём согласно вольтамперной характеристике диода напряжение на диоде равно U_0 , а ток может быть любым. Поэтому напряжение на резисторе равно $U - U_0$, а ток согласно закону Ома равен

$$I_{MO} = \frac{U - U_0}{R_{MO}},$$

где R_{MO} – сопротивление резистора MO . Поэтому сопротивление этого резистора нужно взять равным

$$R_{MO} = \frac{U_0}{I_0}.$$

Если к цепи приложено напряжение U , которое превосходит $2U_0$ (но не превосходит $3U_0$), то открывается второй диод MN и ток течёт через диоды AM , MN и резисторы MO и NP . При этом согласно вольтамперной характеристике напряжение на диодах равно U_0 , токи определяются токами через резисторы, которые согласно закону Ома равны

$$I_{MO} = \frac{U - U_0}{R_{MO}}, \quad I_{NP} = \frac{U - 2U_0}{R_{NP}}.$$

Отсюда находим, что суммарный ток в цепи при $U = 2U_0$ равен

$$I = I_{MO} + I_{NP} = \frac{2U_0}{R_{MO}} + \frac{U_0}{R_{NP}}.$$

А поскольку согласно вольтамперной характеристике цепи этот ток втройне превышает ток $I_0 = U_0 / R_{MO}$, заключаем, что сопротивление резистора NP равно сопротивлению резистора MO :

$$R_{NP} = R_{MO} = \frac{U_0}{I_0}.$$

Если к цепи приложено напряжение U , которое превосходит $3U_0$, открывается последний диод и ток течёт через все резисторы. А по-



скольку напряжения на диодах равны U_0 , легко найти напряжение на каждом резисторе, а потом по закону Ома – токи

$$I_{MO} = \frac{U - U_0}{R_{MO}}, \quad I_{NP} = \frac{U - 2U_0}{R_{NP}},$$

$$I_{QB} = \frac{U - 3U_0}{R_{QB}}.$$

Поэтому из вольтамперной характеристики цепи получаем

$$8I_0 = \frac{3U_0}{R_{MO}} + \frac{2U_0}{R_{MO}} + \frac{U_0}{R_{QB}} = 5I_0 + \frac{U_0}{R_{QB}}.$$

Отсюда находим, что

$$R_{QB} = \frac{U_0}{3I_0} = \frac{R_{MO}}{3}.$$

11 класс

1. Задача 2 из задания для 9–10 классов.

2. Асфальт будет казаться мокрым, если падающие на него лучи будут отражаться, как от зеркала. А такое возможно, если лучи будут отражаться не от поверхности асфальта (которая, конечно, гладкой не является), а от горячего воздуха благодаря полному внутреннему отражению.

Действительно, под солнечными лучами асфальт разогревается до очень высоких температур (60°C , как сказано в условии). От асфальта нагревается воздух, в результате около поверхности асфальта формируется слой воздуха с сильно меняющейся температурой (и соответственно показателем преломления), причём, как это следует из данной в условии формулы, самый маленький показатель преломления – около поверхности асфальта. Найдём угол полного внутреннего отражения от слоя неравномерно нагретого воздуха.

Разобьём воздух на тонкие слои, показатель преломления каждого из которых можно считать постоянным (рис. 12). Пусть на верхний слой под углом α_0 падает луч. Тогда закон преломления на первой границе дает

$$n_0 \sin \alpha_0 = n_1 \sin \alpha_1,$$

где $n_0 = n(T_{\text{возд}})$ – показатель преломления воздуха вдали от асфальта, n_1 и α_1 – показатель преломления и угол движения луча во втором слое. На вторую границу луч падает под углом α_1 . Поэтому $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$, и так далее (см. рис. 12).

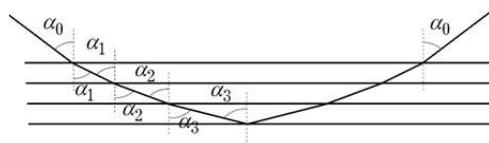


Рис. 12

Если в каком-нибудь слое угол преломления окажется равным 90° , луч не сможет пройти в следующие слои, а испытает полное внутреннее отражение. То есть луч повернёт назад, повторит путь падающего луча и выйдет под тем же самым углом α_0 . Или, другими словами, отразится от области с переменным показателем преломления, как от зеркала. Таким образом, луч испытывает полное внутреннее отражение от нагретой области, если в каком-либо слое около асфальта угол преломления окажется равным 90° . Поскольку $\sin 90^{\circ} = 1$, полное внутреннее отражение произойдёт, если

$$n(T_{\text{возд}}) \sin \alpha_0 < n(T_{\text{асф}}),$$



где $n(T_{\text{возд}})$ – показатель преломления воздуха вдали от асфальта (т.е. воздуха с температурой $T_{\text{возд}}$), $n(T_{\text{асф}})$ – показатель преломления воздуха около асфальта (т.е. воздуха с температурой $T_{\text{асф}}$). Или

$$\sin \alpha_0 < \frac{n(T_{\text{асф}})}{n(T_{\text{возд}})}. \quad (*)$$

Человек увидит асфальт «мокрым» на таком расстоянии l от себя, луч от которого будет распространяться в направлении человека под углом α_0 или меньше. Поэтому асфальт будет казаться мокрым на расстоянии

$$\frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}} < \frac{n(T_{\text{асф}})}{n(T_{\text{возд}})},$$

