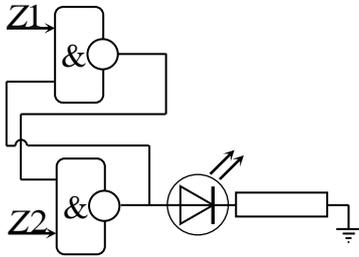


Решения и критерии оценивания
Задач заключительного тура
Инженерной олимпиады школьников, 2019-2020 учебный год

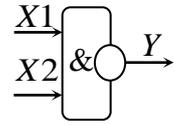
Задание 11 класса

1. На входы логического элемента 2И-НЕ (правый рисунок)

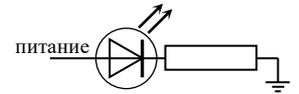


могут быть поданы либо напряжение питания – несколько вольт (логическая единица: $X1, X2 = 1$),

$X1$	$X2$	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

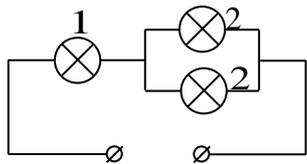
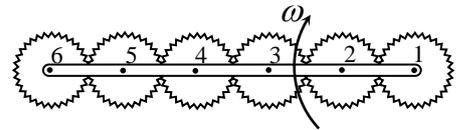


или нулевое напряжение (логический ноль: $X1, X2 = 0$). Напряжение на выходе ($Y = 1$ либо $Y = 0$ - в зависимости от $X1, X2$) определяется таблицей. Светодиод



загорается, если он подключен так, как показано на рисунке внизу справа. Два логических устройства 2И-НЕ включают в электрическую цепь (левый рисунок). Составить таблицу включений светодиода в зависимости от $Z1$ и $Z2$. Что будет со светодиодом, если при подаче на вход напряжений $Z1 = 1$ и $Z2 = 1$ кратковременно подать на вход $Z1$ напряжение $Z1 = 0$? На вход $Z2$ кратковременно подать напряжение $Z2 = 0$?

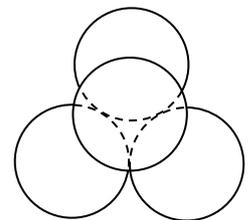
2. Шесть одинаковых зацепляющихся зубчатых колес связаны рычагом, вращающемся с угловой скоростью ω относительно центра колеса 1, которое является неподвижным. Найти угловую скорость шестого колеса.



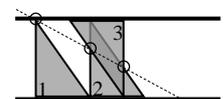
3. При монтаже трехрожковой люстры, в которой планировалось установить одну лампу с номинальной мощностью $P_1 = 40$ Вт, и две лампы с номинальной мощностью $P_2 = 60$ Вт, была допущена ошибка. Лампы были соединены так, как показано на рисунке. Какие мощности P'_1 и P'_2

будут выделяться на лампах при таком подключении? Как нужно исправить подключение ламп?

4. Три одинаковых шара массой m каждый кладут на горизонтальную поверхность так, что все шары касаются друг друга. Сверху на шары кладут еще один такой же шар (см. рисунок; вид сверху). Трение между всеми шарами отсутствует, между шарами и горизонтальной поверхностью есть трение. При каком минимальном коэффициенте трения скольжения между шарами и поверхностью шары не раскатятся?

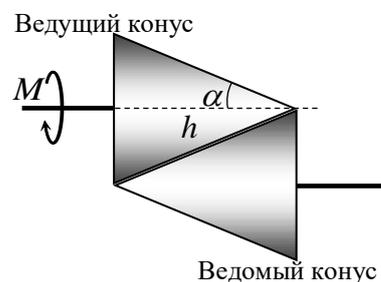


5. В 3 веке до н.э. греческий инженер Эратосфен придумал мезолябию – прибор, позволяющий извлекать кубические корни. Мезолябия состоит из двух направляющих, по которым могут перемещаться три одинаковых прямоугольных треугольника. Треугольники располагают так, что вершина прямого угла треугольника 2 сов-



падает с вершиной острого угла треугольника 1, а вершина треугольника 1 и точки пересечения треугольников 2 и 3 (перевернутого) лежат на одной прямой (эти точки отмечены кружками). Длине какого отрезка равен кубический корень из расстояния между направляющими? В каких единицах измерения?

