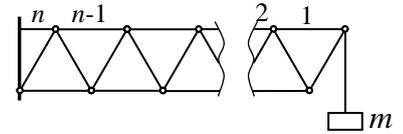


«Инженерная олимпиада школьников»

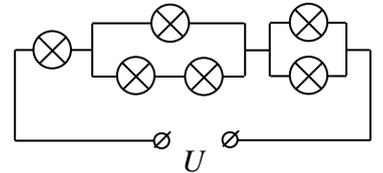
Отборочный тур 2014-2015 учебного года

11 класс

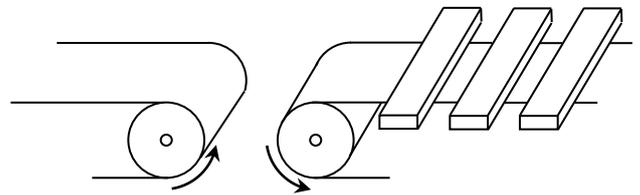
1. (1 балл) К кронштейну, состоящему из одинаковых невесомых стержней, соединенных шарнирами, прикреплен груз массой m так, как это показано на рисунке. Найти силу натяжения $(n-1)$ -го стержня.



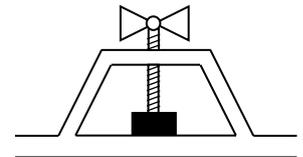
2. (2 балла) Из-за зависимости сопротивления лампы накаливания от температуры ее вольтамперная характеристика нелинейна и может быть приближенно представлена в виде $I = \alpha\sqrt{U}$, где $\alpha = 0,15 \text{ A/V}^{1/2}$, предельное напряжение для лампы $U_0 = 4 \text{ В}$ (при большем напряжении лампа перегорает). К источнику с напряжением U подключают шесть таких ламп так, как показано на рисунке. При каком минимальном напряжении U одна из ламп перегорит? Какая?



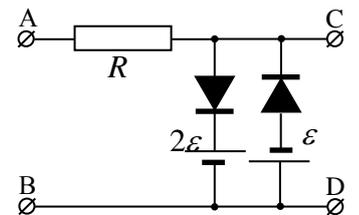
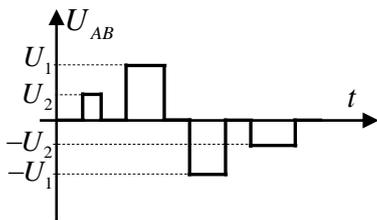
3. (1 балл) Детали, движущиеся по правому конвейеру, надо передать на левый конвейер, переворачивая их при этом «вверх ногами». Предложите простейшее решение, применив всего одно дополнительное устройство. Нарисуйте соответствующий чертеж. Длина деталей больше ширины конвейера.



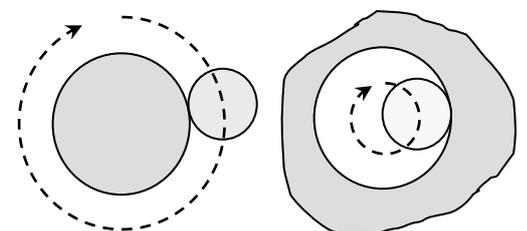
4. (3 балла) В винтовом прессе заготовка прижимается к опоре давящим штоком, который приводится в движение относительно рамы с помощью винта. Шаг резьбы винта (расстояние между ближайшими бороздками) - h . К рукоятке винта приложена сила, которая создает момент относительно оси винта M . С какой силой шток прижимает заготовку к опоре? Трение между всеми поверхностями отсутствует.



5. (3 балла) Диодом называется устройство, которое пропускает электрический ток только в одном направлении. Рассмотрите работу схемы, которая называется двойным диодным ключом с ограничением напряжения (см. рисунок). Пусть к точкам АВ электрической цепи («вход» цепи) прикладывают электрическое напряжение, график которого в зависимости от времени приведен на рисунке. Постройте графики зависимости напряжения на участке CD («выход» цепи) от времени в случае различных соотношений между величинами U_1, U_2, ε и 2ε . Предложите возможные варианты использования такой схемы. Значения ЭДС и сопротивления резисторов даны на рисунке, диод считать идеальным – его сопротивление «в прямом» направлении (в направлении стрелки в обозначении диода \blacktriangleright) считать равным нулю, сопротивление диода в обратном направлении является бесконечно большим. Сопротивления источников равны нулю.

