

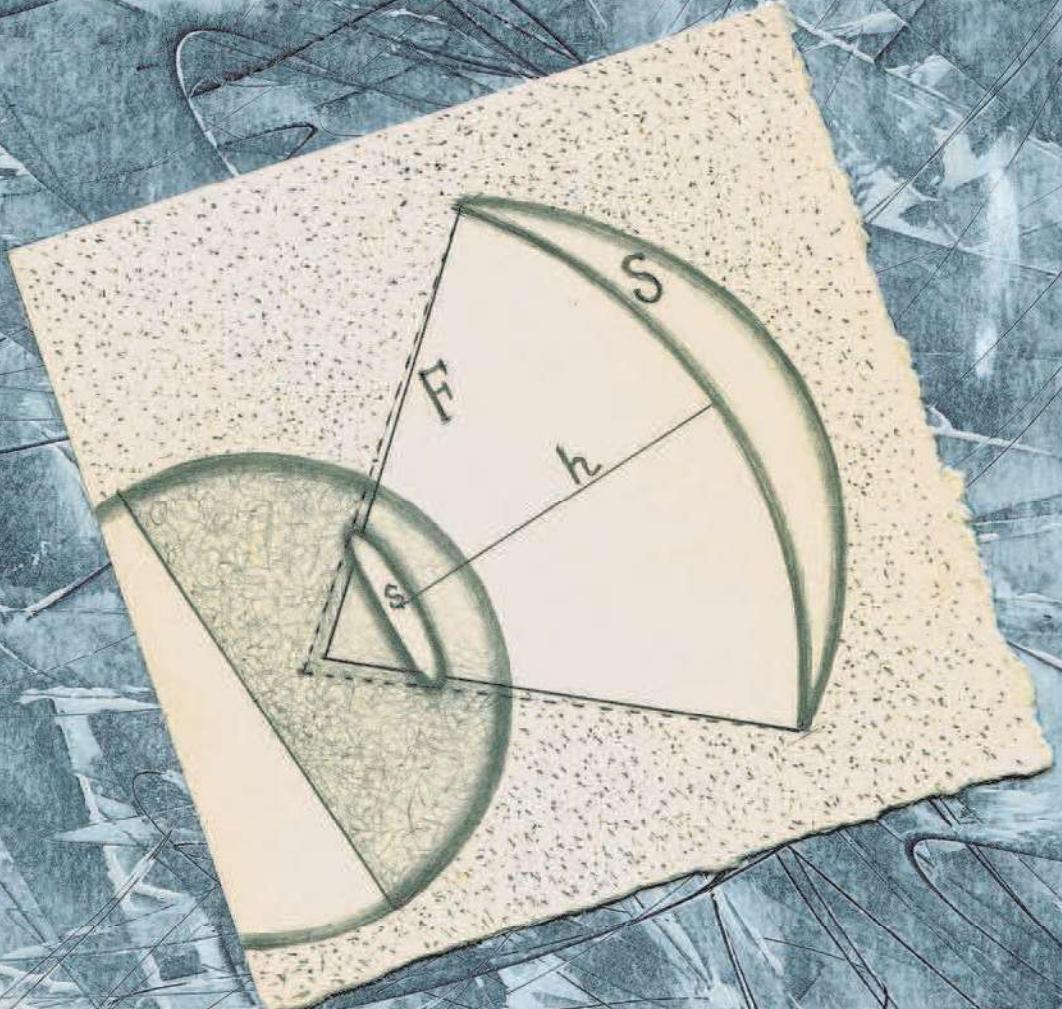
АПРЕЛЬ

ISSN 0130-2221

2018 · № 4

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru) и [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru) соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2506 предлагалась на XXXIX Турнире городов, задачи M2507–M2509 предлагались на X Международной олимпиаде *Romanian Master in Mathematics*.

Задачи Ф2513 – Ф2516 предлагались на Инженерной олимпиаде школьников 2017/18 учебного года. Автор этих задач – С.Муравьев.

### Задачи M2506–M2509, Ф2513–Ф2516

**M2506.** а) Даны три натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных двух. Наименьшее общее кратное каждого двух из данных чисел делится на оставшееся третье. Обязательно ли все три числа равны?

б) Даны четыре натуральных числа. Каждое из данных чисел делится на наибольший общий делитель остальных трех. Наименьшее общее кратное каждого трех из данных чисел делится на оставшееся четвертое. Докажите, что произведение данных чисел – точный квадрат.

Б. Френкин

**M2507.** Пусть  $ABCD$  – вписанный четырехугольник, а точка  $P$  лежит на стороне  $AB$  (рис.1). Диагональ  $AC$  пересекает отрезок  $DP$  в точке  $Q$ . Прямая, проходящая через  $P$  параллельно  $CD$ , пересекает продолжение стороны  $CB$  за точку  $B$  в точке  $K$ , а прямая, проходящая через  $Q$  параллельно  $BD$ , пересекает продолжение стороны  $CB$  за точку  $B$  в точке  $L$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $BKP$  и  $CLQ$  касаются.