5. Рассмотрите модель передачи вращения между двумя параллельными осями, основанную на трении. Два одинаковых конуса – ведущий и ведомый – прижимаются друг к другу по образующей (см. рисунок). К оси ведущего конуса приложен момент внешних сил M , при этом ведущий конус вращается равномерно, благодаря силе трения, действующей на него со стороны ведомого конуса. На каком расстоянии от вершины ведущего конуса находится такое сечение конусов, в котором точки их поверхностей имеют одинаковые линейные скорости? Конусы прижаты друг к другу равномерно по образующей с силой N . Угол при вершине конусов α , коэффициент трения между конусами μ , высота конусов h .



Решения

1. 1 случай. Пусть $Z1=0$ и $Z2=0$. Согласно таблице истинности логического элемента 2И-НЕ на выходе нижнего логического элемента будет напряжение питания, независимо от второго входа этого элемента. Светодиод горит.

2 случай. Пусть $Z1=1$ и $Z2=0$. Согласно таблице истинности логического элемента 2И-НЕ на выходе нижнего логического элемента будет напряжение питания, независимо от второго входа этого элемента. Светодиод горит.

3 случай. Пусть $Z1=0$ и $Z2=1$. Согласно таблице истинности логического элемента 2И-НЕ на выходе верхнего логического элемента будет напряжение питания, независимо от второго входа этого элемента. На оба входа нижнего элемента подается напряжение питания, следовательно, по таблице истинности логического элемента заключаем, что на его выходе нулевое напряжение. Светодиод не горит.

4 случай. Пусть $Z1=1$ и $Z2=1$. Предположим, что на выходе нижнего элемента есть напряжение питания и проверим это предположение. Тогда на оба входа верхнего элемента подается напряжение питания, следовательно, на его выходе нулевое напряжение. Следовательно, на входы нижнего элемента подаются нулевое напряжение и напряжение питания. На его выходе – напряжение питания. Следовательно, наше предположение было верным. Светодиод горит.

Но точно так же можно доказать, что на выходе нижнего логического элемента может быть и нулевое напряжение. Действительно, в этом случае на входы верхнего элемента подаются напряжение питания и нулевое напряжение, на его выходе – напряжение питания, на обоих входах нижнего элемента – напряжение питания, на выходе – нуль. Следовательно, и это предположение верно, и при подаче на входы напряжений $Z1=1$ и $Z2=1$ возможны два режима работы - светодиод может гореть или не гореть (см. таблицу включений светодиода).

От чего же зависит, будет или не будет гореть в последнем случае светодиод? Очевидно, от предыстории. Если до подачи напряжений $Z1=1$ и $Z2=1$ он горел, то он так и будет гореть, когда эти напряжения будут поданы. И если не горел, то гореть и не будет.

№	Z1	Z2	светодиод
1.	0	0	горит
2.	1	0	горит
3.	0	1	не горит
4.	1	1	горит не горит

Рассмотрим теперь случай кратковременных изменений сигналов.

1 случай. Пусть, на входы поданы сигналы $Z1=1$ и $Z2=1$, и светодиод горит. При кратковременной подаче $Z1=0$ (и неизменном $Z2=1$) согласно таблице включений светодиода он потухнет и при возвращении сигналов к значениям $Z1=1$ и $Z2=1$ останется выключенным.

2 случай. Пусть, на входы поданы сигналы $Z1=1$ и $Z2=1$, и светодиод горит. При кратковременной подаче $Z2=0$ (и неизменном $Z1=1$) согласно таблице включений светодиода он останется

гореть. Поэтому он останется гореть и при возвращении сигналов к значениям $Z1=1$ и $Z2=1$ останется выключенным.

