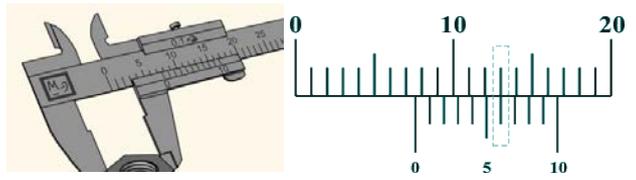


Инженерная олимпиада школьников

Задание заключительного тура 2014-2015 учебного года, 11 класс

1. Для измерений размеров используется точный измерительный прибор - штангенциркуль, который кроме основной шкалы имеет дополнительную подвижную шкалу – нониус, цена деления которой составляет 0,9 мм. Название – нониус - произошло от фамилии автора - португальского математика Нуниша (пишется Nonius).

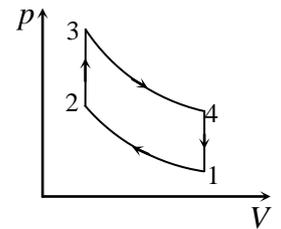


Нониус позволяет измерять размеры с точностью 0,1 мм. Объясните, как это удается сделать.

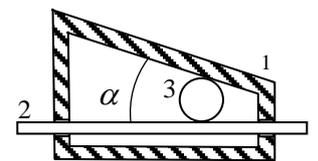
2. Оцените объем своего тела. Также оцените и обоснуйте точность этой оценки, т.е. укажите интервал вблизи данного Вами значения, внутрь которого точное значение объема обязательно попадет. Значения всех необходимых для оценки величин выберете сами, исходя из своих знаний, опыта и здравого смысла.

3. При установке люстры с тремя лампами и двумя выключателями допущена ошибка. При замыкании одного из выключателей все три лампы горят неполным накалом. При замыкании другого выключателя нормально горит одна из ламп, а две другие не горят. Тот же эффект дает одновременное замыкание выключателей. При разомкнутых выключателях все лампы не горят. Нарисуйте возможную схему выполненного монтажа. Дайте также правильную схему, чтобы полным накалом горела одна (при замыкании одного выключателя), две (при замыкании второго) или все лампы (при замыкании обоих выключателей).

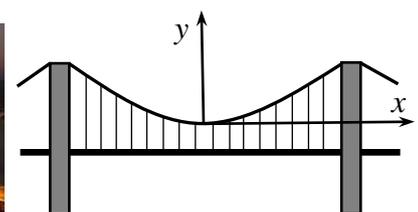
4. Двигатель внутреннего сгорания работает по циклу, состоящему из двух адиабат и двух изохор (цикл Отто). Бензин впрыскивается в цилиндр двигателя при комнатной температуре ($T_1 = 20^\circ \text{C}$, состояние 1 на рисунке). Затем на участке 1-2 смесь воздуха с бензином адиабатически (без теплообмена с окружающей средой) сжимается, нагреваясь до температуры $T_2 = 250^\circ \text{C}$. Затем смесь поджигается (участок 2-3), затем совершает работу на участке адиабатического расширения 3-4, а затем на участке 4-1 выбрасывается из цилиндра и заменяется на холодный атмосферный воздух. Найти КПД двигателя. В адиабатическом процессе давление и объем газа связаны соотношением: $pV^\gamma = const$, где γ - некоторое известное число.



5. Храповым механизмом называется устройство, допускающее движение подвижных частей (зубчатых колес, штоков и др.) только в одном направлении. Во фрикционных храповых механизмах силой, препятствующей движению, является сила трения. На рисунке представлен фрикционный храповой механизм, состоящий из полого наклонного корпуса 1 и направляющей 2, которая может перемещаться вправо или влево в отверстиях в корпусе. Между направляющей и наклонной гранью корпуса расположен маленький шарик 3. Объясните принцип работы механизма. В каком направлении – направо или налево - механизм препятствует движению направляющей? Какое трение – между шариком и направляющей, шариком и корпусом, направляющей и корпусом обеспечивает его работу? Считая, что коэффициент трения между шариком и направляющей равен μ и меньше коэффициента трения между шариком и корпусом, определите, при каком угле α храповой механизм не позволит направляющей перемещаться в одном из направлений при любой действующей на нее внешней силе.

