**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,**

**профиль «Инженерные науки»,**

**Решения и критерии оценивания**

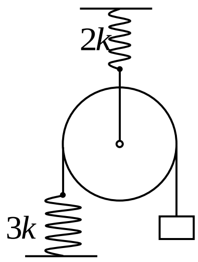
**Задач олимпиадной части финала конкурса 2019-2020 учебного года**

**11 класс**

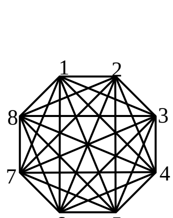
**1.** Трем товарищам, Пете, Коле и Васе, нужно попасть из пункта $A$ в пункт $B$, находящихся на расстоянии 20 км друг от друга по шоссе. У них имеется один велосипед, на котором можно передвигаться вдвоем со скоростью 10 км/час и одному – со скоростью 15 км/час. Скорость перемещения по шоссе пешком для каждого одинаковая и равна 5 км/час. Втроем передвигаться на велосипеде невозможно. Решили действовать так: выходят из пункта $A$ одновременно, Петя и Коля едут на велосипеде вместе в течении $t$ час, а Вася идет пешком. После этого Коля сходит с велосипеда и оставшуюся часть пути до пункта $B$ идет пешком. Петя мгновенно разворачивается, едет в обратном направлении, чтобы забрать идущего пешком Васю. Встретив на шоссе Васю, Петя мгновенно разворачивается, сажает Васю на велосипед, и они едут вместе до пункта $B$. По договоренности, тот кто прибудет в $B$ раньше, ждет остальных. Временем $T$ окончания операцию считается время, когда вся компания соберется в пункте $B$. Найти значение $t$, при котором величина $T$ наименьшая. Найти наименьшее значение $T$.

**2.** Один из углов остроугольного треугольника $ABC$ равен $60°$. Точки $M, N, P$ – основания высот треугольника $ABC$. Найти наибольшее значение отношения площадей треугольников $MNP$ и $ABC$.

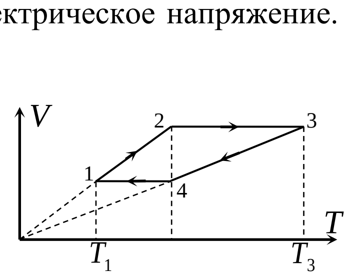
**3.** Найти целые числа $x$ и $y$, для которых $(x^2-4y^2)^2 = 24y+1$.




**4.** Через невесомый блок, прикрепленный к потолку с помощью пружины, перебросили веревку. К одному концу веревки прикрепили тело массой $m$, к другому пружину, второй конец которой закрепили на полу. Коэффициенты жесткости пружин $2k$ и $3k$ (см. рисунок). На сколько переместится тело по сравнению с положением, когда пружины не деформированы?



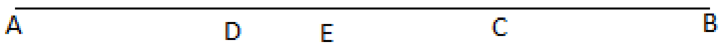

**5.** Сопротивление каждой стороны сделанного из проволоки восьмиугольника (см. рисунок) равно $r$. Каждую вершину восьмиугольника соединили с каждой другой так, что сопротивление каждого соединительного провода также равно $r$, а электрических контактов между соединительными проводами в точках их пересечения нет. Затем к вершинам 1 и 4 восьмиугольника подводят электрическое напряжение. Найти сопротивление восьмиугольника.




**6.** С одним молем одноатомного идеального газа проводят циклический процесс. График зависимости объема газа от его абсолютной температуры в этом процессе представлен на рисунке. Известны абсолютные температуры газа в состояниях 1 и 3 - $T_1 = T$ и $T_3 = 4T$. Известно также, что температуры газа в состояниях 2 и 4 одинаковы. Какое количество теплоты получает газ в процессе 1-2-3? Какую функцию может выполнять данный процесс? Какая величина может характеризовать эффективность этого процесса?

**Решения**

1.




Обозначения:

$C$ – точка на шоссе, в которой сошел с велосипеда Коля, $AC = 10t$

$D$ – точка на шоссе, в которой находился Вася в момент времени $t$, $AD = 5t$

$E$ – точка, в которой Петя посадил Васю на велосипед

По условию:

На отрезке $DC$, $|DC| = 10t - 5t = 5t$ Вася и Петя сближались со скорость $20$ км/час и в точке $E$ оказались в момент времени $t + \dfrac{10t - 5t}{20} = \dfrac{5t}{4}$.

