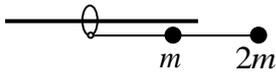


Задания

Олимпиадной части Всероссийского конкурса научных работ школьников «Юниор», Инженерные науки, 10 класс

Задания

1. Найти все целые значения x , являющиеся решениями уравнения $\sin(\pi(2x-1)) = \cos(\pi x/2)$.
2. Чтобы бороться с мышатами кот Леопольд должен ежедневно пить озверин. У кота в шкафу стоит бутылка раствора озверина в воде (бесцветная прозрачная жидкость) объемом $V = 0,5$ л с объемной концентрацией озверина $C_0 = 40\%$. Ежедневно Леопольд выпивает $v = 50$ мл раствора, и чтобы не заметили мышата, доликает в бутылку такой же объем воды. Найти объемную концентрацию озверина в бутылке после того, как кот выпил $n = 5$ раз по $v = 50$ мл жидкости и после каждого раза доливал в бутылку воду.
3. Запаянный горизонтальный цилиндрический сосуд длиной l разделен на две части подвижной перегородкой. С одной стороны от перегородки содержится 1 моль кислорода, с другой – 1 моль гелия и 1 моль кислорода, а перегородка находится в равновесии. В некоторый момент времени перегородка становится проницаемой для гелия и остается непроницаемой для кислорода. Найти перемещение перегородки. Температуры газов одинаковы и не меняются в течение процесса.
4. К маленькому невесомому кольцу шарнирно прикреплена легкая спица длиной $2l$. На середине и конце спицы закреплены точечные тела массой m и $2m$. Кольцо надето на гладкий горизонтальный стержень. В начальный момент спицу удерживали горизонтально, а затем отпустили. Найти скорость кольца в тот момент, когда спица проходит вертикальное положение. Считать, что масса спицы равна нулю.
 
5. Задан массив из N целых чисел m_i , где N – нечетно. Медианой множества чисел называется такой элемент m_i , который после сортировки этого множества по возрастанию или убыванию оказался бы ровно в середине последовательности. Например: 7 3 8 6 5 1 3 --> 1 3 3 5 6 7 8. Требуется написать программу, в которой в исходном массиве находится элемент, являющийся медианой массива. **При этом использовать сортировку массива для решения задачи запрещено.**

В первой строке входных данных содержится целое число N в пределах от 1 до 10001 (включительно): $1 \leq N \leq 10001$. Гарантируется, что N нечетно. Во второй строке содержатся N целых чисел m_i : $-10000 \leq m_i \leq 10000$, разделенных пробелами. В качестве ответа программа должна выдавать единственное число – элемент, являющийся медианой входного множества. Ниже даются примеры входных данных и результатов работы программы, а также требования к самой программе.

Примеры входных данных и результатов работы программы:

Пример входных данных	Пример результата
7 7 3 8 6 5 1 3	5
7 -5 -3 -3 -3 100 100 100	-3
5 1 2 2 1 1	1

Комментарии к задаче № 5 (давался школьникам вместе с условием)

Решением задачи является код программы, написанный на любом традиционном языке программирования, с указанием этого языка. В случае невозможности написать код на традиционном языке программирования, в качестве частичного решения может быть принят правильный алгоритм программы, оформленный в виде блок-схемы или псевдокода.

Программа должна читать входные данные из стандартного потока ввода (так, как будто эти данные вводятся с клавиатуры) и выводить результаты в стандартный поток вывода (так, как будто эти данные печатаются на экран). Программа должна корректно работать на входных данных, описанных в условиях задачи. Корректность входных данных гарантируется, проверять её дополнительно внутри программы не требуется (если в условии задачи сказано, что на вход подается целое число от 0 до 1000, не нужно дополнительно проверять, что введена, например, текстовая строка, или число вне этого диапазона).

Программа должна в результате работы выводить только тот ответ, который требуется по условию (может сопровождаться кратким текстовым оформлением или без него). Любой другой вывод результатов в процессе работы программы будет считаться ошибкой. Для лучшего понимания условий задачи и форматов входных и выходных данных, задача сопровождается несколькими примерами корректных входных данных и правильного результата работы, приведенных в разделе «*примеры входных данных и результатов работы программы*».

Написанная программа должна работать *эффективно*, то есть вычислять правильный ответ, по возможности, за наименьшее время. Программы, написанные *существенно неэффективно*, то есть затрачивающие существенно больше времени, чем эффективные решения, будут считаться неполным решением.

Код программы должен быть написан разборчиво, аккуратно, сопровождается отступами и разумным количеством комментариев в коде программы. Допускается несколько несущественных синтаксических ошибок в коде, при условии, что они не влияют на общую возможность чтения и понимания кода. Неаккуратно написанный (нечитаемый) код программы и/или большое количество синтаксических ошибок могут привести к снижению общей оценки за задачу.