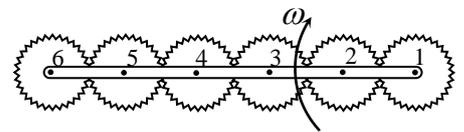
3 случай. Пусть, на входы поданы сигналы $Z1=1$ и $Z2=1$, и светодиод не горит. При кратковременной подаче $Z1=1$ (и неизменном $Z2=0$) согласно таблице включений светодиода он включится и при возвращении сигналов к значениям $Z1=1$ и $Z2=1$ останется включенным.

4 случай. Пусть, на входы поданы сигналы $Z1=1$ и $Z2=1$, и светодиод не горит. При кратковременной подаче $Z2=1$ (и неизменном $Z1=0$) согласно таблице включений светодиода он останется выключенным. Поэтому он останется выключенным и при возвращении сигналов к значениям $Z1=1$ и $Z2=1$.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Участник в принципе понимает, как используя таблицу истинности каждого из устройств 2И-Не, понять горит или не горит светодиод – 0,5 балла
2. Участник правильно построил таблицу включений светодиода в случаях 1, 2 и 3 – 0,5 балла.
3. Участник понял, что в случае 4 возможны 2 варианта включения светодиода в зависимости от «предыстории» – 0,5 балла
4. Участник правильно проанализировал кратковременную подачу напряжения $Z1=0$ или $Z2=0$ в случае 4 – 0,5 балла

2. Перейдем в систему отсчета, вращающуюся вместе с рычагом, связывающим колеса. В этой системе отсчета рычаг покоится, а колесо 1 вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω , колесо 2 – по часовой стрелке с угловой скоростью ω , колесо 3 – против угловой стрелки и т.д. Переходя назад в систему отсчета, связанную с землей, заключаем, что угловые скорости всех четных колес складываются с угловой скоростью рычага, а нечетных вычитаются. Поэтому угловая скорость шестого колеса равна 2ω . Пятого – равна нулю.



Возможно также другое решение без перехода в систему отсчета, связанную с рычагом. Поскольку первое колесо по условию покоится, то линейная скорость точки второго колеса, связанной в данный момент с первым, равна нулю, скорость его центра v_1 равна скорости рычага в этой точке $v_1 = 2r\omega$. Поэтому это колесо должно вращаться с такой угловой скоростью ω_2 , чтобы

$$2r\omega - \omega_2 r = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 2\omega$$

Отсюда находим линейную скорость точки второго колеса, которая контактирует с третьим колесом

$$v_{23} = 2\omega r + \omega_1 r = 4\omega r.$$

Скорость центра третьего колеса v_3 равна скорости рычага в той точке, где находится центр третьего колеса

$$v_3 = 4r\omega.$$

Из двух последних формул видим, что и центр третьего колеса и его точка, касающаяся второго, имеют одинаковые скорости. Следовательно, третье колесо не вращается

$$\omega_3 = 0.$$

Поэтому и его точка, касающаяся четвертого колеса, имеет такую же линейную скорость

$$v_{34} = 4\omega r.$$

Значит, такую же скорость имеет и точка четвертого колеса, касающаяся третьего. С другой стороны, линейная скорость центра четвертого колеса v_4 равна линейной скорости рычага в той точке, где находится центр четвертого колеса

$$v_4 = 6\omega r$$

Поэтому четвертое колесо должно вращаться с такой угловой скоростью ω_4 , что

$$6\omega r - \omega_4 r = 4\omega r \quad \Rightarrow \quad \omega_4 = 2\omega$$

И т.д. Из этой цепочки равенств видим, что скорость всех нечетных колес равна нулю, четных - 2ω .

