

**Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор»,
профиль «Инженерные науки»,**

Решения

задач олимпиадной части финала конкурса 2019-2020 учебного года

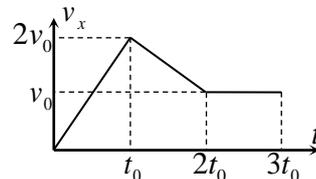
9 класс

1. Из пункта A , расположенного на шоссе, одновременно выехали автомобиль, мотоцикл и велосипедист в одном направлении. Доехав по шоссе до пункта B , автомобиль мгновенно развернулся, проехал в обратном направлении 5 км и встретил мотоциклиста. Мотоциклист, приехав в пункт B , мгновенно развернулся и, проехав еще 45 км, встретил велосипедиста. Найти расстояние между пунктами A и B , если автомобиль на обратном пути в пункт A встретил велосипедиста в 49 км от пункта B .

2. Длины сторон CB и CA треугольника ABC относятся, как 1:2. Биссектриса CE и медиана BD пересекаются в точке O . Найти отношение площадей четырехугольника $ADOE$ и треугольника ABC .

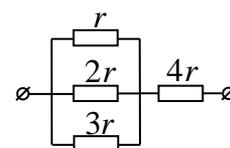
3. Найти простые числа p , для которых число $a = p^6 + 35$ имеет ровно шесть различных делителей, включая единицу и a .

4. Тело движется прямолинейно вдоль некоторой оси x . График зависимости проекции скорости тела на эту ось от времени приведен на рисунке. Найти среднюю скорость тела за время от $t=0$ до $t=3t_0$.

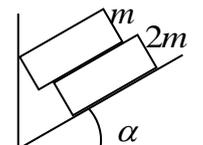


Величины v_0 и t_0 - известны.

5. К электрической цепи, схема которой представлена на рисунке, приложено некоторое напряжение. Известно, что мощность, которая выделяется на сопротивлении r , равна P . Найти мощность, которая выделяется на сопротивлении $4r$.



6. На гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом лежат друг на друге два кирпича с массами m и $2m$. Верхний кирпич упирается в гладкую вертикальную стену. При каком минимальном коэффициенте трения между кирпичами нижний кирпич не будет смещаться. Трение есть только между кирпичами!



Решения

1. Обозначения:

s – расстояние между пунктами A и B , v_1, v_2, v_3 – скорости автомобиля, мотоциклиста, велосипедиста соответственно.

Из условия задачи имеем:

$$\frac{s+5}{v_1} = \frac{s-5}{v_3}, \quad \frac{s+45}{v_2} = \frac{s-45}{v_3}, \quad \frac{s+49}{v_1} = \frac{s-49}{v_3}$$

Из этих равенств получаем:

$$\frac{s+5}{s-5} = \frac{v_1}{v_2} \quad (*)$$

$$\frac{s-49}{s+49} = \frac{v_3}{v_1} \quad (**)$$

$$\frac{s+45}{s-45} = \frac{v_2}{v_3} \quad (***)$$

Перемножая (*), (**), (***), получим

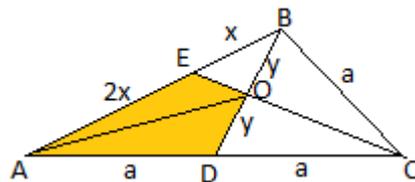
$$(s+5)(s-49)(s+45) = (s-5)(s+49)(s-45)$$

Раскрывая скобки, получим

$$s^3 + s^2 + (5 \cdot 45 - 45 \cdot 49 - 5 \cdot 49)s - 5 \cdot 45 \cdot 49 = s^3 - s^2 + (5 \cdot 45 - 45 \cdot 49 - 5 \cdot 49)s + 5 \cdot 45 \cdot 49 \rightarrow \\ \rightarrow s^2 = 5 \cdot 45 \cdot 49 \rightarrow s = 105$$

Ответ: 105 км

2. На чертеже выполнены соответствующие построения и приведены некоторые соотношения между сторонами треугольников



Треугольник BCD равнобедренный, CO – биссектриса угла, поэтому $BO = OD = y$.