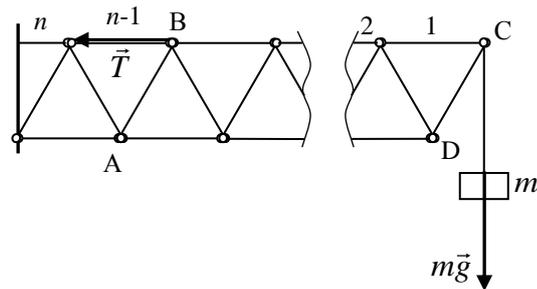


6. (2 балла) Диск радиуса R обкатывает неподвижный диск радиуса $2R$ (т.е. движется по поверхности большого диска без проскальзывания; левый рисунок). Сколько оборотов вокруг своей оси совершит малый диск, когда его центр повернется на угол $\Delta\varphi$ вокруг большого? Второй раз диск радиуса R движется без проскальзывания по внутренней поверхности полого цилиндра радиуса $2R$ (правый рисунок), также поворачиваясь на угол $\Delta\varphi$. Сколько оборотов вокруг своей оси совершит малый диск в этом случае?



Решения

1. Рассмотрим равновесие части кронштейна ABCD (см. рисунок). Внешними силами для этой части являются сила натяжения нити, равная силе тяжести груза (сама конструкция по условию массы не имеет), и силы в двух шарнирах – А и В. Поскольку крепления всех стержней шарнирные, сила, действующая со стороны $(n-1)$ -го стержня на шарнир В, направлена вдоль стержня (см. рисунок). Поэтому условие моментов для части кронштейна ABCD относительно шарнира А дает

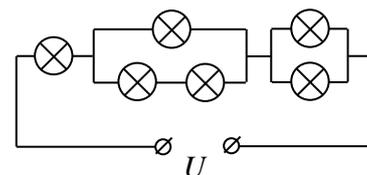


$$T \frac{\sqrt{3}l}{2} = mg \left(n - \frac{3}{2} \right) l$$

где l - длина одного стержня. Отсюда получаем

$$T = \frac{mg(2n-3)}{\sqrt{3}}$$

2. Одиночная лампа перегорает, когда ток через нее достигает значения $I_0 = 0,3 \text{ А}$ ($I_0 = \alpha \sqrt{4(B)}$ (А)); при меньшем токе лампа работает. Поэтому перегорит та лампа, через которую течет наибольший ток, т.е. самая левая лампа. При этом напряжение на ней будет равно $U_1 = 4 \text{ В}$.



На участке параллельного соединения одной и двух ламп ток $I_0 = 0,3 \text{ А}$, протекающий через левую лампу, делится в некоторой пропорции на два тока, причем отношение этих токов не равно 2:1 из-за нелинейной вольтамперной характеристики ламп. Найдем эти токи. Пусть в верхнем участке соединения одной и двух ламп течет ток $I_в$, в нижнем $I_н$. Тогда для этих токов справедливы условия – сумма токов равна I_0 , напряжения на верхнем и нижнем участках одинаковы. Находя эти напряжения из вольтамперной характеристики, получим:

$$\begin{aligned} I_в + I_н &= I_0 \\ \left(\frac{I_в}{\alpha} \right)^2 &= 2 \left(\frac{I_н}{\alpha} \right)^2 \end{aligned}$$

Отсюда находим токи, а затем и напряжение на рассматриваемом участке (из вольтамперной характеристики)

$$I_в = \frac{\sqrt{2}I_0}{\sqrt{2}+1}; \quad U_2 = \left(\frac{I_в}{\alpha} \right)^2 = \frac{2I_0^2}{(\sqrt{2}+1)^2 \alpha^2} = \frac{2U_0}{(\sqrt{2}+1)^2} = 1,38 \text{ В}$$

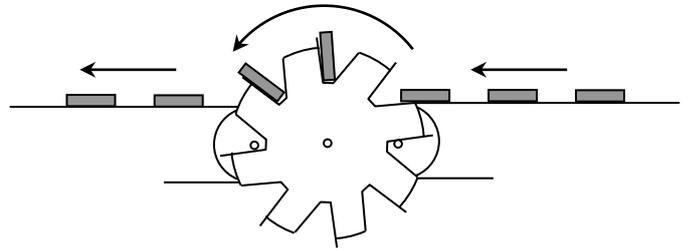
При параллельном соединении двух одинаковых ламп этот ток поделится пополам - $I_3 = 0,15 \text{ А}$, а напряжение на этом участке будет равно

$$U_3 = \left(\frac{I_3}{\alpha} \right)^2 = \left(\frac{I_0}{2\alpha} \right)^2 = \frac{U_0}{4} = 1 \text{ В}$$