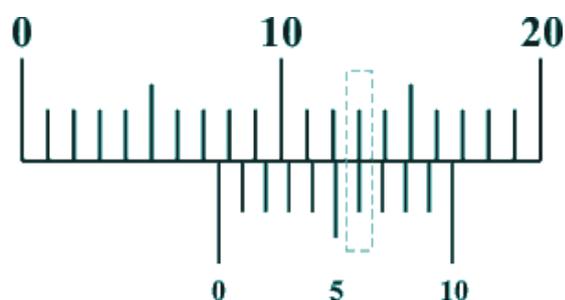
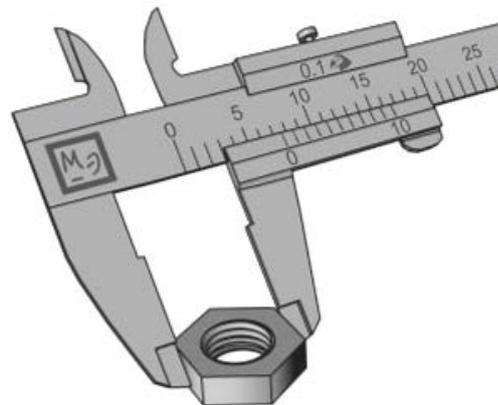


6. В настоящее время в мире широко используются висячие мосты («Акаси-Кайкё», Япония, длина основного пролета 1991 м; «Золотые ворота» США, 1280 м; «Босфорский мост», Турция; 1074 м и др.). Несущая конструкция висячего моста представляет собой гибкий элемент - «кабель» или «цепь», закрепленный на прочных опорах – пилонах, а проезжая часть подвешена к цепи на вертикальных тросах. Считая, что масса проезжей части моста много больше массы цепи, вертикальные тросы расположены близко к друг другу (так, что цепь можно считать плавной кривой), а их длины подобраны так, что силы натяжения всех тросов одинаковы, найти форму цепи (уравнение цепи в системе координат, показанной на рисунке).



Решения

1. При измерении предмет зажимают между неподвижной и подвижной частями штангенциркуля. Если нуль шкалы нониуса при этом точно попал на миллиметровое деление основной шкалы, размер предмета равен целому числу миллиметров (показанию основной шкалы). Если размер предмета не равен целому числу миллиметров, то нуль шкалы нониуса попадет между двумя делениями основной шкалы. В этом случае и работает шкала нониуса, которая позволяет определить размер предмета с точностью до 0,1 мм. Это делается так. Поскольку цена деления шкалы нониуса равна 0,9 мм, то 10 делений шкалы нониуса (полная шкала) равны 9 мм, 9 делений шкалы нониуса – 8,1 мм, 8 делений шкалы – 7,2 мм, 7 делений – 6,3 мм, 6 делений – 5,4 мм, 5 делений – 4,5 мм, 4 деления – 3,6 мм, 3 деления – 2,7 мм, 2 деления – 1,8 мм, 1 деление – 0,9 мм. Поэтому если размер предмета равен целому числу миллиметров плюс 0,9 мм, расстояние от нуля шкалы нониуса до следующего миллиметрового деления основной шкалы будет равно 0,1 мм, и с одним

