

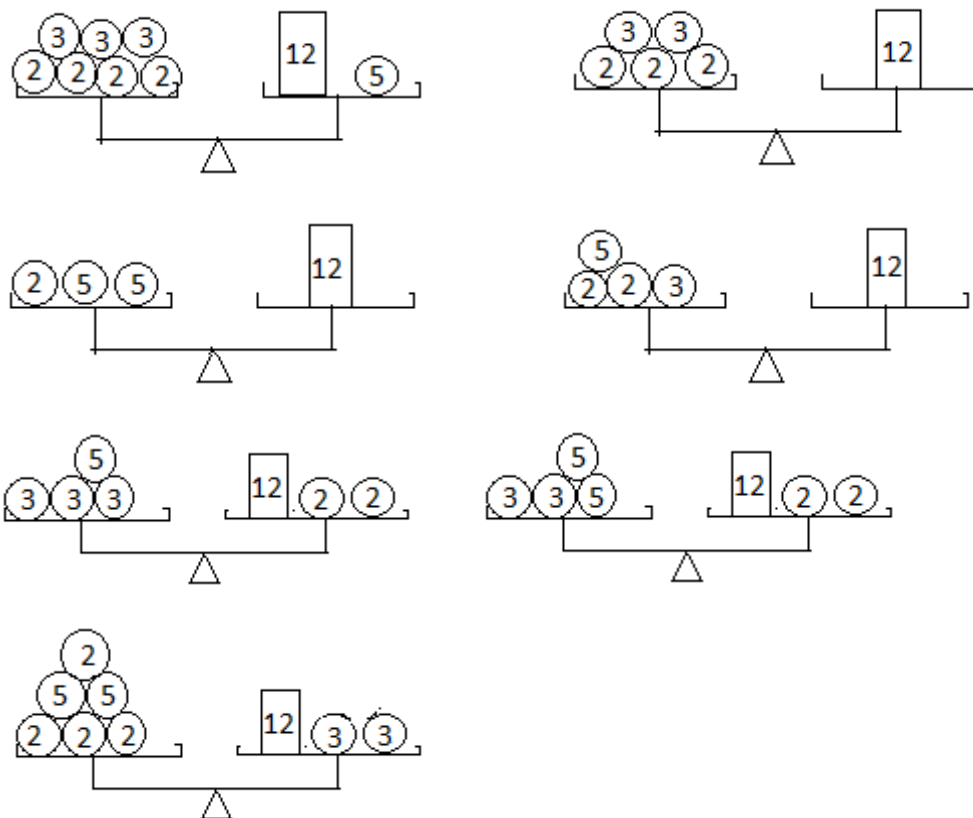
**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»
профиль «Инженерные науки»,**

Решения

Задач заключительного тура олимпиадной части конкурса. 10 класс

1. (математика) Имеются весы с двумя чашками, 4 гири по 2 кг, 3 гири по 3 кг и две гири весом 5 кг. Сколькими различными способами можно уравновесить на весах груз 12 кг, если гири разрешается располагать на обеих чашках весов?

Ответ: 7 способов



Решение: Пусть при взвешивании используется x гирь по 2 кг, y – по 3 кг, z – по 5 кг. Тогда условие равновесия имеет вид

$$\pm 2x \pm 3y \pm 5z = 12$$

Знак $+$ при неизвестной, например x , означает, что гири по 2 кг выкладываются на чаше, противоположной той, где лежит груз 12 кг. В противном случае, ставится $-$. Сохраняя прежние обозначения, полагаем, что x, y и z – целые числа, принимающие отрицательные значения, причем $|x| \leq 4, |y| \leq 3, |z| \leq 2$. При этом условие равновесия принимает форму уравнения

$$2x + 3y + 5z = 12 \quad (*)$$

Полагаем $z = t \in [-2; 2]$. Тогда, решая диофантовое уравнение,

$$2x + 3y = 12 - 5t \rightarrow \begin{cases} x = 5t - 12 - 3s \\ y = 12 - 5t + 2s, s \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Случай 1. $t = -2$

$$\begin{cases} x = -22 - 3s \\ y = 22 + 2s, s \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |22 + 3s| \leq 4 \rightarrow s = -8, -7, -6 \\ |22 + 2s| \leq 3 \rightarrow s = -13, -12, -11, -10 \end{cases} \rightarrow s \in \emptyset$$

