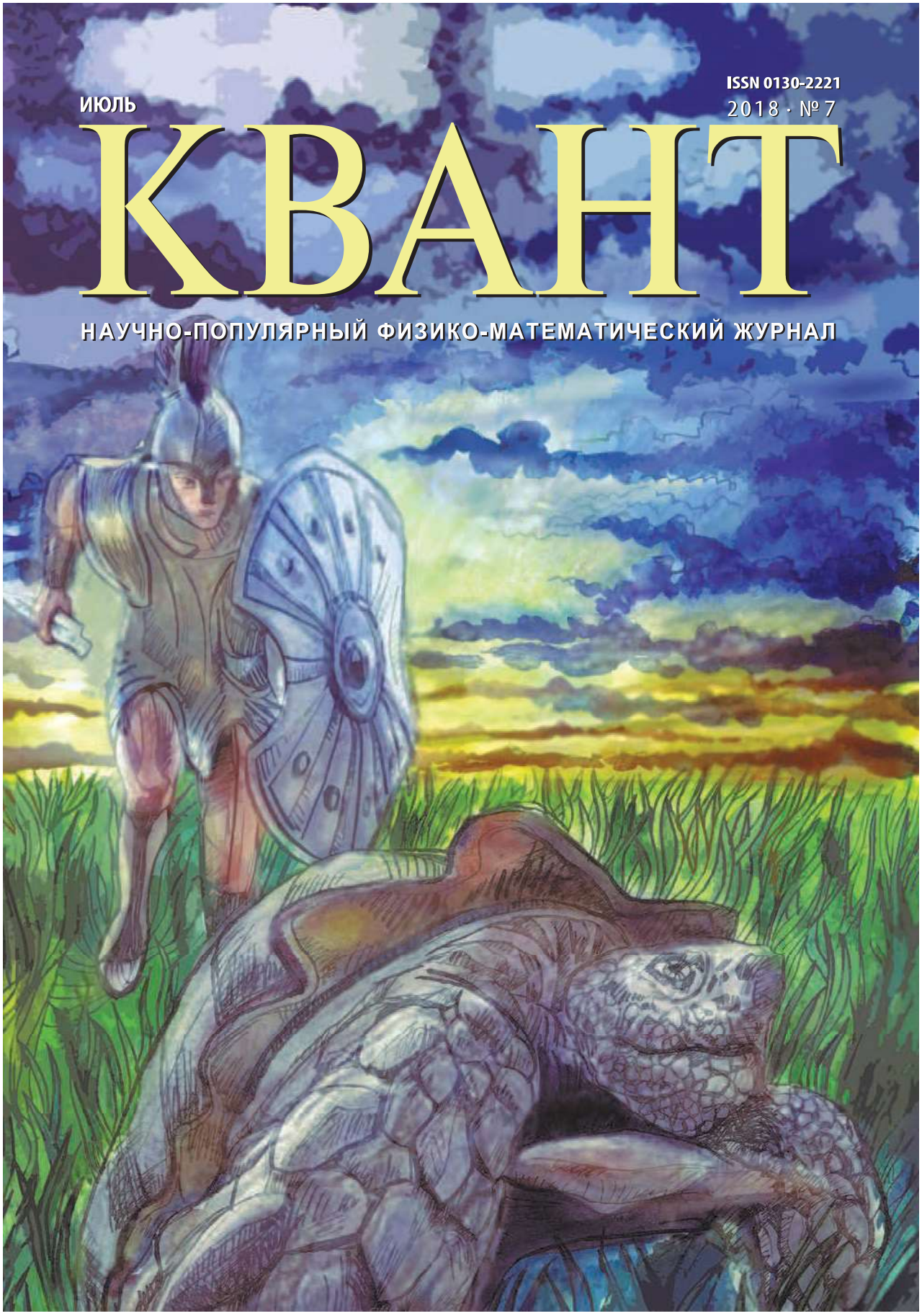
ISSN 0130-2221
2018 · № 7

ИЮЛЬ

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



нашего разбиения. Тогда Анна ориентирует отрезок $t$ таким образом, чтобы либо обе стрелки на отрезках $s$ и $t$ входили в вершину уголка, либо обе выходили из вершины уголка (примеры показаны на рис.2). Заметим, что после каждого хода Анны любой уголок нашего разбиения либо состоит из двух уже ориентированных отрезков, либо из двух еще не ориентированных. Это означает, что Анна всегда сможет сделать свой ход по указанной выше стратегии.