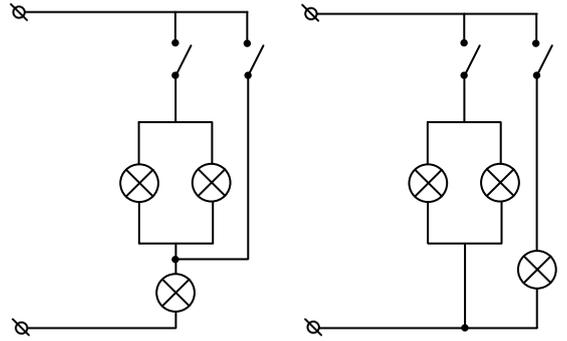


из делений основной шкалы совпадет девятое деление шкалы нониуса (поскольку оно находится от нуля шкалы нониуса на расстоянии 8,1 мм). Если размер предмета равен целому числу миллиметров плюс 0,8 мм, расстояние между нулем шкалы нониуса и следующим миллиметровым делением основной шкалы равно 0,2 мм, и с одним из делений основной шкалы совпадет восьмое деление шкалы нониуса. Если размер предмета равен целому числу миллиметров плюс 0,7 мм, расстояние между нулем шкалы нониуса и следующим миллиметровым делением основной шкалы равно 0,3 мм, и с одним из целых значений основной шкалы совпадет седьмое деление шкалы нониуса. И т.д. Таким образом, размер предмета определяется так: он равен целому числу миллиметровых делений основной шкалы, которое «перешагнул» нуль шкалы нониуса, и такому числу десятых долей миллиметра, какое деление шкалы нониуса точно совпало с одним из миллиметровых делений основной шкалы (для примера, показанного на рисунке, - 7,6 мм).

2. Проще (и точнее) всего объем тела человека оценить, как $V = m / \rho$, где в качестве плотности нужно взять плотность воды $1000 \text{ кг/м}^3 = 1 \text{ кг/л}$, поскольку тело человека содержит много воды. Таким образом, объем тела человека в литрах численно равен его весу в килограммах. Это значение приближенное, в том числе и потому, что объем тела человека меняется при дыхании. Точность этой оценки можно определить так. Объем легких взрослого человека равен 5-6 литров. При дыхании вентилируется около 1 литра объема легких. Как мы знаем, тело человека при полном вдохе плавает на поверхности воды, при полном выдохе – тонет (изменение объема тела – и соответственно средней плотности - при вдохе-выдохе используют аквалангисты для подъема или погружения). Это значит, что при

наполнении легких средняя плотность тела становится чуть меньше плотности воды, при выдохе – чуть больше. Поэтому точность нашей оценки объема человеческого тела - ± 1 л.

3. Лампы горят слабым накалом, если к напряжению бытовых электрических сетей 220 В они подключаются не параллельно, а последовательно (в этом случае напряжение на каждой из ламп будет меньше, чем 220 В). Одна из возможных схем неправильного включения ламп, показана на левом рисунке. Правый рисунок дает правильную схему включения ламп.



4. Поскольку процессы 1-2 и 3-4 – адиабатические, КПД цикла определяется соотношением

$$\eta = \frac{Q_{2-3} - Q_{1-4}}{Q_{2-3}}$$

где Q_{2-3} - количество теплоты, полученное на участке 3-2, Q_{4-1} - количество теплоты, отданное газом на участке 1-4. Поскольку процессы 2-3 и 4-1 – изохорические

$$Q_{2-3} = \alpha R(T_3 - T_2), \quad Q_{1-4} = \alpha R(T_4 - T_1) \quad (*)$$

где α - коэффициент пропорциональности, зависящий от атомности газа, T_3 и T_4 - температуры газа в состояниях 3 и 4. Из закона Клапейрона-Менделеева имеем

$$T_3 - T_2 = \frac{V_{2,3}(p_3 - p_2)}{\nu R} = \frac{V_{2,3}p_2 \left(\frac{p_3}{p_2} - 1 \right)}{\nu R} = T_2 \left(\frac{p_3}{p_2} - 1 \right),$$

$$T_4 - T_1 = \frac{V_{4,1}(p_4 - p_1)}{\nu R} = \frac{V_{4,1}p_1 \left(\frac{p_4}{p_1} - 1 \right)}{\nu R} = T_1 \left(\frac{p_4}{p_1} - 1 \right) \quad (**)$$