Пример оформления решения (кода программы) (давался школьникам вместе с условием):

```
{pascal} //указание языка, на котором написана программа
program MyProg;
var: ...
begin
  {считываем входные данные} //комментарии в теле программы
  readln(a,b);
  ...
  {основное тело программы}
  ...
  {выводим ответ}
  writeln('Искомое число: ',x);
end.
```

Решения

1. Ответ: $x = 4t \pm 1, t \in Z$. **Решение.**

$$\sin(\pi(2x-1)) = \sin(\pi(1-x)/2) \rightarrow \begin{cases} 2x-1 = (1-x)/2 + 2m \rightarrow 5x/2 - 2m = 3/2 \\ 2x-1 = (x+1)/2 + 2n \rightarrow 3x/2 - 2n = 3/2 \end{cases}$$

Уравнение $5x - 4m = 3$ в целых числах имеет следующие решения $\begin{cases} x = 4t + 3 \\ m = 5t + 3, t \in Z \end{cases}$.

Второе уравнение $3x - 4n = 3$ в целых числах имеет решения $\begin{cases} x = 4t + 1 \\ m = 3t, t \in Z \end{cases}$.

Объединяя решения, получим ответ $x = 4t \pm 1, t \in Z$.

2. Найдем изменение концентрации раствора озверина после того как кот выпил одну порцию. По определению объемной концентрации

$$C_0 = \frac{v_0}{V}$$

где C_0 - объемная концентрация раствора, v_0 - первоначальный объем озверина в бутылке, V - полный объем раствора. Поэтому после того как кот выпил v мл раствора, в растворе осталось

$$v'_0 = C_0(V - v)$$

озверина. А поскольку объем раствора после доливания воды снова стал V , новая объемная концентрация раствора C_1 равна

$$C_1 = \frac{v'_0}{V} = \frac{C_0(V - v)}{V} = C_0 \left(1 - \frac{v}{V}\right)$$

После того как кот выпил вторую порцию озверина, его концентрация в растворе находится аналогично

$$C_2 = C_1 \left(1 - \frac{v}{V}\right) = C_0 \left(1 - \frac{v}{V}\right)^2$$

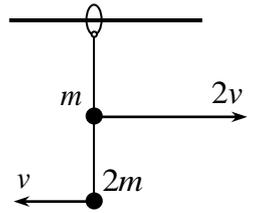
Поэтому после того как кот выпил n порций озверина (доливая после каждой воду в бутылку), его концентрация в бутылке будет равна

$$C_5 = C_0 \left(1 - \frac{v}{V}\right)^n = 23,6\%$$

3. Из условия равновесия перегородки (равенство давлений справа и слева от нее), находим, что в начальный момент она расположена на расстоянии $2l/3$ и $l/3$ от концов сосуда. После того, как гелий распределится по сосуду равномерно, его парциальные давления справа и слева от перегородки (независимо от ее расположения) будут равны. Поэтому перегородка расположится так, что парциальные давления кислорода справа и слева будут одинаковы. А поскольку количества вещества кислорода справа и слева от перегородки одинаковы, она расположится посередине. Следовательно, перемещение перегородки после перераспределения гелия составляет

$$\Delta x = \frac{2l}{3} - \frac{l}{2} = \frac{l}{6}$$

4. Поскольку внешние силы на систему тел и спицу действуют только в вертикальном направлении (силы тяжести тел и сила реакции стержня), то сохраняется проекция импульса системы тел на горизонтальное направление. Поэтому, если нижнее тело имеет в момент прохождения спицей вертикального положения скорость v (которая направлена, очевидно, налево), то среднее тело имеет скорость $2v$, направленную направо. Скорости тел найдем по закону сохранения механической энергии



$$\frac{2mv^2}{2} + \frac{m(2v)^2}{2} = 5mgl$$

Отсюда находим

$$v = \sqrt{\frac{5gl}{3}}$$

Скорость кольца проще всего найти, перейдя в систему отсчета, связанную с центральным телом. В этой системе отсчета среднее тело покоится, а нижнее и кольцо движутся в противоположные стороны с одинаковыми скоростями. С другой стороны, скорость нижнего тела в этой системе отсчета направлена влево и равна $3v$. Поэтому и скорость кольца равна $3v$, но направлена вправо. Поэтому в системе отсчета, связанной с землей, скорость кольца равна

$$v_k = 5v = 5\sqrt{\frac{5gl}{3}} = \sqrt{\frac{125gl}{3}}$$

5.

{pascal}

```
program task_10;
```

```
var
```

```
  N:integer;
```

```
  m:array[1..10001] of integer;
```

```
  i,j:integer;
```

```
  r,c1,c2:integer;
```

```
begin
```

```
  //считываем входные данные
```

```
  readln(N);
```

```
  for i:=1 to N do
```

```
    read(m[i]);
```

```
for i:=1 to N do//для каждого элемента считаем количество меньших и количество равных элементов
begin
  c1:=0;
  c2:=0;
  for j:=1 to N do
  begin
    if m[j]<m[i] then
      inc(c1);
    if m[j]=m[i] then
      inc(c2);
    end;

    if (c1<((N div 2)+1)) and ((c1+c2)>=((N div 2)+1)) then//условие того, что элемент является медианой
      r:=m[i];
    end;

  writeln(r);//выводим ответ

end.
```