Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,

профиль «Инженерные науки»,

Решения и критерии оценивания

Задач олимпиадной части финала конкурса 2019-2020 учебного года

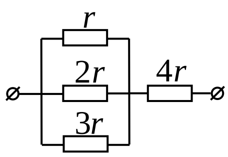
10 класс

1. В комнате висят двое плоских настенных часов, с длиной минутных стрелок 15 см и 20 см соответственно. Расстояние между началами минутных стрелок равно 1 м. Время, показываемое на часах, всегда отличается на 15 мин, хотя часовые механизмы обоих часов исправны. Найти максимальное и минимальное возможное расстояние между концами минутных стрелок.

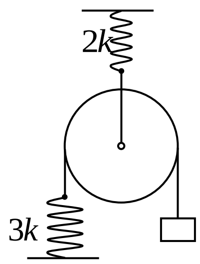
2. Два угла треугольника ABC равны 45° и 75°. Точки M, N, P – основания высот, проведенных из вершин треугольника ABC. Найти отношение площадей треугольников MNP и ABC.

3. Найти простые числа p, при которых уравнение $p^x = y^2 - 9$ имеет решение (x, y) с натуральными x и y.

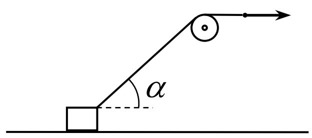
4. К электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, приложено некоторое напряжение. Известно, что мощность, которая выделяется на сопротивлении r, равна P. Найти мощность, которая выделяется на сопротивлении $4r$.



5. Через невесомый блок, прикрепленный к потолку с помощью пружины, перебросили веревку. К одному концу веревки прикрепили тело массой m, к другому пружину, второй конец которой закрепили на полу. Коэффициенты жесткости пружин $2k$ и $3k$ (см. рисунок). Насколько переместится тело по сравнению с положением, когда пружины не деформированы?



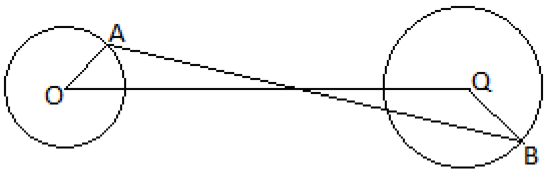
6. К телу, находящемуся на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплена нерастяжимая нить, переброшенная через блок (см. рисунок). Угол между нитью и горизонтом равен α, после блока нить горизонтальна. Какое минимальное ускорение нужно сообщить концу нити, чтобы груз сразу же оторвался от поверхности?



Решения

1. Ответ: 125 см, 75 см

Решение



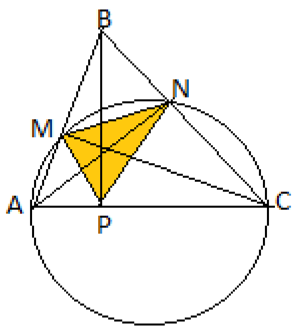
Обозначения:

$$\vec{c} = \overrightarrow{OQ} \;\; \vec{a} = \overrightarrow{OA} \;\; \vec{b} = \overrightarrow{QB}$$

Тогда $\vec{c} + \left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \overrightarrow{AB}$. В задаче требуется найти наибольшую и наименьшую возможную длину вектора $\overrightarrow{AB}$. Вектор $\vec{c}$ постоянен (не меняется во времени) и имеет длину 100 см. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в любой момент времени перпендикулярны по условию, а вектор $\vec{b} - \vec{a}$, имеющий постоянную длину $\sqrt{15^2 + 20^2} = 25$ см и начало в точке O, вращается вокруг точки O с постоянной угловой скоростью. Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет максимальную и минимальную длину в момент, когда вектора $\vec{c}$ и $\vec{b} - \vec{a}$ коллинеарные. $\left|\overrightarrow{AB}\right|_{\min} = 100 - 25 = 75$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|_{\max} = 100 + 25 = 125$

Ответ: 125 см, 75 см

2.



Предположим, что $\angle A = 75^0, \angle C = 45^0$. Тогда $\angle B = 60^0$. Точки M и N лежат на окружности, построенной на стороне AC, как на диаметре. Треугольник BMN подобен треугольнику BCA: $\angle MNA = \angle MCA$ (опираются на одну дугу), $\angle BNM = 90^0 - \angle MNA = 90^0 - \angle MCA = \angle A = 75^0$ $\angle NMC = \angle NAC$ (опираются на одну дугу), $\angle BMN = 90^0 - \angle NMC = 90^0 - \angle NAC = \angle C = 45^0$. Коэффициент k_1 подобия треугольников BMN и BCA равен отношению сходственных сторон:

$$k_1 = \frac{BN}{BA} = \cos\angle B = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, треугольник MAP подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k_2 = \cos\angle A = \cos 75^0$, а треугольник CNP подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия

$$k_3 = \cos\angle C = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Площади подобных треугольников относятся как квадраты коэффициентов подобия:

$$S_{BMN} = k_1^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{ABC},\ S_{AMP} = k_2^2 \cdot S_{ABC},\ S_{CNP} = k_3^2 \cdot S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