где $V_{2,3} = V_2 = V_3$ и $V_{4,1} = V_4 = V_1$ - объем газа в состояниях 2, 3 и 4,1 соответственно. Очевидно, отношение давлений на концах изохор одинаковое. Действительно, из уравнения адиабаты (см. указание к условию) имеем

$$p_4 = p_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^\gamma, \quad p_1 = p_2 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma$$

Поэтому давление на изохорах 2-3 и 4-1 изменяется в одинаковое количество раз

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_3}{p_2}$$

В результате из определения КПД и формул (*), (**) находим

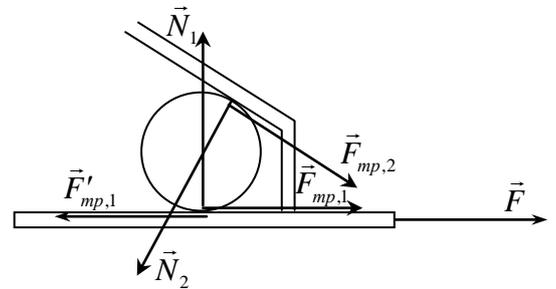
$$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{230}{523} = 0,44$$

5. Очевидно, трение будет препятствовать вытаскиванию направляющей вправо, поскольку может возникнуть эффект заклинивания – сила трения между направляющей и шариком «потянет» шарик вправо, это приведет к увеличению сил реакции, что в свою очередь увеличит трение. Нарушение ра-

боты храпового механизма рассматриваемого типа может происходить в двух местах. При малом трении между шариком и направляющей направляющую можно вытащить вправо, и шарик не будет ей мешать, но при этом не будет вращаться, поскольку вращаться ему не позволит трение между ним и корпусом. При малом трении между шариком и корпусом проскальзывание между шариком и направляющей не будет возникать, но направляющую можно вытащить вправо, вращая шарик, поскольку его вращению не мешает трение между ним и корпусом. Таким образом, и трение между направляющей и шариком, и трение между шариком и корпусом необходимы для нормальной работы храпового механизма рассматриваемого типа, причем по условию нарушаться его работа будет при проскальзывании шарика относительно корпуса (там, по условию, меньше трение).

Пусть на направляющую действует горизонтальная сила F , направленная вправо. Пока механизм работает, шарик находится в равновесии. Поэтому применим к шарика условия равновесия и исследуем возможность их нарушения.

На шарик действуют: сила трения со стороны направляющей $\vec{F}_{mp,1}$, направленная вправо и равная внешней силе, поскольку направляющая находится в равновесии, сила трения со стороны корпуса $\vec{F}_{mp,2}$, направленная вправо-вниз (по часовой стрелке, поскольку в отсутствие трения между шариком и корпусом шарик вращался бы против часовой стрелки, а трение препятствует этому вращению), сила реакции со стороны направляющей \vec{N}_1 и сила реакции со стороны корпуса \vec{N}_2 (см. рисунок). Условия равновесия шарика и направляющей дают



Уравнение сил (горизонтальная ось)

$$N_2 \sin \alpha - F_{mp,2} \cos \alpha - F_{mp,1} = 0$$

Условие сил (вертикальная ось)

$$N_1 - N_2 \cos \alpha - F_{mp,2} \sin \alpha = 0$$

Условие моментов (относительно центра шарика)

$$F_{mp,1} = F_{mp,2}$$

Условие равновесия направляющей

$$F_{mp,1} = F$$

где α - угол наклона наклонной грани корпуса (см. рисунок в условии задачи; силой тяжести шарика пренебрегаем по сравнению с силами реакции и трения). Из этой системы уравнений находим N_1 и N_2

$$N_1 = N_2 = \frac{(1 + \cos \alpha) F}{\sin \alpha}$$

С ростом внешней силы \vec{F} растут силы реакции и максимальные значения сил трения. Поэтому равновесие не нарушится при любом значении внешней силы, если выполнено условие

$$F_{mp,2} < \mu N_2 \quad \text{или} \quad \mu \geq \frac{\sin \alpha}{(1 + \cos \alpha)} = \operatorname{tg}(\alpha/2)$$