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Участник в принципе понимает, как правильно связывать параметры вращения зацепляющихся колес – одинаковая линейная скорость на поверхности – 0,5 балла
2. Построен правильный алгоритм нахождения угловых скоростей колес – «скорость центра минус скорость вращения относительно центра равна скорости точки, зацепляющейся за предыдущее колесо» – 0,5 балла
3. Правильно найдена угловая скорость второго и третьего колес – 0,5 балла.
4. Правильное заключение об угловых скоростях четных и нечетных колес – 0,5 балла

3. Из данных номинальных мощностей лампочек можно найти их сопротивления

$$R_1 = \frac{U^2}{P_1}, \quad R_2 = \frac{U^2}{P_2}.$$

Общее сопротивление цепи можно найти по правилам соединения резисторов

$$R = R_1 + \frac{R_2}{2} = \frac{U^2}{P_1} + \frac{U^2}{2P_2} = \frac{U^2(2P_2 + P_1)}{2P_1P_2}$$

Отсюда находим ток в цепи при приложении к ней номинального напряжения

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2P_1P_2}{U(2P_2 + P_1)}$$

И мощности, которые выделяются на лампочках

$$P'_1 = I^2 R_1 = \frac{4P_1P_2^2}{(P_1 + 2P_2)^2} = 22,5 \text{ Вт}$$

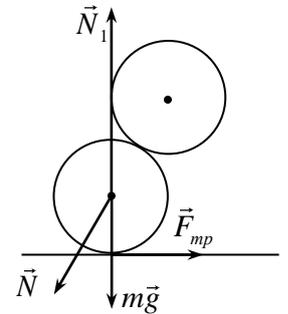
$$P_2' = \left(\frac{I}{2}\right)^2 R_2 = \frac{P_2 P_1^2}{(P_1 + 2P_2)^2} = 3,75 \text{ Вт}$$

Правильное подключение – параллельное подключение всех ламп так, чтобы на каждой из них было напряжение сети – номинальное напряжение каждой лампы.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Правильная идея решения – использование законов Ома и Джоуля-Ленца для нахождения мощностей, выделяемых на лампах – 0,5 балла
2. Правильно найдены сопротивления лампочек – 0,5 балла
3. Правильно найдены токи, текущие через лампы – 0,5 балла.
4. Правильные ответы для мощностей тока в лампочках. Правильные вычисления – 0,5 балла

4. Рассмотрим один из нижних шаров. На него действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила со стороны верхнего шара \vec{N} , сила реакции пола \vec{N}_1 , сила трения со стороны пола \vec{F}_{mp} , мешающая шарам разъезжаться (см. рисунок). Рассмотрим условие моментов относительно точки касания шара и пола. Поскольку три силы – тяжести, реакции и трения обязательно имеют нулевые плечи относительно этой точки, а сила \vec{N}_1 – ненулевое, то условие моментов относительно этой точки в принципе не может быть выполнено, и шары не могут быть в равновесии. Это значит, что при любом сколь угодно малом трении шары будут раскатываться.

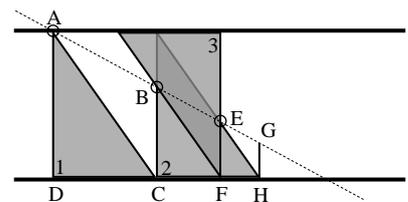


Поскольку три силы – тяжести, реакции и трения обязательно имеют нулевые плечи относительно этой точки, а сила \vec{N}_1 – ненулевое, то условие моментов относительно этой точки в принципе не может быть выполнено, и шары не могут быть в равновесии. Это значит, что при любом сколь угодно малом трении шары будут раскатываться.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Правильная аргументация и вывод – шары раскатываются при любом трении – 2 балла.
В случае, если участник не сделал этого вывода и не понял, что шары будут раскатываться при любом трении
2. Правильная расстановка сил, действующих на все шары – 0,5 балла
3. Участник продемонстрировал понимание анализа силы трения ($F_{mp}^{\max} = \mu N$), правильно провел этот анализ для случая отсутствия вращения – 0,5 балла