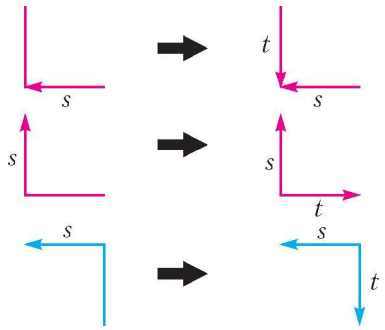


Рис. 2

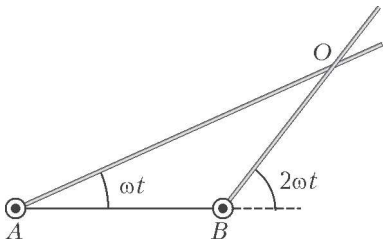
Предположим, что на некотором шаге Боб все-таки выиграл, т.е. появился ориентированный цикл $C$. Найдем самую левую из вертикальных линий сетки, на которой есть узлы цикла $C$, и среди этих узлов выберем самый нижний. Обозначим этот узел через $X$, т.е. $X$ – «самый нижний из самых левых». Аналогично определим «самый верхний среди самых правых» узлов цикла $C$. Если $X$ лежит строго левее средней линии, то $X$ – вершина некоторого ЛН-уголка, у которого оба отрезка ориентированы. По определению узла $X$, оба эти отрезка входят в цикл $C$. Но, согласно стратегии Анны, эти отрезки ориентированы таким образом, что они не могут быть в ориентированном цикле.

Иначе, узел $Y$ лежит строго правее средней линии, и аналогичные рассуждения для узла $Y$ приводят к противоречию. Таким образом, Боб никогда не выиграет. Задача решена.

Более простой вариант этой задачи получится, если Боб ходим первым. В этом случае достаточно использовать *парную стратегию* для разбиения решетки только на ЛН-уголки.

*И.Богданов, М.Дидин*

**Ф2513.**[1] *Два очень длинных стержня вращаются с постоянными угловыми скоростями $\omega$ и $2\omega$ вокруг параллельных осей, проходящих через их концы $A$ и $B$ (см. рисунок). Расстояние между осями $l$, в начальный момент оба стержня направлены направо. По какой траектории движется точка пересечения стержней $O$? Найдите скорость и ускорение этой точки через время $t = \pi/(6\omega)$ после начала движения. Ответ обоснуйте.*




Пусть после начала движения (когда стержни были направлены направо) прошло некоторое время $t$, которое меньше времени половины оборота правого стержня, т.е. $t < \pi/(2\omega)$. Рассмотрим треугольник $ABO$, где $A$ и $B$ – концы стержней, вокруг которых они вращаются, $O$ – точка пересечения стержней в этот момент. Очевидно, этот треугольник равнобедренный, в котором $AB = BO$. Действительно, поскольку угол $ABO$ равен $\pi - 2\omega t$ и угол $OAB$ равен $\omega t$, то угол $AOB$ равен $\pi - \omega t - (\pi - 2\omega t) = \omega t$. Таким образом, в треугольнике $OAB$ равны углы $AOB$ и $OAB$, а следовательно, этот треугольник равнобедренный, в котором $AB = BO$ в любой момент времени. Так что расстояние от точки $B$ до точки пересечения стержней $O$ остается одинаковым в процессе движения и равным $l$. Следовательно, точка пересечения стержней движется с постоянной угловой скоростью $2\omega$ по окружности с центром в точке $B$ и радиу-

[1] Автор решений задач Ф2513–Ф2516 – С.Муравьев.