А. Кузнецов

**M2508\*.** Существуют ли два непостоянных многочлена  $P(x)$  и  $Q(x)$  с вещественными коэффициентами такие, что  $(P(x))^{10} + (P(x))^9 = (Q(x))^{21} + (Q(x))^{20}$ ?

И. Богданов

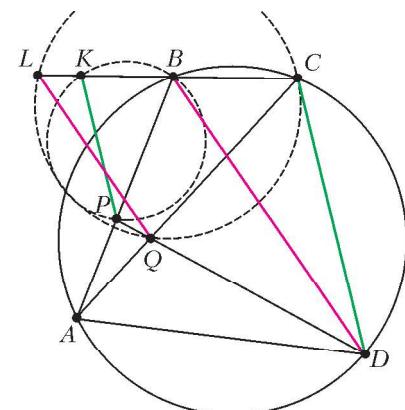


Рис. 1

ственными коэффициентами такие, что  $(P(x))^{10} + (P(x))^9 = (Q(x))^{21} + (Q(x))^{20}$ ?

**M2509\*.** Анна и Боб играют в игру на бесконечной клетчатой сетке (сторона клетки равна 1), делая ходы по очереди. Анна ходит первой. Ход состоит в том, чтобы ориентировать один из ранее не ориентированных единичных отрезков сетки. Если в какой-то момент некоторые ориентированные отрезки образуют ориентированный цикл, то выигрывает Боб. Верно ли, что у Боба есть стратегия, гарантирующая ему победу?

М. Дидин

**Ф2513.** Два очень длинных стержня вращаются с постоянными угловыми скоростями  $\omega$  и  $2\omega$  вокруг параллельных осей, проходящих через их концы  $A$  и  $B$  (рис.2).

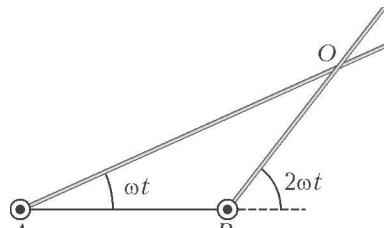


Рис. 2

Расстояние между осями  $l$ , в начальный момент оба стержня направлены направо. По какой траектории движется точка пересечения стержней  $O$ ? Найдите скорость и ускорение этой точки через время  $t = \pi/(6\omega)$  после начала движения. Ответ обоснуйте.

**Ф2514.** При проектировании подъемных машин используются механизмы, делающие невозможным обратное движение грузов при отключении их двигателей (самотормозящие). На рисунке 3 показана одна из возможных конструкций такого механизма. Этот механизм состоит из двух ползунов 1, совершающих скользящее движение по направляющим 4 и соединенных шарнирно с двумя стержнями 2, которые между собой соединены шарниром 3. Стержни подпружинены легкой пружиной, обеспечивающей прижимание ползунов к направляющим. Объясните принцип торможения механизма при «выключении» силы  $\vec{F}$ . При каком коэффициенте трения между ползунами и направляющими механизм будет самотормозящим? Длина стержней  $l$ , расстояние между направляющими  $3l/2$ .



Рис. 3

**Ф2515.** По круглому стержню длиной  $l$  и радиусом  $r$  распространяется постоянный (т.е. не зависящий от времени) тепловой

поток. Распределение температуры вдоль стержня определяется соотношением  $T(x) = T_1 + T_2 (x - l)^2/l^2$ , где  $x$  – координата поперечного сечения стержня; одному концу стержня отвечает координата  $x = 0$ , второму – координата  $x = l$  (рис.4),



Рис. 4

параметры  $T_1$  и  $T_2$  – положительны. Какое количество теплоты уходит в окружающую среду через боковые стенки между точками  $x = l/2$  и  $x = 3l/4$ ?

**Указание.** Количество теплоты  $q$ , переносимое в единицу времени через единицу площади тонкого слоя толщиной  $\Delta x$ , одна поверхность которого имеет температуру  $t_1$ , вторая –  $t_2$ , определяется законом  $q = \lambda(t_2 - t_1)/\Delta x$ , где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности (закон Фурье).

**Ф2516.** На рисунке 5,а показана вольт-амперная характеристика (зависимость тока от напряжения) неидеального диода

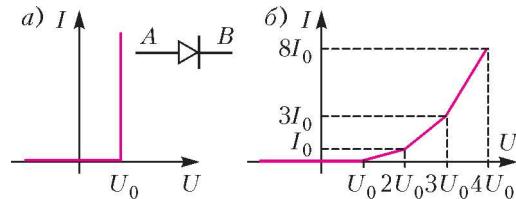


Рис. 5

и его обозначение на электрических схемах. Используя неидеальные диоды, резисторы и провода, постройте такую электрическую цепь, вольт-амперная характеристика которой показана на рисунке 5,б.

### Решения задач М2494<sup>1</sup> – М2497, Ф2501–Ф2504

**М2494.** Доска  $20 \times 20$  покрашена в два цвета: нечетные столбцы покрашены в черный цвет, четные – в белый. На всех черных клетках стоит по одному шахматному королю. Каждым ходом один из

<sup>1</sup> Решение задачи М2493 будет опубликовано позже.