причем $DE = 5 \cdot \dfrac{t}{4}$, $EC = 15 \cdot \dfrac{t}{4}$, $CB = 20 - 10t$, $BE = \dfrac{15t}{4} + 20 - 10t = 20 - \dfrac{25t}{4}$

Время окончания поездки для Васи и Пети

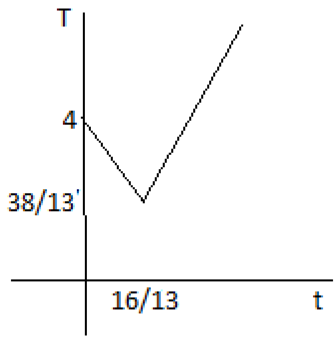
$$T_1 = t + \frac{t}{4} + \frac{20 - \frac{25t}{4}}{10} = 2 + \frac{5t}{8}$$

Время окончания поездки для Коли

$$T_2 = t + \frac{20 - 10t}{5} = 4 - t$$

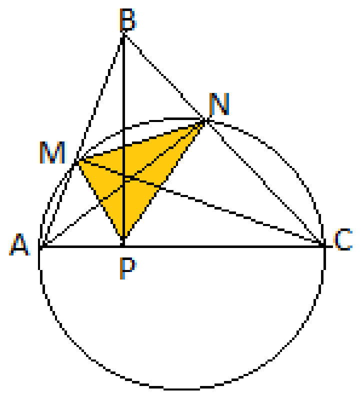
$$T = T(t) = \max\left(T_1, T_2\right) = \begin{cases} T_1 = 2 + \dfrac{5t}{8},\ t \geq \dfrac{16}{13} \\ T_2 = 4 - t,\ 0 \leq t < \dfrac{16}{13} \end{cases}$$

График функции $T(t)$ изображен на рис




Ответ: 1) $t = \dfrac{16}{13}$ час; 2) $T_{\min} = \dfrac{38}{13}$ час

2.



Обозначения:

$\angle B = 60^0,\ \angle A = \varphi,\ \angle C = 120^0 - \varphi,\ 30^0 < \varphi < 90^0$

Значениям $\varphi = 30^0, \varphi = 90^0$ соответствуют прямоугольный треугольник $ABC$ и нулевое значение площади треугольника $MNP$. Следуя геометрической задаче для 10 класса, нужно исследовать на максимальное значение функцию

$$f(\varphi) = \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 \angle A - \cos^2 \angle B - \cos^2 \angle C = \frac{3}{4} - \cos^2 \varphi - \cos^2 \left( \frac{2\pi}{3} - \varphi \right), \varphi \in \left( \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right)$$

Критические точки:

$$f' = -2\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) + 2\cos\varphi\sin\varphi = \sin 2\varphi - \sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2\varphi\right) = 0$$

На интервале $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ существует единственная критическая точка $\tilde{\varphi} = \frac{\pi}{3}$ (равносторонний треугольник), которой соответствует максимальное значение отношения $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}$, равное $\frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$

**3. Ответ:** $(\pm 1; 0),\ (\pm 3; 1),\ (\pm 3; 2)$

**Решение**

Заметим, что $y \geq 0$.

Оценка $24y + 1 = (4y^2 - x^2)^2 \geq \left(4y^2 - (2y-1)^2\right)^2 = (4y-1)^2 = 16y^2 - 8y + 1 \to y(y-2) \leq 0$

Неравенству удовлетворяет три значения $y = 0,\ y = 1,\ y = 2$.

Случай 1. $y = 0$

Уравнение $x^4 = 1 \to x = \pm 1$

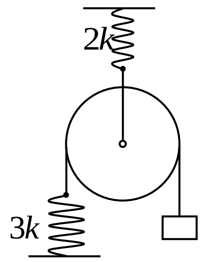
Случай 2. $y = 1$

Уравнение $(x^2 - 4)^2 = 25 \to \left[ \begin{array}{l} x^2 - 4 = 5 \to x = \pm 3 \\ x^2 - 4 = -5\ \varnothing \end{array} \right.$

Случай 3. $y = 2$

Уравнение $(x^2 - 16)^2 = 49 \to \left[ \begin{array}{l} x^2 - 16 = 7 \to x = \pm\sqrt{23}\ \varnothing \\ x^2 - 16 = -7 \to x = \pm 3 \end{array} \right.$

**4.** Поскольку груз находится в равновесии сила натяжения веревки, переброшенной через блок, равна силе тяжести груза - $mg$. Со стороны этой веревки на блок действует удвоенная сила натяжения, т.е. $2mg$. Поэтому сила натяжения нити, удерживающей верхний блок - $2mg$. Следовательно, блок опустился по сравнению с положением, когда верхняя пружина не деформирована, на величину