Случай 2. $t = -1$

$$\begin{cases} x = -17 - 3s \\ y = 17 + 2s, s \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |17 + 3s| \leq 4 \rightarrow s = -5, -6, -7 \\ |17 + 2s| \leq 3 \rightarrow s = -7, -8, -9, -10 \end{cases} \rightarrow s_1 = -7 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Случай 3. $t = 0$

$$\begin{cases} x = -12 - 3s \\ y = 12 + 2s, s \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |12 + 3s| \leq 4 \rightarrow s = -5, -4, -3 \\ |12 + 2s| \leq 3 \rightarrow s = -7, -6, -5 \end{cases} \rightarrow s_2 = -5 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Случай 4 $t = 1$

$$\begin{cases} x = -7 - 3s \\ y = 7 + 2s, s \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |7 + 3s| \leq 4 \rightarrow s = -1, -2, -3 \\ |7 + 2s| \leq 3 \rightarrow s = -2, -3, -4, -5 \end{cases} \rightarrow s_3 = -2 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}, s_4 = -3 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Случай 5. $t = 2$

$$\begin{cases} x = -2 - 3s \\ y = 2 + 2s, s \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |2 + 3s| \leq 4 \rightarrow s = 0, -1, -2 \\ |2 + 2s| \leq 3 \rightarrow s = 0, -1, -2 \end{cases} \rightarrow s_5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}, s_6 = -1 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$s_7 = -2 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

2. (математика) Отрезки AB и CD , длиной 3 и 4 соответственно, являются хордами окружности радиуса 5. На них расположены точки M и N так,

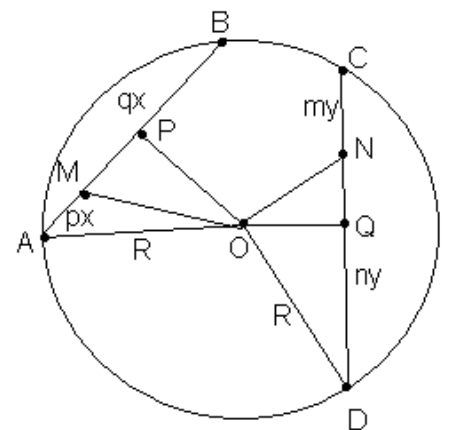
что $AM : MB = 1 : 2$, $CN : ND = 1 : 3$. Найти наименьшую и

наибольшую возможную при этих условиях длину отрезка MN .

Ответ: $d_{\min} = \sqrt{23} - \sqrt{22}$ $d_{\max} = \sqrt{23} + \sqrt{22}$

Решение. Длина отрезков $AB = a$, $CD = b$, $AM : MB = p : q$
 $CN : ND = m : n$. Точки P, Q - середины отрезков AB и DC .

Докажем, что точки M и N при любом положении отрезков AB и CD лежат на двух концентрических окружностях и найдем их радиусы.



$$CN = \frac{bm}{m+n}, \quad NQ = \frac{b}{2} - \frac{bm}{m+n} = \frac{b(n-m)}{2(m+n)};$$

$$ON^2 = NQ^2 + OQ^2 = NQ^2 + R^2 - \frac{b^2}{4} = R^2 - \frac{mn}{(m+n)^2}b^2$$

Аналогично

$$OM^2 = R^2 - \frac{pq}{(p+q)^2}a^2$$

Таким образом, расстояния от точек M и N до центра окружности постоянно и не зависит от положения отрезков AB и CD на этой окружности, т.е. точки M и N лежат на окружностях с центром в точке O с радиусами

$$r_1 = \sqrt{R^2 - \frac{pq}{(p+q)^2}a^2} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt{R^2 - \frac{mn}{(m+n)^2}b^2}$$

соответственно. Тогда минимальное расстояние между точками M и N равно $|r_1 - r_2|$, а максимальное — $r_1 + r_2$.

