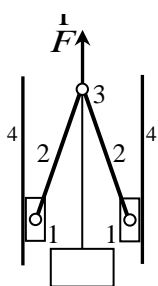
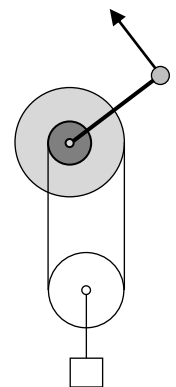


Решения
Задач заключительного тура
Инженерной олимпиады школьников,
2017-2018 учебного года,
9-10 класс

1. (2 балла) Школьник проделал следующий эксперимент. Он встал перед зеркалом, закрыл один глаз, а затем приклеил на то место зеркала, на котором он видел изображение своего закрытого глаза, маленький кусочек бумаги. После этого, не меняя положение головы, он открыл тот глаз, который был закрыт, и открыл другой. На каком месте своего изображения он увидит теперь кусочек бумаги? Ответ обосновать.

2. (2 балла) Имеется два одинаковых калориметра, в которые налито одинаковое количество воды: в первый – с температурой $t_1 = 20^\circ\text{C}$, во второй – с температурой $t_2 = 100^\circ\text{C}$. Кроме того, в первом калориметре находится некоторое тело. Когда тело вытаскивают из первого калориметра и перекладывают во второй, в нем устанавливается температура $t_x = 63^\circ\text{C}$. Какая температура установится в первом калориметре, если тело вытащить из второго калориметра и снова опустить в первый? Всеми потерями тепла пренебречь.

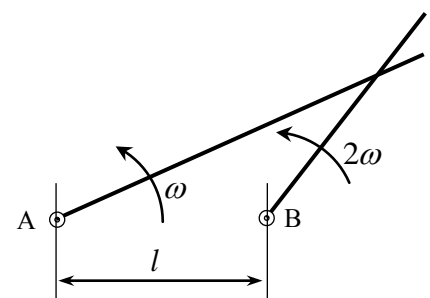
3. (2 балла) Дифференциальный ворот состоит из двух блоков с радиусами r и $2r$, насаженных на одну ось и склеенных между собой. На блоки ворота в противоположных направлениях намотана веревка, на которой висит подвижный блок, радиус которого подобран так, что свободные концы веревки вертикальны. К оси подвижного блока прикреплен груз массой m . Ручку ворота, находящуюся на расстоянии $4r$ от оси ворота, вращают с угловой скоростью ω так, как показано на рисунке. С какой скоростью поднимается груз? Какую силу необходимо прикладывать к ручке ворота, чтобы груз поднимался равномерно? Трения нет, все блоки невесомы.



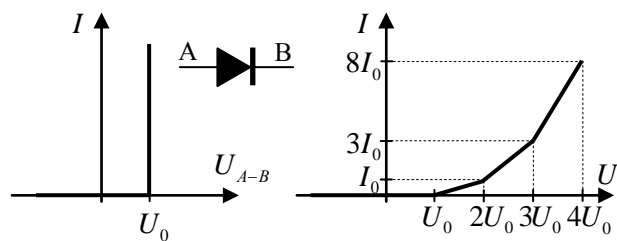
4. (2 балла) При проектировании подъемных машин используются механизмы, делающие невозможным обратное движение грузов при отключении их двигателей (самотормозящие). На рисунке показан механизм, состоящий из двух ползунов - 1 (деталей, совершающих скользящее движение по направляющим 4), соединенных шарнирно с двумя стержнями 2, которые между собой также соединены шарниром (3).

Объясните принцип торможения механизма при «выключении» силы \vec{F} . При каком коэффициенте трения между ползунами и направляющими механизм будет самотормозящим?

5. (2 балла) Два очень длинных стержня вращаются с постоянными угловыми скоростями ω и 2ω вокруг параллельных осей, проходящих через их концы А и В (см. рисунок). Расстояние между осями l , в начальный момент оба стержня направлены направо. По какой траектории движется точка пересечения стержней? Найти скорость и ускорение этой



точки через время $t = \pi / 6\omega$ после начала движения. Ответ обосновать.



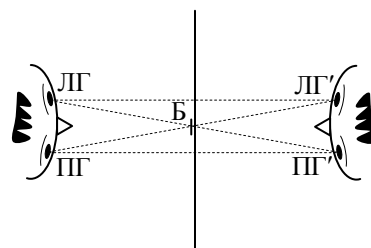
б. (2 балла) На левом рисунке показана вольтамперная характеристика (зависимость тока от напряжения) неидеального диода и его обозначение на электрических схемах. Используя неидеальные диоды, резисторы и провода, постройте такую

электрическую цепь, вольтамперная характеристика которой показана на правом рисунке.