$$\Delta x_1 = \frac{2mg}{2k} = \frac{mg}{k}$$

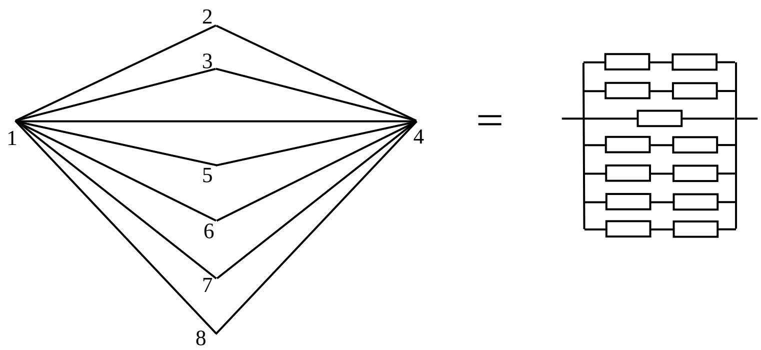
и, следовательно, на эту величину уменьшилось расстояние от пола до блока. Если бы нижняя веревка не растягивалась, тело опустилось бы на удвоенную величину $\Delta x_1$ (один участок длиной $\Delta x_1$ освободился с одной стороны блока, другой – с другой). А поскольку нижняя веревка растянулась на величину

$$\Delta x_2 = \frac{mg}{3k},$$

то тело опустилось на

$$\Delta l = 2\Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{2mg}{k} + \frac{mg}{3k} = \frac{7mg}{3k}$$

**5.** Вершины 1 и 4 рассматриваемой цепи соединяются несколькими путями – 1-2-4, 1-3-4, 1-4, 1-5-4, 1-6-4, 1-7-4, 1-8-4, притом, что все промежуточные вершины еще и соединены между собой. Но поскольку сопротивления проводников, соединяющих каждую пару вершин одинаковы, потенциалы всех промежуточных вершин одинаковы, и, следовательно, все провода, соединяющие промежуточные вершины можно выбросить. Тогда наша цепь сводится к цепи, показанной на рисунке, у которой сопротивление каждой проволочки (независимо от ее длины) равно $r$.




Поэтому сопротивление рассматриваемой цепи $R$ можно найти так

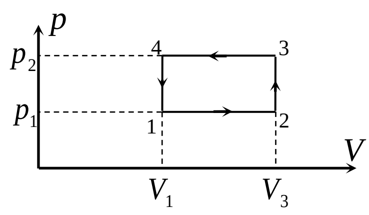
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} = \frac{4}{r}$$

Отсюда получаем

$$R = \frac{r}{4}$$

6. Построим график процесса в координатах $p-V$. Процесс 1-2 – изобарический с ростом объема, процесс 2-3 – изохорический с ростом температуры и, следовательно, давления, процесс 3-4 –

изобарический с понижением объема, процесс 4-1 – изохорический с понижением температуры, и, следовательно, давления. Цикл в координатах $p-V$ показан на рисунке.




Из этого рисунка следует, что работа газа за цикл – отрицательна, поэтому этот процесс представляет собой на тепловой двигатель, а холодильную машину. И речь должна идти не о вычислении КПД цикла, а о вычислении холодильного коэффициента, характеризующего работу любого холодильника. Очевидно, что этот коэффициент нужно определить как отношение количества теплоты, взятого процессом у холодильника (полезный результат цикла холодильной машины), к совершенной внешними силами работе (наши затраты, необходимые для реализации цикла)

$$\eta_X = \frac{Q_X}{A} \qquad (*)$$

Найдем величины, входящие в эту формулу. Для этого найдем температуру состояний 2 и 4 (по условию эти состояния лежат на одной изотерме $T_2 = T_4$).

Поскольку процессы 1-2 и 3-4 – изохорические, для них справедливы соотношения

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \text{ и } \frac{p_3}{p_4} = \frac{T_3}{T_4}$$

Но $p_3 = p_2$, $p_4 = p_1$, $T_2 = T_4$. Поэтому эти равенства можно переписать так

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \text{ и } \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_3}{T_2}$$

Деля эти равенства друг на друга, получим

$$T_2 = T_4 = \sqrt{T_1 T_3} = 2T$$

Следовательно, также в 2 раза отличаются давления $p_2$ и $p_1$, а также объемы $V_1$ и $V_3$. Поэтому работа внешних сил за цикл (равная площади цикла) равна

$$A = p_1 V_1$$

Количество теплоты, полученное газом в процессе 1-2-3, в котором газ контактирует с более холодным телом (холодильником) и получает тепло, найдем по первому закону термодинамики. Применяя этот закон к процессу 1-2-3, получим (с использованием закона Клапейрона-Менделеева)

$$Q_{1-2-3} = \Delta U_{1-2-3} + A_{1-2-3} = \frac{3}{2}\nu R\left(T_3 - T_1\right) - p_1\left(V_3 - V_1\right) = \frac{9}{2} p_1 V_1 - p_1 V_1 = \frac{11}{2} p_1 V_1 = \frac{11}{2}\nu RT$$

где $A_{1-2-3}$ - работа газа в процессе 1-2-3. Отсюда находим холодильный коэффициент в соответствии с формулой (*)

$$\eta_X = \frac{Q_{1-2-3}}{A} = \frac{11}{2} \qquad (**)$$

Формула (**) показывает, что на каждый джоуль совершенной работы, мы забираем у холодильника 5,5 джоулей тепла.