5. Построим вспомогательный отрезок GH , перпендикулярный направляющим. Тогда благодаря параллельности отрезков AD , BC , EF и GH , в мезолябии существует ряд подобных треугольников. Подобными являются треугольники ACD , BFC и EHF , а также треугольники ABC , BEF и EGH . Из соотношений подобия треугольников ACD , BFC и EHF имеем



$$\frac{AD}{BC} = \frac{DC}{CF} \text{ и } \frac{BC}{EF} = \frac{CF}{FH}$$

С другой стороны, поскольку отрезки DC, CF и FH являются высотами треугольников ABC, BEF и EGH, соотношения подобия для этих треугольников дают

$$\frac{BC}{EF} = \frac{DC}{CF} \text{ и } \frac{EF}{GH} = \frac{CF}{FH}$$

Отсюда имеем

$$\frac{AD}{BC} = \frac{BC}{EF} = \frac{EF}{GH}$$

Из этих равенств находим

$$AD = \frac{BC^2}{EF}, \quad BC = \frac{EF^2}{GH}$$

или

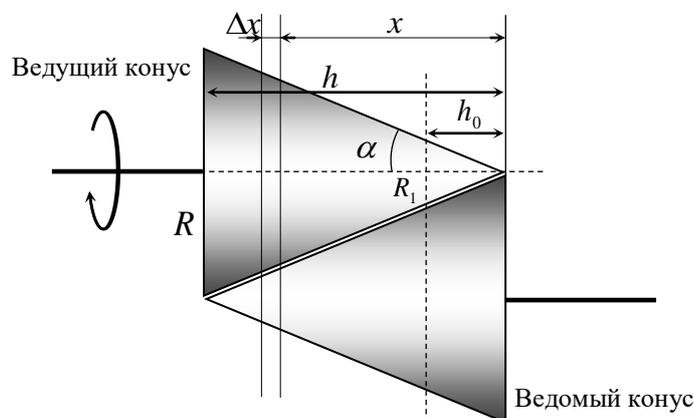
$$\sqrt[3]{\frac{AD}{GH}} = \frac{EF}{GH} \quad (*)$$

Равенство (*) означает, что кубический корень из длины отрезка AD, измеренного в длинах отрезка GH, равен длине отрезка EF, измеренного в длинах отрезка GH. Или, другими словами, кубический корень из длины отрезка AD равен длине отрезка EF при условии, что в качестве единицы измерения длин используется отрезок GH.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Правильная идея решения – геометрическое рассмотрение соотношений между длинами различных отрезков мезолябии с использованием подобия различных треугольников – 0,5 балла
2. Нахождение двух серий подобных треугольников – 0,5 балла
3. Соотношение (*) для расстояния между направляющими – 0,5 балла.
4. Правильная интерпретация соотношения (*) – кубический корень из расстояния между направляющими, измеренного в единицах отрезка GH, равен длине отрезка EF, измеренного в единицах отрезка GH, - как возможность извлечения кубических корней – 0,5 балла

6. За счет силы трения ведущий конус разгонит ведомый до какой-то угловой скорости, и в стационарном режиме вращения угловые скорости ведущего и ведомого конусов не будут меняться. Но поскольку линейные скорости разных точек на поверхности каждого конуса – разные, между касающимися друг друга точками конусов есть проскальзывание, и должны действовать силы трения скольжения. Действительно, точки ведущего конуса, находящиеся дальше от его оси, имеют большие линейные скорости и должны опережать точки ведомого конуса, с которыми они



имеют большие линейные скорости и должны опережать точки ведомого конуса, с которыми они

контактируют. А точки ведущего конуса, находящиеся ближе к его оси, имеют меньшие линейные скорости и должны отставать от точек ведомого конуса, с которыми они контактируют. А это значит, что в разных точках поверхности каждого конуса сила трения действует по-разному. На ведущий конус действует тормозящая сила трения со стороны ведомого конуса в тех его точках, которые опережают точки ведомого, и разгоняющая сила трения в тех его точках, которые отстают от точек ведомого. Однако суммарная сила трения, действующая на ведущий конус, должна быть тормозящей, поскольку он вращается равномерно при действии на него момента внешних сил. Из условия равенства момента внешних сил и момента силы трения найдем точки конусов, имеющих одинаковые линейные скорости (сечение равных скоростей).