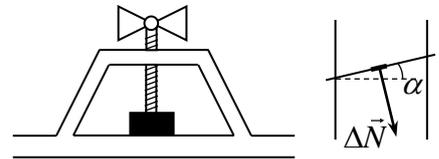
Таким образом, предельное напряжение источника, при котором еще не перегорает ни одна из ламп, составляет

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = U_0 + \frac{2U_0}{(\sqrt{2} + 1)^2} + \frac{U_0}{4} = 6,38 \text{ В}$$

3. Между двумя транспортерами нужно расположить два диска с прорезями, диаметр которых больше расстояния между транспортерами, и которые надеты на одну ось, длина которой чуть больше ширины транспортеров. Тогда транспортеры не будут мешать дискам вращаться, а поскольку ширина деталей больше ширины транспортера, детали будут входить в прорези дисков. Диски и будут перемещать детали на второй транспортер, одновременно их переворачивая (см. рисунок).



4. Пусть угол подъема резьбы - α . На шток действуют: искомая сила реакции со стороны заготовки \vec{N} , направленная вертикально вверх, момент внешних сил и сила реакции со стороны резьбы.



Пусть на малом интервале длины резьбы Δx на шток действует сила реакции $\Delta \vec{N}$, перпендикулярная резьбе (перпендикулярная - так как нет трения; см. рисунок). Сумма вертикальных проекций силы $\Delta \vec{N}$, действующих на все ее участки, компенсирует силу \vec{N} со стороны заготовки, проекции силы $\Delta \vec{N}$ на ось, перпендикулярную оси заготовки, создает момент, компенсирующий момент внешних сил M . Поэтому

$$N = \frac{\Delta N \cos \alpha}{\Delta x} l$$

$$M = \frac{\Delta N \sin \alpha}{\Delta x} l R$$

где l - длина резьбы, R - радиус штока. Деля первое соотношение на второе, получим

$$M = NR \operatorname{tg} \varphi \tag{1}$$

С другой стороны, для каждого участка резьбы длиной Δx справедливы равенства

$$\Delta x = \frac{\Delta l}{\cos \alpha}, \quad \Delta x = \frac{\Delta h}{\sin \alpha}$$

где Δl и Δh - проекции участка рассматриваемого участка резьбы на перпендикулярное и продольное направление. Поэтому суммирование таких проекций по одному витку резьбы дает

$$2\pi R \operatorname{tg} \alpha = h$$

где h - шаг резьбы (расстояние между соседними бороздками). Отсюда и формулы (1) получаем

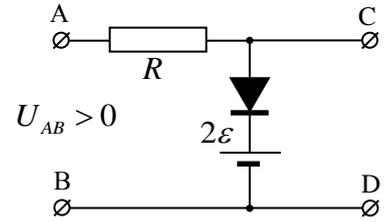
$$N = \frac{2\pi M}{h}$$

Из этой формулы следует, что, используя резьбу с маленьким шагом, можно получить существенный выигрыш в силе (который, однако, не может быть бесконечно большим (при $h \rightarrow 0$), т.к. такую

нагрузку не выдержит резьба). Из-за значительного выигрыша в силе рассмотренная конструкция используется в механических домкратах.

Для знакомых с методом возможных перемещений отметим, что этим методом задача решается буквально в одно действие.

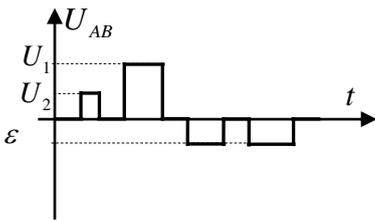
5. Если напряжение $U_{AB} > 0$ диод в правом участке будет закрыт при любых значениях этого напряжения, и этот участок можно не рассматривать (он, фактически, является разрывом цепи). Поэтому при $U_{AB} > 0$ данная в условии цепь эквивалентна цепи, изображенной на рисунке справа. (при $U_{AB} < 0$ «работает» второй участок цепи).