сом $l$. Поэтому величина скорости этой точки не меняется в процессе движения и равна

$$v = 2\omega l\ ,$$

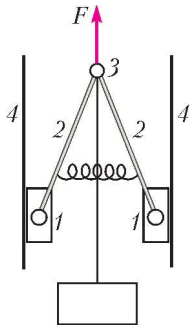
а ее ускорение является центростремительным и равным

$$a = 4\omega^2 l\ .$$

Рассмотренное решение становится неверным через время $t > \pi/(2\omega)$, поскольку стержни перестают пересекаться. Однако через время, за которое правый стержень совершит еще один оборот, т.е. через время $t > 3\pi/(2\omega)$ после начала движения стержней, стержни снова начнут пересекаться, причем точка их пересечения будет находиться ниже отрезка $AB$. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что траекторией точки пересечения стержней будет нижняя половинка окружности, а ее скорость и ускорение по величине будут такими же. Затем, через время $t > 2\pi/\omega$ после начала движения стержней, оба стержня станут направлены вправо, а далее движение точки их пересечения повторится.

Таким образом, в течение половины времени, за которое правый стержень совершит два полных оборота (а левый – один), стержни будут пересекаться, а в течение второй половины времени – нет. При этом точка их пересечения будет двигаться так: сначала по верхней половинке окружности с центром в точке $B$ и радиусом $l$; потом стержни не будут пересекаться; затем – по нижней половинке окружности с центром в точке $B$ и радиусом $l$. Когда стержни пересекаются, скорость и ускорение точки их пересечения являются постоянными и определяются приведенными выше формулами. Когда стержни не пересекаются, вопрос о скорости и ускорении точки их пересечения является бессмысленным.

**Ф2514.** *При проектировании подъемных машин используются механизмы, делающие невозможным обратное движение грузов при отключении их двигателей (самотормозящие). На рисунке показана одна из возможных конструкций такого механизма. Этот механизм состоит из двух ползунов 1, совершающих скользящее движение по направляющим 4 и соединенных шарнирно с двумя стержнями 2, которые между собой соединены шарниром 3. Стержни подпружинены легкой пружиной, обеспечивающей прижимание ползунов к направляющим. Объясните принцип торможения механизма при «выключении» силы $\vec{F}$. При каком коэффициенте трения между ползунами и направляющими механизм будет самотормозящим? Длина стержней $l$, расстояние между направляющими $3l/2$.*




При «выключении» силы $\vec{F}$ на стержни механизма будут действовать сила натяжения троса, держащего груз, равная силе тяжести груза, силы реакции стенок и силы трения (силой тяжести стержней и силой упругости пружины пренебрегаем). Поэтому шарнир *3* начнет двигаться вниз, стержни будут «вставать в распор», будет увеличиваться сила реакции, а за ней и сила трения, и возникнет эффект заклинивания стержней – когда сила трения сильно возрастет и не даст грузу падать.

Найдем необходимый для заклинивания коэффициент трения. Для этого рассмотрим равновесное положение одного из стержней. Условие равенства моментов относительно ползуна дает (напоминаем, что силой тяжести стержней и силой упругости пружины пренебрегаем)

$$\frac{1}{2}mgl\sin\alpha = Nl\cos\alpha\ ,$$

где $N$ – сила реакции шарнира, которая может быть только горизонтальной (из-за симметрии), $\alpha$ – угол между стержнями и направляющими (или стержнем и вертикальным тросом). Отсюда находим

$$N = \frac{1}{2}mg\,\mathrm{tg}\,\alpha\ .$$

С другой стороны, из условия равенства нулю суммы сил, действующих на стержень, заключаем, что такой же будет и сила реакции стенки механизма, действу-