где h – рост человека. Отсюда

$$l > \frac{h}{\sqrt{1 - \left(\frac{n(T_{\text{асф}})}{n(T_{\text{возд}})} \right)^2}}.$$

Используя далее данную в условии задачи формулу, значения

$$T_{\text{возд}} = 30^\circ\text{C} = 303\text{ K}, \\ T_{\text{асф}} = 60^\circ\text{C} = 333\text{ K}, \quad h = 2\text{ м},$$

найдём, что $l > 300\text{ м}$, что согласуется с «бытовыми» наблюдениями и, в частности, с данной в условии задачи фотографией.

3. Задача 5 из задания для 9–10 классов.

4. Вектор индукции результирующего магнитного поля будет векторной суммой векторов, созданных каждым соленоидом. Поскольку соленоид создает магнитное поле, направленное вдоль своей оси, поле соленоидов 1 и 3 (см. рис. 13) будет направлено горизонтально, а поле соленоидов 2 и 4 – вертикально.

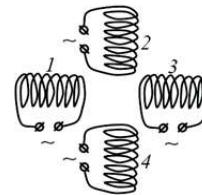


Рис. 13

Далее идём от результата. Если вектор результирующего поля вращается с постоянной угловой скоростью Ω , то его проекция на направление соленоидов 1 и 3 будет описываться соотношением

$$B_{1-3} = B \cos \Omega t,$$

на направление соленоидов 2 и 4 – соотношением

$$B_{2-4} = B \sin \Omega t,$$

где B – модуль индукции результирующего поля.

Отсюда заключаем, что ток в соленоиде 3 должен быть сдвинут по фазе на угол π по сравнению с током в соленоиде 1 (тогда поле соленоидов 1 и 3 будет зависеть от времени как $B_{1-3} = 2B_0 \cos \omega t$, B_0 – поле одного соленоида), ток в соленоиде 2 – на угол $\pi/2$, а ток в соленоиде 4 – на угол $3\pi/2$ по сравнению с током в соленоиде 1. Тогда вектор индукции магнитного поля в области между соленоидами будет вращаться по часовой стрелке с угловой скоростью ω .

5. Очевидно, поток тепла по стержню распространяется в положительном направлении оси x . Действительно, температура левого конца стержня ($x=0$) равна $T_1 + T_2$, правого ($x=l$) – T_1 . Поскольку температура левого конца больше температуры правого, поток тепла идет слева направо.



Далее, из закона Фурье легко найти поток тепла, проходящего через каждое сечение стержня. Действительно, количество теплоты, проходящее через сечение стержня в единицу времени, определяется соотношением

$$\begin{aligned} Q(x) &= q(x)S = \lambda \frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} S = \\ &= \lambda S T'(x), \end{aligned}$$

где S – площадь поперечного сечения стержня, $T'(x)$ – производная температуры стержня как функции координаты x рассматриваемого сечения.

Найдём теперь количество теплоты, уходящее через боковую поверхность стержня. Для этого рассмотрим узкий слой стержня толщиной Δx (рис. 14). Очевидно, поток тепла

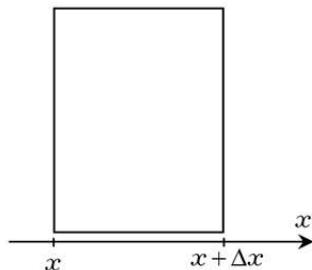


Рис. 14

через боковую поверхность слоя равен разности потоков тепла, входящего через левое основание слоя и выходящего через правое. Поэтому количество теплоты, проходящей через боковую поверхность рассматриваемого слоя, равно

$$\begin{aligned} \Delta W &= Q(x + \Delta x) - Q(x) = \\ &= \lambda S T'(x + \Delta x) - \lambda S T'(x) = \\ &= \lambda S \Delta x \frac{T'(x + \Delta x) - T'(x)}{\Delta x} = \\ &= \lambda S \Delta x T''(x), \end{aligned}$$