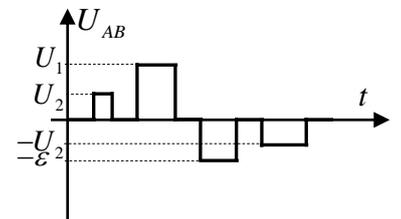
Так как сопротивление источника равно нулю, из закона Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, заключаем, что при любом токе через источник напряжение на участке CD равно ЭДС источника 2ε . Если же ток через источник не течет, цепь, фактически разорвана и напряжение на участке CD равно напряжению на участке AB. А ток через диод потечет, если напряжение AB будет больше 2ε . Таким образом, пока напряжение $0 < U_{AB} < 2\varepsilon$, выходное напряжение равно входному; как только напряжение U_{AB} превысит 2ε , выходное напряжение будет равно 2ε независимо от напряжения AB. Другими словами, рассматриваемая цепь «обрезает» скачки входного напряжения. Второй участок дает ограничения на отрицательные напряжения U_{AB} , которые по величине превосходят ε .

Это значит, что график выходного напряжения при условии, что $U_1, U_2 < \varepsilon$ совпадает с графиком входного напряжения.

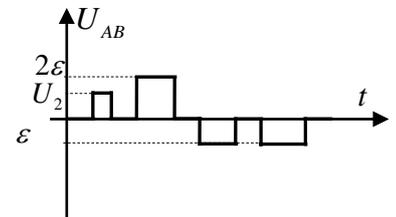
Если $U_2 < \varepsilon < U_1 < 2\varepsilon$ график имеет вид (см. рисунок справа).



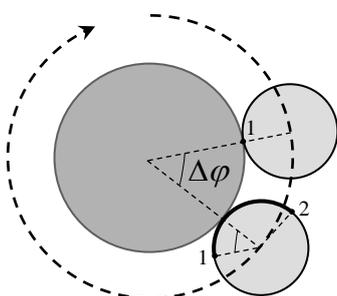
Если $\varepsilon < U_2, U_1 < 2\varepsilon$, то величиной ε будут ограничены все «отрицательные максимумы», «положительные» максимумы останутся без изменений (см. рисунок слева).



Если $\varepsilon < U_2 < 2\varepsilon < U_1$, величиной 2ε будут ограничены большие положительные максимумы, маленькие – останутся без изменений (см. рисунок справа).



Если $2\varepsilon < U_2, U_1$, все положительные максимумы будут ограничены величиной 2ε , все отрицательные – величиной ε .



6. Сначала рассмотрим движение малого диска по внешней поверхности большого. Пусть малый диск повернулся на угол $\Delta\varphi$ вокруг большого (см. рисунок). Если бы малый диск не вращался вокруг своей оси (для этого он должен был бы проскальзывать по большому), его радиус, связывающий точку, которой он касался большого диска с его центром в начальном положении, остался бы

параллельным самому себе и в конечном положении (эта точка отмечена на рисунке цифрой 1). Поэтому угол между отрезком, связывающим центры дисков в конечном положении, и радиусом малого диска, проведенным в точку 1, был бы равен $\Delta\varphi$ (на рисунке этот угол отмечен дугой). Из-за отсутствия проскальзывания рассматриваемая точка вращается по часовой стрелке и окажется в положении 2, причем из-за отсутствия проскальзывания длина дуги малого диска, связывающая точку 2 и точку касания дисков в конечном положении, будет равна длине дуги большого диска между точками касания малого диска в начальном и конечном положении, т.е. $2R\Delta\varphi$. Таким образом, длина дуги между точками 1 и 2 равна $R\Delta\varphi + 2R\Delta\varphi = 3R\Delta\varphi$, и, следовательно малый диск повернется на угол $3\Delta\varphi$ вокруг своей оси. А значит, число оборотов малого диска вокруг своей оси n будет равно

$$n = \frac{3\Delta\varphi}{2\pi}$$

Аналогично рассматривается движение малого диска по внутренней поверхности большого. Однако, как легко увидеть, углы его поворота вокруг большого и своей оси будут вычитаться (а не складываться, как в первом случае), поэтому при повороте малого диска вокруг большого на угол $\Delta\varphi$ он совершит $n_1 = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$ оборотов вокруг своей оси.