В варианте $p = 1, q = 2, m = 1, n = 3, a = 3, b = 4, R = 5$

3. (физика) В сосуде находится смесь одинаковых масс азота N_2 и гелия He под давлением p . Абсолютную температуру газа увеличивают вдвое, при этом все молекулы азота диссоциируют на атомы. Найти давление смеси газов при этой температуре. Молярные массы газов равны $\mu_{He} = 4$ г/моль, $\mu_{N_2} = 28$ г/моль. Газы считать идеальными.

Решение. Пусть масса гелия и азота в сосуде равна m . Тогда закон Дальтона для первоначальной смеси газов дает

$$p = \frac{\nu_{He}RT}{V} + \frac{\nu_{N_2}RT}{V}$$

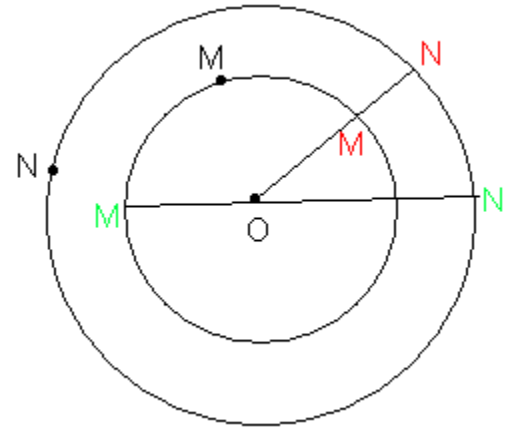
где

$$\nu_{N_2} = \frac{m}{\mu_{N_2}} = \nu; \quad \nu_{He} = \frac{m}{\mu_{He}} = 7\nu,$$

количество вещества азота и гелия в сосуде, V - его объем. Отсюда имеем для начального давления смеси

$$p = \frac{8\nu RT}{V}$$

После нагревания в сосуде будет смесь атомарного азота и гелия. Количество вещества атомарного азота после диссоциации возрастает вдвое, количество вещества гелия не меняется

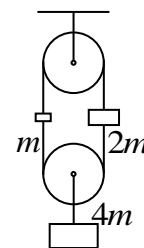


$$v'_N = 2v; \quad v'_{He} = 7v$$

Поэтому давление в сосуде будет равно

$$p' = \frac{v'_{He} R 2T}{V} + \frac{v'_N R 2T}{V} = \frac{7v R 2T}{V} + \frac{2v R 2T}{V} = \frac{18v R T}{V} = \frac{9}{4} p$$

4. (физика) Два тела массами m и $2m$ связаны веревками. Одна веревка переброшена через блок, ось которого прикреплена к потолку. На вторую веревку положили точно такой же блок, к оси которого прикрепили тело массой $4m$ (см. рисунок). Найти силу натяжения веревки, связывающей тела m и $2m$ через верхний блок. Веревки нерастяжимы и невесомы. Блоки невесомы и могут вращаться без трения.



Решение. Поскольку блоки не перемещаются (а только вращаются), ускорение тела массой $4m$ равно нулю. И, следовательно, сила натяжения нижней веревки, связывающей тела m и $2m$, равна

$$T_n = 2mg$$

Второй закон Ньютона для тел массой m и $2m$ в проекциях на ось, направленную вертикально вниз, имеет вид

$$\begin{aligned} 2mg + T_n - T_g &= 2ma \\ mg + T_n - T_g &= -ma \end{aligned} \quad (*)$$