Итак, пусть угол при вершине конусов равен α , высота h , сечение равных скоростей находится на расстоянии h_0 от вершины ведущего конуса (показано пунктиром на рисунке), сила нормальной реакции, действующая между конусами, равна N . Рассмотрим тонкий слой ведущего конуса толщиной Δx , лежащий на расстоянии x от его вершины (см. рисунок). На этот слой действует сила трения

$$\Delta F_{mp} = \mu N \frac{\Delta x}{h}$$

где μ - коэффициент трения между конусами. Эта сила создает следующий момент относительно оси ведущего конуса

$$\Delta M_{mp} = \mu N \frac{\Delta x}{h} r = \frac{\mu N \operatorname{tg} \alpha}{h} x \Delta x$$

где r - радиус рассматриваемого слоя. Поэтому суммарный тормозящий момент силы трения, действующей на ведущий конус, определяется соотношением

$$\Delta M_{mp}^{\text{торм}} = \frac{\mu N \operatorname{tg} \alpha}{h} \sum x \Delta x$$

где сумма распространяется на слои ведущего конуса, лежащие между его основанием и сечением равных скоростей, а суммарный разгоняющий момент силы трения определяется аналогичным соотношением, но сумма распространяется на слои ведущего конуса, лежащие между сечением равных скоростей и вершиной

$$\Delta M_{mp}^{\text{разг}} = \frac{\mu N \operatorname{tg} \alpha}{h} \sum x \Delta x$$

Суммы такого рода приходится вычислять при вычислении работы силы упругости. Их, в частности, можно вычислить графически как площадь под графиком функции $f(x) = x$ между значениями координат $x = h$ и $x = h_0$ - первая сумма, и $x = h_0$ и $x = 0$ - вторая сумма. Вычисляя эти суммы находим суммарный момент силы трения, действующей на ведущий конус со стороны ведомого

$$M_{mp} = \frac{\mu N \operatorname{tg} \alpha}{2h} (h^2 - h_0^2) - \frac{\mu N \operatorname{tg} \alpha}{2h} h_0^2 = \frac{\mu N \operatorname{tg} \alpha}{2h} (h^2 - 2h_0^2)$$

Приравнивая этот момент моменту внешних сил, действующих на ведущий конус, получим

$$M_{mp} = M \Rightarrow \frac{\mu N \operatorname{tg} \alpha}{2h} (h^2 - 2h_0^2) = M \Rightarrow h_0 = \sqrt{\frac{h^2}{2} - \frac{hM}{\mu N \operatorname{tg} \alpha}} \quad (**)$$

Формула для x (***) имеет простой физический смысл. Как и должно быть при $M = 0$ сечение равных скоростей находится на расстоянии $h/\sqrt{2}$ от вершины ведущего конуса, т.е. ближе к его основанию, чем к вершине, причем настолько, что тормозящий и разгоняющий моменты силы трения друг друга компенсируют. При увеличении M сечение равных скоростей сдвигается к вершине ведущего конуса. К такому же результату приводит уменьшение силы реакции или коэффициента трения. Подкоренное выражение становится отрицательным, когда силы трения между конусами недостаточно чтобы затормозить ведущий конус. В этом случае постановка задачи становится неверной, поскольку ведущий конус не будет вращаться с постоянной угловой скоростью.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла):

1. Главная идея решения – момент силы трения должен равняться вращательному моменту – 0,5 балла
2. Правильный подход к вычислению силы трения – из-за разной линейной скорости на поверхности конусов в каких-то точках ведущий конус обгоняет ведомый; в этих точках трение со стороны ведомого конуса тормозит ведущий. В каких-то точках ведомый конус обгоняет ведущий, трение со стороны ведущего разгоняет ведомый – 0,5 балла.
3. Правильный способ вычисления момента силы трения – по площади под графиком - 0,5 балла
4. правильный ответ – 0,5 балла

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.