ющая на ползун. С третьей стороны, для покоя стержня сила трения, которая равна половине силе тяжести груза, не должна превосходить своего максимального значения $\mu N$, где $\mu$ – коэффициент трения. Отсюда получаем

$$\frac{1}{2}\mu mg\,\mathrm{tg}\,\alpha \ge \frac{1}{2}mg\,,\ \text{и}\ \ \mu \ge \mathrm{ctg}\,\alpha\,.$$

Определив котангенс угла между стержнем и направляющей через заданные размеры системы, найдем

$$\mu \ge \frac{\sqrt{7}}{3} = 0{,}88\,.$$

**Ф2515.** *По круглому стержню длиной $l$ и радиусом $r$ распространяется постоянный (т.е. не зависящий от времени) тепловой поток. Распределение температуры вдоль стержня определяется соотношением $T(x) = T_1 + T_2(x-l)^2/l^2$, где $x$ – координата поперечного сечения стержня; одному концу стержня отвечает координата $x = 0$, второму – координата $x = l$ (см. рисунок), параметры $T_1$ и $T_2$ – положительны. Какое количество теплоты уходит в окружающую среду через боковые стенки между точками $x = l/2$ и $x = 3l/4$? Указание. Количество теплоты $q$, переносимое в единицу времени через единицу площади тонкого слоя толщиной $\Delta x$, одна поверхность которого имеет температуру $t_1$, вторая $t_2$, определяется законом $q = \lambda(t_2 - t_1)/\Delta x$, где $\lambda$ – коэффициент теплопроводности (закон Фурье).*

Очевидно, поток тепла по стержню распространяется в положительном направлении оси $x$. Действительно, температура левого конца стержня ($x = 0$) равна $T_1 + T_2$, температура правого ($x = l$) равна $T_1$. Поскольку температура левого конца больше температуры правого, поток тепла идет слева направо.

Далее. Из закона Фурье легко найти поток тепла, проходящего через каждое сечение стержня. Количество теплоты, проходящее через сечение стержня в единицу времени, определяется соотношением

$$Q(x) = q(x)S = \lambda\frac{T(x+\Delta x) - T(x)}{\Delta x}S = \lambda S T'(x)\,,$$

где $S$ – площадь поперечного сечения стержня, $T'(x)$ – производная температуры стержня как функции координаты $x$ рассматриваемого сечения.

Найдем теперь количество теплоты, уходящее через боковую поверхность стержня. Для этого рассмотрим узкий слой стержня толщиной $\Delta x$. Очевидно, поток тепла через боковую поверхность слоя равен разности потоков тепла, входящего через левое основание слоя и выходящего через правое. Поэтому количество теплоты, проходящее через боковую поверхность рассматриваемого слоя, равно

$$\Delta W = Q(x+\Delta x) - Q(x) = \lambda S T'(x+\Delta x) - \lambda S T'(x) =$$

$$= \lambda S \Delta x\frac{T'(x+\Delta x) - T'(x)}{\Delta x} = \lambda S \Delta x T''(x)\,,$$

где $T''(x)$ – вторая производная температуры по координате. Учитывая, что $S = \pi r^2$, а площадь боковой поверхности рассматриваемого элемента $\Delta S = 2\pi r\Delta x$, найдем количество теплоты, уходящее через единицу площади боковой поверхности стержня:

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{\lambda r T''(x)}{2}\,.$$

Находя вторую производную температуры по координате, получим, что поток через боковую поверхность не зависит от $x$ и равен

$$w = \frac{\lambda r T_2}{l^2}\,.$$

Поэтому полное количество теплоты, уходящее через боковую поверхность между точками с координатами $x = l/2$ и $x = 3l/4$, равно произведению величины $w$ на площадь боковой поверхности стержня между этими точками:

$$W = wS_1 = w\cdot 2\pi r\frac{l}{4} = \frac{\lambda\pi r^2 T_2}{2l}\,.$$

Искомое количество теплоты можно было получить и другим способом – как разность потоков тепла через сечения стержня при $x = l/2$ и $x = 3l/4$: $W = Q(x = 3l/4) - Q(x = l/2)$. Естественно, при этом способе решения получается тот же ответ, что и выше.