Решения

1. Построение хода лучей в зеркале (вид сверху) выполнено на рисунке.

Пусть школьник (школьник слева от зеркала; справа его изображение) закрыл левый глаз (ЛГ на рисунке). Поскольку его изображение находится в точке ЛГ', то чтобы не видеть правым глазом изображение закрытого левого глаза, он должен приклеить бумажку на зеркало так,



как это показано на рисунке. Но как следует из этого рисунка, бумажка лежит и на пути луча, идущего от изображения правого глаза к левому глазу. Поэтому если школьник закроет правый глаз и откроет левый (не меняя положения головы), то он увидит, что бумажка закрывает изображение закрытого правого глаза.

Критерии оценивания:

1. Сделано правильное построение изображений глаз – 0,5 балла.
2. Понято, куда нужно расположить бумажку, чтобы не видеть изображение закрытого глаза – 1 балл
3. Сделан правильный вывод о том, что бумажка закроет изображение другого глаза, если его закрыть - 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла

2. Проще всего решить эту задачу, рассматривая сразу конечное состояние калориметров. С точки зрения содержимого они вернулись к первоначальному состоянию, но температура во втором калориметре уменьшилась от t_2 до t_x . Поэтому первый калориметр потерял такую энергию $Q = C(t_2 - t_x)$ (где C - теплоемкость калориметра вместе с водой, но без тела). Поскольку по условию потерями тепла можно пренебречь, то всю эту энергию получил первый калориметр. Поэтому уравнение теплового баланса для двух переключиваний тела (во второй калориметр, а потом назад) дает

$$C(t_2 - t_x) = (C + C_0)(t_y - t_1)$$

где C_0 - теплоемкость тела, t_y - искомая температура первого калориметра после возвращения в него тела. Отсюда

$$t_y = t_1 + \frac{(t_2 - t_x)}{1 + \frac{C_0}{C}} \quad (*)$$

А отношение теплоемкостей можно найти, рассматривая первый процесс установления равновесия. Для перекалывания тела из первого калориметра во второй получаем из уравнения теплового баланса

$$C(t_2 - t_x) = C_0(t_x - t_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{C_0}{C} = \frac{t_2 - t_x}{t_x - t_1}$$

Подставляя эту формулу в уравнение (*), получим

$$t_y = t_1 + \frac{(t_2 - t_x)(t_x - t_1)}{t_2 - t_1} = 39,9^\circ \text{C}$$

Критерии оценивания:

1. Из уравнения теплового баланса для первого перекалывания тела найдено отношение теплоемкостей – 0,5 балла.
2. Правильно написано уравнение теплового баланса для второго перекалывания (или сразу для конечного состояния) – 0,5 балла
3. Полученная правильная окончательная формула - 0,5 балла
4. Правильные вычисления – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла

3. Чтобы подъем груза совершался равномерно, удвоенная сила натяжения веревки должна равняться силе тяжести груза. Отсюда находим силу натяжения веревки

$$T = \frac{mg}{2}$$

Так как ворот вращается равномерно, сумма моментов сил, приложенных к блоку должна равняться нулю

$$Tr + F4r - T2r = 0$$

где F - сила, приложенная к ручке ворота. Отсюда находим

$$F = \frac{T}{4} = \frac{mg}{8}$$

Найдем теперь скорость поднятия груза. Если ворот вращается с угловой скоростью ω , за время Δt на большой блок ворота наматывается веревка длиной $\Delta l_1 = 2r\omega\Delta t$, с малого сматывается веревка длиной $\Delta l_2 = r\omega\Delta t$. Поэтому веревка, на которой висит подвижный блок становится короче на величину

$$\Delta l_1 - \Delta l_2 = r\omega\Delta t$$

а подвижный блок поднимается на половину этой величины

$$\Delta x = \frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{2} = \frac{r\omega\Delta t}{2},$$

где Δx - величина, на которую поднялся блок (а, следовательно, и груз) за время Δt . Отсюда находим скорость поднятия груза (которая равна скорости поднятия блока)

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{r\omega}{2}$$

Критерии оценивания:

1. Использовано условие равновесия (условие моментов) для ворота – 0,5 балла.
2. Правильно найдены все моменты и получено правильное уравнение для силы, которой нужно действовать на ручку – 0,5 балла
3. Использована верная идея установления связи скоростей вращения ворота и поднятия тела - 0,5 балла
4. Правильный ответ и вычисления – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла

4. При выключении силы F на стержни механизма будет действовать сила натяжения троса, держащего груз, равная силе тяжести груза, сила реакции стенок и сила трения (собственной силой тяжести стержней пренебрегаем). Поэтому шарнир 3 начнет двигаться вниз, стержни будут «вставать в распор», будет увеличиваться сила реакции, а за ней и сила трения, и возникнет эффект заклинивания стержней – когда сила трения сильно возрастет и не даст падать грузу.