где T_g - сила натяжения веревки, связывающей тела m и $2m$ и переброшенной через верхний блок. В (*) учтено, что ускорения тел m и $2m$ одинаковы по величине и противоположно направлены. Вычитая эти уравнения, найдем $a = g/3$. Отсюда

$$T_g = \frac{10}{3} mg$$

5.. (информатика) На вход программы подается единственное натуральное число N , не превосходящее 1000. Требуется посчитать количество различных разложений этого числа на 3 множителя, не равных 1 или N . Два разложения на множители считаются совпадающими, если все множители в нём совпадают с точностью до порядка. Все множители в разложении должны быть положительны. Так, число 8 имеет единственное разложение, удовлетворяющее условию задачи: $8=2 \cdot 2 \cdot 2$. Число 16 – единственное разложение: $16=2 \cdot 2 \cdot 4$. Число 36 имеет 3 разложения: $36=2 \cdot 2 \cdot 9$, $36=2 \cdot 3 \cdot 6$, $36=3 \cdot 3 \cdot 4$.

В единственной строке входных данных содержится целое число N в пределах от 1 до 1000 включительно: $1 \leq N \leq 1000$. В качестве ответа нужно вывести единственное число – количество разложений числа N на 3 множителя, удовлетворяющих условию задачи.

Примеры входных данных и результатов работы программы:

<i>Пример входных данных</i>	<i>Пример результата</i>
1	0
4	0
8	1
16	1
24	2
36	3
42	1

Комментарии к задаче по информатике:

Решением задачи является код программы, написанный на любом традиционном языке программирования, с указанием этого языка. В случае невозможности написать код на традиционном языке программирования, в качестве частичного решения может быть принят правильный алгоритм программы, оформленный в виде блок-схемы или псевдокода.

Программа должна читать входные данные из стандартного потока ввода (так, как будто эти данные вводятся с клавиатуры) и выводить результаты в стандартный поток вывода (так, как будто эти данные печатаются на экран). Программа должна корректно работать на входных данных, описанных в условиях задачи. Корректность входных данных гарантируется, проверять её дополнительно внутри программы не требуется (если в условии задачи сказано, что на вход подается целое число от 0 до 1000, не нужно дополнительно проверять, что введена, например, текстовая строка, или число вне этого диапазона).

Программа должна в результате работы выводить только тот ответ, который требуется по условию (может сопровождаться кратким текстовым оформлением или без него). Любой другой вывод результатов в процессе работы программы будет считаться ошибкой. Для лучшего понимания условий задачи и форматов входных и выходных данных, задача сопровождается несколькими примерами корректных входных данных и правильного результата работы, приведенных в разделе «*примеры входных данных и результатов работы программы*».

Написанная программа должна работать *эффективно*, то есть вычислять правильный ответ, по возможности за наименьшее время. Программы, написанные *существенно неэффективно*, то есть затрачивающие существенно больше времени, чем эффективные решения, будут считаться неполным решением.

Код программы должен быть написан разборчиво, аккуратно, сопровождается отступами и разумным количеством комментариев в коде программы. Допускается несколько несущественных синтаксических ошибок в коде, при условии, что они не влияют на общую возможность чтения и понимания кода. Неаккуратно написанный (нечитаемый) код программы и/или большое количество синтаксических ошибок могут привести к снижению общей оценки за задачу.

Пример оформления решения (кода программы):

```
{pascal} //указание языка, на котором написана программа
programMyProg;
var: ...
begin
  {считываем входные данные} //комментарии в теле программы
  readln(a,b);
  ...
  {основное тело программы}
  ...
  {выводим ответ}
  writeln('Искомое число: ',x);
end.
```

Решение.

```
program prog10;
var i,j,n,c:integer;
begin
  c:=0;
  {читаем входные данные}
  readln(N);
  for i:=2 to N-1 do {перебираем первый множитель}
    for j:=i to N-1 do {перебираем второй множитель, меньший или равный первому}
      if (N mod (i*j))=0 then {проверяем, что N делится нацело на произведение i*j}
```

```
if (N div (i*j))>=j then{проверяем, что третий множитель больше или равен второму}  
  inc(c);{тогда разложение удовлетворяет условию задачи и будет посчитано только 1 раз}  
  {writeln(i,' ',j,' ',N div (i*j));}  
writeln(c);{Выводим ответ}  
end
```