Тогда

$$S_{MNP} = \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \cos^2 75^0\right) \cdot S_{ABC} \to S_{MNP} : S_{ABC} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1 + \cos 150^0}{2}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$$

Ответ: $S_{MNP} : S_{ABC} = \left(\sqrt{3} - 1\right) : 4$

3. Ответ: 1) $p = 7,\ x = 1,\ y = 4$; 2) $p = 3,\ x = 3,\ y = 6$

Решение

Преобразование:

$p^x = (y-3)(y+3) \to y > 3 \to y - 3 = p^u, u \ge 0,\ y + 3 = p^v, v \ge 0, u, v \in Z, v \ge u, u + v = x$

Случай 1. $u = 0$

$y = 4 \to p^v = 7 \to p = 7, x = 1$

Случай 2. $u > 0$

$НОД\left(y-3, y+3\right) = p^{v-u} = НОД\left(y-3, (y+3)-(y-3)\right) = НОД\left(y-3, 6\right)$

Возможные значения $p^{v-u} = \{1, 2, 3, 6\}$, среди которых степенью простых чисел являются $1, 2$ и 3

Случай 2.1. $v - u = 0 \to u = v \to y - 3 = y + 3$ не реализуется

Случай 2.2. $v > u \to p^{v-u} = 2 \to p = 2, v = u + 1 \to 2^{u+v} = 2^{2u+1} = y^2 - 9 = (2^u + 3)^2 - 9 = 2^{2u} + 6 \cdot 2^u \to$
$\to 2^{u+1} = 2^u + 6 \to 2^u = 6$

Не реализуется в целых числах.

Случай 2.3.

$v > u,\ p^{v-u} = 3 \to p = 3, v = u + 1 \to 3^{2u+1} = (3^u + 3)^2 - 9 = 3^{2u} + 6 \cdot 3^u \to 3^{u+1} = 3^u + 6 \to$
$\to 2 \cdot 3^u = 6 \to 3^u = 3 \to u = 1, v = 2,\ y = 3^u + 3 = 6,\ x = u + v = 3$

4. Пусть сила тока, текущего через сопротивление $4r$ равна I. Тогда на этом сопротивлении выделяется мощность

$$P_{4r} = 4I^2 r \qquad (*)$$

Найдем мощность которая выделяется на сопротивлении r. На участке параллельно соединенных сопротивлений r, $2r$ и $3r$ ток I делится на три части так, что на всех трех резисторах будет одинаковое напряжение, а сумма трех токов равна I. Поэтому из закона Ома для участка цепи имеем

$$\begin{aligned} I_1 r &= I_2 2r \\ I_1 r &= I_3 3r \\ I_1 + I_2 + I_3 &= I \end{aligned} \qquad (*)$$

Решая систему уравнений (**), найдем

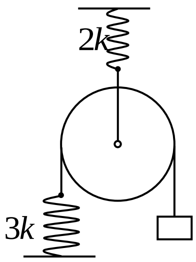
$$I_1 = \frac{6}{11} I$$

Поэтому мощность, которая будет выделяться на сопротивлении r, равна

$$P = \frac{36}{121} I^2 r \qquad (***)$$

Из сравнения формул (*) и (***) заключаем

$$P_{4r} = \frac{121}{9} P$$



5. Поскольку груз находится в равновесии сила натяжения веревки, переброшенной через блок, равна силе тяжести груза - mg. Со стороны этой веревки на блок действует удвоенная сила натяжения, т.е. $2mg$. Поэтому сила натяжения нити, удерживающей верхний блок - $2mg$. Следовательно, блок опустился по сравнению с положением, когда верхняя пружина не деформирована, на величину

$$\Delta x_1 = \frac{2mg}{2k} = \frac{mg}{k}$$

и, следовательно, на эту величину уменьшилось расстояние от пола до блока. Поэтому, если бы нижняя веревка не растягивалась, тело опустилось бы на удвоенную величину Δx_1 (один участок длиной Δx_1 освободился с одной стороны блока, другой – с другой). А поскольку нижняя веревка растянулась на величину

$$\Delta x_2 = \frac{mg}{3k},$$

то тело опустилось на

$$\Delta l = 2\Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{2mg}{k} + \frac{mg}{3k} = \frac{7mg}{3k}$$

6. Из-за того, что веревка нерастяжима, проекции ускорений ее концов на саму веревку должны быть одинаковы. Поэтому ускорение конца нити a и ускорение тела a_1 (направленное горизонтально, пока оно не отрывается от поверхности) связаны соотношением

$$a_1 = \frac{a}{\cos\alpha}$$

Чтобы сообщить телу такое ускорение сила натяжения нити должна быть равна

$$T\cos\alpha = ma_1 \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{ma_1}{\cos\alpha} = \frac{ma}{\cos^2\alpha}$$

Если при этом для вертикальной составляющей силы натяжения выполнено условие

$$T\sin\alpha \geq mg$$

то тело оторвется от поверхности. Отсюда

$$\frac{ma\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \geq mg \qquad \Rightarrow \qquad a \geq \frac{g\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$