Найдем необходимый для заклинивания коэффициент трения. Для этого рассмотрим равновесное положение стержней. Условие моментов относительно ползуна дает (напоминаем, что силой тяжести стержней мы пренебрегаем):

$$\frac{1}{2} mgl \sin \alpha = Nl \cos \alpha$$

где N - сила реакции шарнира, которая может быть только горизонтальной (из-за симметрии), l - длина стержня, α - угол между стержнями и направляющими (или стержнем и вертикальными тросами). Отсюда находим

$$N = \frac{1}{2} mg \operatorname{tg} \alpha$$

С другой стороны из условия равенства нулю суммы сил, действующих на стержень, заключаем, что такой же будет и сила реакции стенок механизма, действующих на ползун. С третьей стороны, для покоя стержня сила трения, которая равна половине силе тяжести груза, не должна превосходить своего максимального значения kN , где k - коэффициент трения. Отсюда получаем условие покоя стержня

$$\frac{1}{2} kmg \operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1}{2} mg \quad \Rightarrow \quad k \geq \operatorname{ctg} \alpha$$

Находя котангенс угла между стержнем и направляющей (через заданные размеры системы), получим

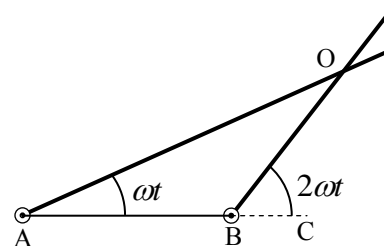
$$k \geq \frac{\sqrt{7}}{3} = 0,88$$

Критерии оценивания:

1. Правильная основная идея - заклинивание – 0,5 балла.
2. Написана правильное уравнение моментов, найдена сила реакции боковых стенок – 0,5 балла
3. Использована правильная формула для максимальной силы трения - 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла

5. Пусть после начала движения (когда стержни были направлены направо) прошло некоторое время t , которое меньше времени половины оборота правого стержня $t < \pi/2\omega$. Рассмотрим треугольник АВО, где А и В – концы стержней, вокруг которых они вращаются, О – точка пересечения стержней в этот момент.



Очевидно, треугольник АВО равнобедренный, в котором АВ=ВО. Действительно, поскольку угол ОВС равен $2\omega t$, то угол АВО в треугольнике АВО равен $\pi - 2\omega t$. А поскольку угол ОАВ равен ωt , то угол АОВ равен

$$\angle AOB = \pi - \angle OAB - \angle ABO = \pi - \omega t - (\pi - 2\omega t) = \omega t$$

Таким образом, в треугольнике ОАВ равны углы $\angle AOB = \angle OAB$, и, следовательно, этот треугольник равнобедренный, в котором АВ=ВО в любой момент времени. Поэтому расстояние от точки В до точки пересечения стержней остается одинаковым в процессе движения, и равным l . Следовательно, точка пересечения стержней движется с постоянной угловой скоростью 2ω по окружности с центром в точке В и радиусом l . Поэтому величина скорости этой точки не меняется в процессе движения и равна

$$v = 2\omega l. \quad (*)$$

А ее ускорение является центростремительным, и равным

$$a = 4\omega^2 l. \quad (**)$$

Рассмотренное решение становится неверным через время $t > \pi/2\omega$, поскольку стержни перестают пересекаться. Однако через время, за которое правый стержень совершит еще один оборот (через время $t > 3\pi/2\omega$ после начала движения стержней), стержни снова начнут пересекаться, причем точка их пересечения будет находиться ниже отрезка АВ. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что траекторией точки пересечения стержней будет нижняя половинка окружности, а ее скорость и ускорение будут такими же. Затем (через время $t > 2\pi/\omega$

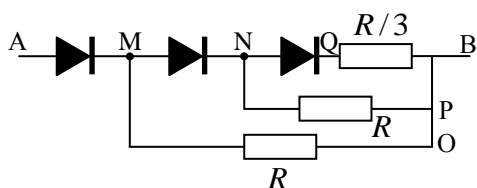
после начала движения стержней), оба стержня станут направлены вправо, а далее движение точки их пересечения повторится.