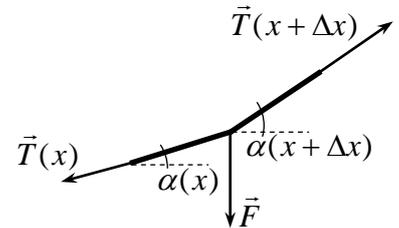
(при этом аналогичное условие между направляющей и шариком также не нарушится, поскольку силы реакции N_1 и N_2 одинаковы, а коэффициент трения между шариком и корпусом меньше коэффициента между шариком и направляющей). Отсюда находим ограничение на угол наклона грани корпуса механизма

$$\alpha \leq 2 \operatorname{arctg} \mu$$

6. Рассмотрим элемент цепи между двумя тросами, расположенными через один (см. рисунок). На этот участок действуют две силы натяжения цепи (по краям) и сила со стороны вертикального троса (в центре). Условия равновесия этого элемента дают

$$\begin{cases} T(x + \Delta x) \cos \alpha(x + \Delta x) = T(x) \cos \alpha(x) \\ T(x + \Delta x) \sin \alpha(x + \Delta x) = F + T(x) \sin \alpha(x) \end{cases}$$

где $T(x)$ - сила натяжения цепи как функция x , $\alpha(x)$ - угол наклона цепи к горизонту как функция x , Δx - расстояние между ближайшими тросами, \bar{F} - сила натяжения вертикальных тросов (которая по условию одинакова для всех тросов и которая может быть связана с массой моста M и количеством вертикальных тросов N :



$F = Mg / N$). Добавляя и вычитая из первого равенства величину $T(x + \Delta x) \cos \alpha(x)$ и деля его на Δx , получим

$$T(x + \Delta x) \left(\frac{\cos \alpha(x + \Delta x) - \cos \alpha(x)}{\Delta x} \right) = -\cos \alpha(x) \left(\frac{T(x + \Delta x) - T(x)}{\Delta x} \right). \quad (*)$$

Если считать, что Δx мало, то выражения в скобках представляют собой определения производных. Поэтому из формулы (*) находим

$$T(x) \cos' \alpha(x) = -\cos \alpha(x) T'(x) \quad \Rightarrow \quad (T(x) \cos \alpha(x))' = 0$$

где штрих обозначает производную соответствующей функции по x . Отсюда

$$T(x) \cos \alpha(x) = A \quad (**)$$

где A - некоторая постоянная (имеющая смысл горизонтальной составляющей силы натяжения цепи и которая равна горизонтальной составляющей силы, действующей со стороны цепи на пилоны). Аналогичные вычисления со вторым условием равновесия дают

$$(T(x) \sin \alpha(x))' = f$$

где $f = F / \Delta x$ удельная нагрузка на единицу длины моста. Отсюда

$$T(x) \sin \alpha(x) = fx + B \quad (***)$$

где B - некоторая постоянная. Выражая из (**) силу $T(x)$ и подставляя ее в (***), получим

$$A \operatorname{tg} \alpha(x) = fx + B$$

Но тангенс угла наклона цепи к горизонту (к оси x) есть производная уравнения цепи по переменной x . Поэтому

$$A y'(x) = fx + B$$

причем, поскольку при $x = 0$ (нижняя точка цепи) цепь расположена горизонтально, постоянная B должна быть взята равной нулю. Так как производная уравнения цепи $y'(x)$ зависит от x линейно, то y зависит от x квадратично

$$y(x) = \frac{f}{2A} x^2 + C$$

где C - постоянная, которая должна быть выбрана равной нулю, так как при $x = 0$ $y = 0$. Таким образом, цепь представляет собой параболу

$$y(x) = \frac{f}{2A} x^2$$