6. Отработанное топливо атомных электростанций необходимо тщательно хранить, не допуская его попадания в воздух или грунтовые воды. Для этого топливо смешивают с расплавленным стеклом, которое благодаря химической инертности после застывания будет удерживать топливо в себе. Топливо остекловывается в виде цилиндров радиусом $R = 0,15$ м. За счет остаточных радиоактивных превращений в топливе продолжается выделение тепла. Известно, что энерговыделение на единицу длины цилиндров составляет $q_l = 1$ кВт/м. Определить перепад температуры между центром цилиндра и его поверхностью. Теплопроводность стекла $\lambda = 3$ Вт/(м·К). Указание. Количество тепла w , переносимого в единицу времени через единицу площади тонкого слоя толщиной Δx , одна поверхность которого поддерживается при температуре t_1 , вторая – при температуре t_2 , определяется законом: $q = \lambda(t_2 - t_1) / \Delta x$, где λ - коэффициент теплопроводности (закон Фурье).

6. Рассмотрим поток тепла через цилиндрическую поверхность радиуса x внутри цилиндра из отработанного топлива. Количество теплоты, проходящее через эту поверхность в единицу времени, равно количеству теплоты, выделяемое внутри объема цилиндра ограниченного этой поверхностью. Поскольку всего в цилиндре длиной l в единицу времени выделяется количество теплоты $Q = q_l l$, а теплота выделяется равномерно по объему, то внутри рассматриваемого цилиндра выделяется количество теплоты

$$Q(x) = q_l l \frac{x^2}{R^2} \quad (*)$$

С другой стороны, из закона теплопроводности Фурье следует, что чтобы через поверхность рассматриваемого цилиндра был поток тепла, в области его поверхности должен сформироваться градиент (изменение) температуры. Поэтому если взять тонкий цилиндрический слой толщиной Δx около поверхности рассматриваемого цилиндра (выделен темной заливкой на рисунке, поверхность цилиндра радиуса x показана пунктиром), то на основании закона Фурье заключаем,

что на внутренней и внешней поверхности этого слоя должна быть такая разность температур ΔT , что

$$Q(x) = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} S = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} 2\pi x l$$

где λ - коэффициент теплопроводности стекла, $\Delta T = T_{\text{внут}} - T_{\text{внеш}}$ - разность температур внутренней и внешней поверхностей слоя, S - площадь поверхности слоя. Подставляя сюда $Q(x)$ из (*), получаем для разности температур на внутренней и внешней поверхностях рассматриваемого слоя

$$\Delta T = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} x \Delta x$$

Аналогичные формулы можно написать для всех тонких слоев, на которые можно мысленно разбить цилиндр из отработанного топлива:

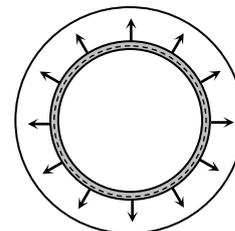
$$\Delta T_1 = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} x_1 \Delta x_1$$

$$\Delta T_2 = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} x_2 \Delta x_2$$

$$\Delta T_3 = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} x_3 \Delta x_3$$

.....

Сложим теперь все эти формулы. Тогда сумма в левой части даст разность температур между центром цилиндра и его поверхностью. В правой части получится сумма, которую приходится вычислять при вычислении работы силы упругости и которую можно вычислить например графически. Используя этот результат, получим



$$T_{\text{центр}} - T_{\text{поверх}} = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} \sum_n x_n \Delta x_n = \frac{q_l}{2\pi\lambda R^2} \frac{R^2}{2} = \frac{q_l}{4\pi\lambda} = 26^\circ C$$

Обратим внимание, что разность температур между осью цилиндра и его поверхностью от его радиуса не зависит.