Таким образом, в течение половины времени, за которое правый стержень совершит два полных оборота (а левый – один), стержни будут пересекаться, в течение второй половины времени – нет. При этом точка их пересечения будет двигаться так: сначала по верхней половинке окружности с центром в точке В и радиусом l ; потом стержни не будут пересекаться; потом – по нижней половинке окружности с центром в точке В и радиусом l . Когда стержни пересекаются, скорость и ускорение точки их пересечения являются постоянными и определяются формулами (*) и (**). Когда стержни не пересекаются, вопрос о скорости и ускорении точки их пересечения является бессмысленным.

Критерии оценивания:

1. правильно понято, что точка пересечения стержней движется по окружности – 0,5 балла.
2. правильное обоснование этого факта. – 0,5 балла
3. правильно найдена скорость точки пересечения стержней - 0,5 балла
4. правильно найдено ускорение точки пересечения стержней – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла



$$R = \frac{U_0}{I_0}$$

6. Искомая цепь показана на рисунке. Убедимся, что ее вольтамперная характеристика, будет именно такой, какой она показана на рисунке в условии задачи. Если к цепи приложено напряжение, меньшее U_0 , все три диода закрыты,

ток в цепи не течет. Пусть к цепи приложено напряжение U , которое превосходит U_0 (но не превосходит $2U_0$). Тогда, очевидно, открывается диод AM, а остальные диоды по-прежнему закрыты. Тогда ток течет через диод AM и резистор MO, причем согласно вольтамперной характеристике диода напряжение на диоде равно U_0 , а ток может быть любым. Поэтому напряжение на резисторе равно $U - U_0$, а ток согласно закону Ома

$$I_{MO} = \frac{U - U_0}{R_{MO}}$$

где R_{MO} - сопротивление резистора MO. Поэтому сопротивление этого резистора нужно взять равным

$$R_{MO} = \frac{U_0}{I_0}$$

Если к цепи приложено напряжение U , которое превосходит $2U_0$ (но не превосходит $3U_0$), то открывается второй диод MN и ток течет через диоды AM, MN и резисторы MO и NP. При этом

согласно вольтамперной характеристики напряжение на диодах равно U_0 , токи определяются токами через резисторы, которые согласно закону Ома равны

$$I_{MO} = \frac{U - U_0}{R_{MO}}, I_{NP} = \frac{U - 2U_0}{R_{NP}}$$

Отсюда находим, что суммарный ток в цепи при $U = 2U_0$, равен

$$I = I_{MO} + I_{NP} = \frac{2U_0}{R_{MO}} + \frac{U_0}{R_{NP}}$$

А поскольку согласно вольтамперной характеристике цепи этот ток втрое превышает ток $I_0 = U_0 / R_{MO}$, заключаем, что сопротивление резистора NP равно сопротивлению резистора MO

$$R_{NP} = R_{MO} = \frac{U_0}{I_0}$$

Если к цепи приложено напряжение U , которое превосходит $3U_0$ - открывается последний диод и ток течет через все резисторы. А поскольку напряжения на диодах равны U_0 , легко найти напряжение на каждом резисторе, а потом по закону Ома – токи

$$I_{MO} = \frac{U - U_0}{R_{MO}}, I_{NP} = \frac{U - 2U_0}{R_{NP}}, I_{QB} = \frac{U - 3U_0}{R_{QB}}$$

Поэтому из вольтамперной характеристики цепи находим

$$8I_0 = \frac{3U_0}{R_{MO}} + \frac{2U_0}{R_{MO}} + \frac{U_0}{R_{QB}} = 5I_0 + \frac{U_0}{R_{QB}}$$

Отсюда находим, что

$$R_{QB} = \frac{U_0}{3I_0} = \frac{R_{MO}}{3}$$

Критерии оценивания:

1. Использована правильная идея построения цепи – последовательное открытие диодов – 0,5 балла.
2. Правильно найдены все сопротивления, которые нужно включать последовательно с диодами – 0,5 балла
3. Даны обоснования всех построений - 0,5 балла
4. Правильные вычисления – 0,5 балла

Максимальная оценка за задачу – 2 балла

Критерии оценки работ

1. Каждая задача оценивается исходя из того максимального количества баллов, которое указано в варианте задания.
2. В зависимости от полноты решения решение каждой задачи оценивается оценкой от максимальной до нуля с шагом 0,5 балла.
3. Итоговая оценка работы получается суммированием оценок за задачи.