**Ф2516.** *На рисунке 1,а показана вольт-амперная характеристика (зависимость тока от напряжения) неидеального диода и его обозначение на электрических схемах. Используя неидеальные диоды, резисторы и провода, постройте такую электрическую цепь, вольт-амперная характеристика которой показана на рисунке 1,б.*

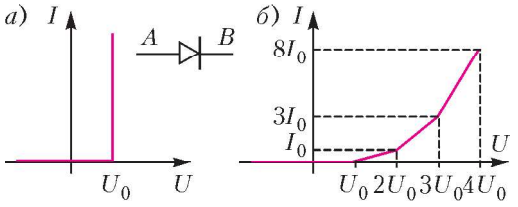


Рис. 1

Искомая цепь изображена на рисунке 2. Убедимся, что ее вольт-амперная характеристика, будет именно такой, как задано в условии.

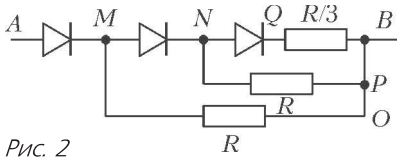


Рис. 2

Если к цепи приложено напряжение меньше $U_0$, все три диода закрыты, ток в цепи не течет. Пусть к цепи приложено напряжение $U$, которое превосходит $U_0$, но не превосходит $2U_0$. Тогда, очевидно, открывается диод $AM$, а остальные диоды будут по-прежнему закрыты. Ток течет через диод $AM$ и резистор $MO$, причем, согласно вольт-амперной характеристике диода, напряжение на диоде равно $U_0$, а ток может быть любым. Поэтому напряжение на резисторе равно $U - U_0$, а ток, согласно закону Ома, равен

$$I_{MO} = \frac{U - U_0}{R_{MO}},$$

где $R_{MO}$ – сопротивление резистора $MO$.

Значит, сопротивление этого резистора нужно взять равным

$$R_{MO} = \frac{U_0}{I_0}.$$

Если к цепи приложено напряжение $U$, которое превосходит $2U_0$, но не превосходит $3U_0$, то открывается второй диод $MN$ и ток течет через диоды $AM$, $MN$ и резисторы $MO$, $NP$. При этом, согласно вольт-амперной характеристике, напряжение на диодах равно $U_0$, токи определяются токами через резисторы, которые, согласно закону Ома, равны

$$I_{MO} = \frac{U - U_0}{R_{MO}}, \quad I_{NP} = \frac{U - 2U_0}{R_{NP}}.$$

Отсюда находим, что суммарный ток в цепи при $U = 2U_0$ равен

$$I = I_{MO} + I_{NP} = \frac{2U_0}{R_{MO}} + \frac{U_0}{R_{NP}}.$$

А поскольку, согласно вольт-амперной характеристике, этот ток втрое превышает ток $I_0 = U_0/R_{MO}$, заключаем, что сопротивление резистора $NP$ равно сопротивлению резистора $MO$:

$$R_{NP} = R_{MO} = \frac{U_0}{I_0}.$$

Если к цепи приложено напряжение $U$, которое превосходит $3U_0$, открывается последний диод и ток течет через все резисторы. А поскольку напряжения на диодах равны $U_0$, легко найти напряжение на каждом резисторе, а потом – и токи:

$$I_{MO} = \frac{U - U_0}{R_{MO}}, \quad I_{NP} = \frac{U - 2U_0}{R_{NP}},$$

$$I_{QB} = \frac{U - 3U_0}{R_{QB}}.$$

Теперь из вольт-амперной характеристики цепи получаем

$$8I_0 = \frac{3U_0}{R_{MO}} + \frac{2U_0}{R_{MO}} + \frac{U_0}{R_{QB}} = 5I_0 + \frac{U_0}{R_{QB}},$$

откуда находим

$$R_{QB} = \frac{U_0}{3I_0} = \frac{R_{MO}}{3}.$$