где $T''(x)$ – вторая производная температуры по координате. Учитывая, что $S = \pi R^2$, а площадь боковой поверхности рассматриваемого элемента равна $\Delta S = 2\pi R \Delta x$, найдём количество теплоты, уходящее через единицу площади боковой поверхности стержня:

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{\lambda R T''(x)}{2}.$$

Вычисляя вторую производную температуры по координате, найдём, что поток через боковую поверхность не зависит от x и равен

$$w = \frac{\lambda R T_2}{l^2}.$$

Поэтому полный поток тепла через боковую поверхность между точками с координатами $x = l/2$ и $x = 3l/4$ равен произведению величины w на площадь боковой поверхности стержня между этими точками:

$$W = w S_1 = w 2\pi R l / 4 = \frac{\pi R^2 \lambda T_2}{2l}.$$

Количество теплоты, уходящее в окружающую среду в единицу времени через боковые стенки между точками $x = l/2$ и $x = 3l/4$, можно было получить и другим способом как разность потоков тепла через сечения стержня при $x = l/2$ и $x = 3l/4$:

$$W = Q(x = 3l/4) - Q(x = l/2).$$

Естественно, при этом способе решения получается тот же ответ.

6. Из-за симметрии задачи силы реакции в опорах 1 и 10 равны $N_{1,10} = 3F/2$ в каждой. Найдём силу натяжения стержня 6–9. Для этого мысленно «рассечём» ферму по стержням 5–7, 6–8 и 6–9. В этом сечении действуют силы натяжения \vec{F}_{5-7} , \vec{F}_{6-8} и \vec{F}_{6-9} (см. рис. 15; если в резуль-



тате вычислений какая-то из сил получится отрицательной, это будет означать другое направление по сравнению с тем, что показано на рисунке). Запишем теперь условие равновесия части фермы 7–8–9–10. Геометрически очевидно, что расстояние A –7 равно $6l$ (где A – точка пересечения прямых, вдоль которых действуют силы \vec{F}_{5-7} и \vec{F}_{6-9} , которые в свою очередь направлены вдоль соответствующих стержней; см. рис. 15). Поэтому уравнение моментов относительно точки A даёт

$$\begin{aligned} F_{6-8} \cdot 2l + F \cdot 6l - N_{10} \cdot 8l &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{6-8} &= 3F. \end{aligned}$$

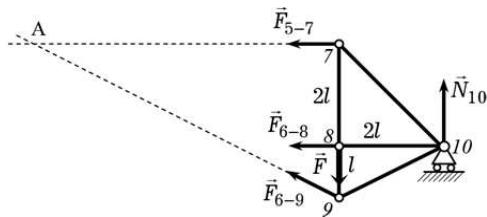


Рис. 15

Сила F_{6-8} оказалась положительной, это означает, что её направление было на рисунке выбрано верно, а стержень 6–8 является растянутым.

Аналогичное уравнение относительно точки B (см. рис. 16) позволяет найти силу F_{5-7} :

$$\begin{aligned} F_{5-7} \cdot 2l - F \cdot 2l + N_{10} \cdot 4l &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{5-7} &= -2F. \end{aligned}$$

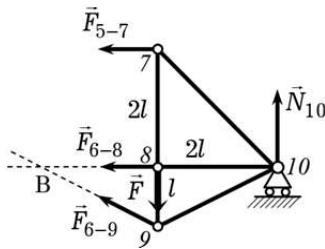


Рис. 16

Сила F_{5-7} оказалась отрицательной, это значит, что она направлена по-другому по сравнению с рисунком. Стержень 5–7 сжат.

Теперь из условия равенства нулю проекции сил на горизонтальное направление получаем

$$F_{6-9} = -\frac{\sqrt{5}F}{2}.$$

Таким образом, стержень 6–9 оказывается сжатым, его сила натяжения равна

$$|F_{6-9}| = \frac{\sqrt{5}F}{2} = 22,3 \text{ кН.}$$

Очевидно, такой же является и сила натяжения симметричного стержня 4–6.

Силу натяжения стержня 1–2 (которая равна силе натяжения стержня 7–10) можно найти из следующих соображений. Из условия равновесия шарнира 4 (уравнение сил для шарнира 4 в проекции на горизонтальное направление) находим, что сила натяжения стержня 1–4 такая же, как и стержня 4–6, и стержень 1–4 оказывается сжатым:

$$|F_{1-4}| = \frac{\sqrt{5}F}{2} = 22,3 \text{ кН.}$$

Рассматривая теперь условие равновесия шарнира 1 (уравнение сил в проекциях на вертикальное направление), найдём, что стержень 1–2 сжат и его сила натяжения равна

$$|F_{1-2}| = |F_{7-10}| = 2\sqrt{2}F = 56,6 \text{ кН.}$$