$$\text{Тогда } S_{BEO} : S_{ABD} = \frac{x}{3x} \cdot \frac{y}{2y} = \frac{1}{6} \rightarrow S_{BEO} = \frac{1}{6} S_{ABD} = \frac{1}{12} S_{ABC}$$

$$\text{Тогда } S_{ADOE} = S_{ABD} - S_{BEO} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \right) S_{ABC} = \frac{5}{12} S_{ABC}$$

Ответ: $S_{ADOE} : S_{ABC} = 5 : 12$

3. Сделаем с числом a следующие преобразования:

$$a = p^6 + 35 = (p^6 - 1) + 36 = (p^3 - 1)(p^3 + 1) + 36 = (p - 1)(p + 1)(p^2 + p + 1)(p^2 - p + 1) + 36$$

Число $b = (p - 1)(p + 1)(p^2 + p + 1)(p^2 - p + 1)$ при $p \geq 5$

1) делится на 4:

(первые две скобки – четные числа)

2) делится на 9:

а) если $p = 3k - 1$, то на 3 делятся вторая и четвертая скобки;

б) если $p = 3k + 1$, то на 3 делятся первая и третья скобки;

Тогда число b , а значит и a , при простых $p \geq 5$ делится на $36 = 2^2 \cdot 3^2$ и поэтому имеет не менее девяти различных делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

Простых чисел $p < 5$ всего два: $p = 2$ и $p = 3$

Случай 1. $p = 2$

$$a = p^6 + 35 = 2^6 + 35 = 99 = 3^2 \cdot 11$$

Это число имеет шесть различных делителей: 1, 3, 9, 11, 33, 99

Случай 2. $p = 3$

$$a = p^6 + 35 = 3^6 + 35 = 764 = 2^2 \cdot 191$$

Поскольку число 191 простое, число a также имеет шесть различных делителей: 1, 2, 4, 191, 382, 764.

4. Средняя скорость тела за интервал времени $3t_0$ определяется соотношением

$$v_{cp} = \frac{S}{3t_0}$$

где S - путь, пройденный телом за это время. Путь найдем по графику – как площадь под графиком зависимости скорости от времени. Находя указанные площади на трех участках, получим:

$$S = \frac{1}{2} 2v_0 t_0 + \frac{1}{2} (v_0 + 2v_0) t_0 + v_0 t_0 = \frac{7}{2} v_0 t_0$$

Отсюда

$$v_{cp} = \frac{7}{6} v_0$$

5. Пусть сила тока, текущего через сопротивление $4r$ равна I . Тогда на этом сопротивлении выделяется мощность

$$P_{4r} = 4I^2 r \quad (*)$$

Найдем мощность которая выделяется на сопротивлении r . На участке параллельно соединенных сопротивлений r , $2r$ и $3r$ ток I делится на три части так, что на всех трех резисторах будет одинаковое напряжение, а сумма трех токов равна I . Поэтому из закона Ома для участка цепи имеем

$$\begin{aligned}
 I_1 r &= I_2 2r \\
 I_1 r &= I_3 3r \\
 I_1 + I_2 + I_3 &= I
 \end{aligned}
 \tag{*}$$

Решая систему уравнений (**), найдем

$$I_1 = \frac{6}{11} I$$

Поэтому мощность, которая будет выделяться на сопротивлении r , равна

$$P = \frac{36}{121} I^2 r \tag{***}$$

Из сравнения формул (*) и (***) заключаем

$$P_{4r} = \frac{121}{9} P$$

6. Силы, действующие на верхний кирпич, показаны на рисунке (обозначения понятны из рисунка). Из условия равновесия верхнего кирпича (для проекций на вертикальную ось) имеем

$$N \cos \alpha = mg + F_{mp} \sin \alpha \tag{*}$$

Условие равновесия нижнего кирпича (в момент начала проскальзывания) дает

$$F_{mp} = 2mg \sin \alpha \tag{**}$$

Из (*), (**) и условия начала проскальзывания $F_{mp} = \mu N$ (где μ - коэффициент трения) получаем для минимального коэффициента трения между кирпичами, при котором нижний будет в равновесии

$$\mu = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + 2 \sin^2 \alpha}$$

