МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА №17

С УГЛУБЛЁННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ ОТДЕЛЬНЫХ ПРЕДМЕТОВ

ГОРОДСКОГО ОКРУГА ЩЁЛКОВО

**Геометрические методы решения полиномиальных уравнений**

**Выполнила:**

Зобова Ирина, 11 класс

**Научный руководитель:**

Батхина Н.В., преподаватель математики, к. ф.-м. н.

Щёлково,

2019

**Введение**

Несмотря на широту рассматриваемых современной математикой вопросов и их постоянное усложнение, некоторые основные математические задачи остаются нерешёнными. К ним относится и задача о решении алгебраического уравнения с одним или несколькими неизвестными.

Целью настоящего исследования является применение методов степенной геометрии к исследованию особых точек плоских алгебраических кривых и к поиску приближенных значений корней многочленов от одной переменной.

**Основное содержание**

Как известно, алгебраическим уравнением называется уравнение вида , где Р – многочлен от переменных . Алгебраической кривой n-го порядка называется кривая, уравнение которой, после освобождения его от дробей и радикалов, записывается в декартовой системе координат в виде

(1)

Основной концепцией степенной геометрии является изучение свойств решений уравнения по показателям степеней входящих в него мономов. Таким образом, многочлену (1) ставится в соответствие множество векторных показателей степеней , для которых коэффициент. Множество S называется носителем многочлена. Вместе с ним рассматривается его выпуклая линейная оболочка Г, более известная, как многоугольник Ньютона многочлена (1). Каждому ребру построенного многоугольника соответствует укорочение многочлена (1):

, . (2)

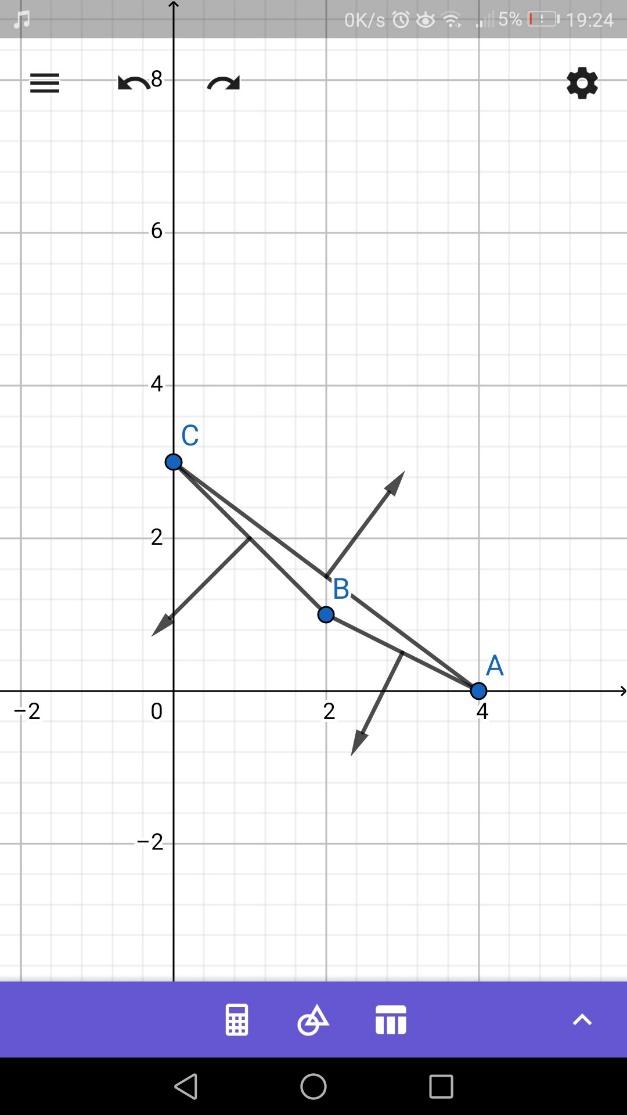
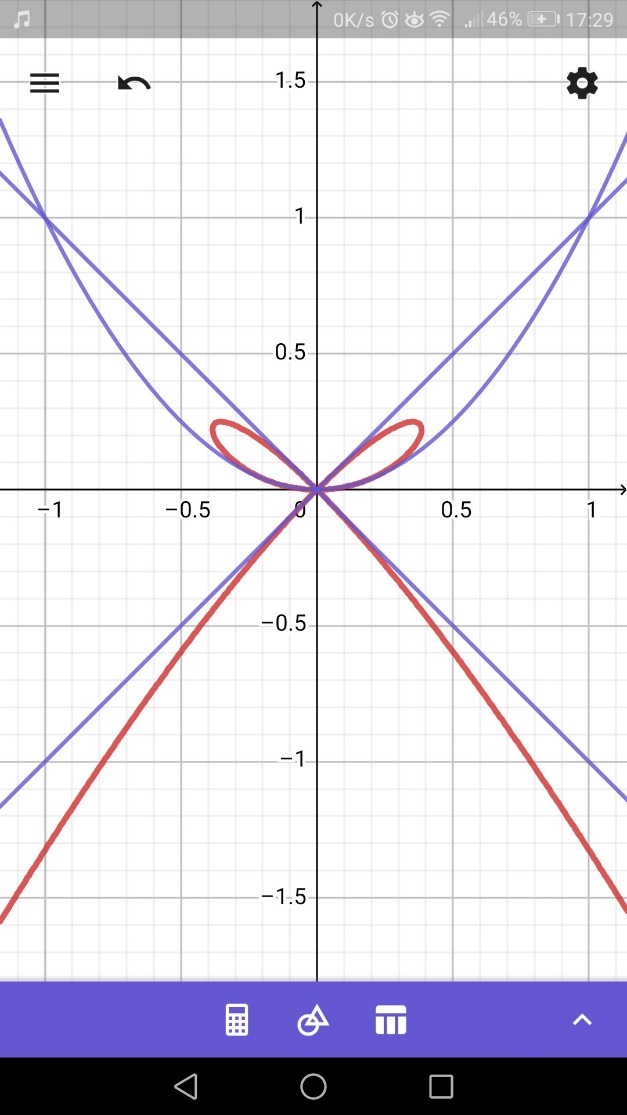
Оно является первым приближением исходного многочлена в той части пространства, которую задаёт нормальный вектор к ребру , направленный вовне многоугольника. Также укороченное уравнение обладает следующим свойством: если исходное уравнение имеет решение в виде ряда по степеням переменной, то первый член этого ряда есть решение некоторого укороченного уравнения. Этот подход используется для определения типа особых точек некоторых алгебраических кривых и разложения в ряды их ветвей в окрестности особой точки.

В качестве примера рассмотрим алгебраическую кривую четвертой степени, задаваемую следующим уравнением:

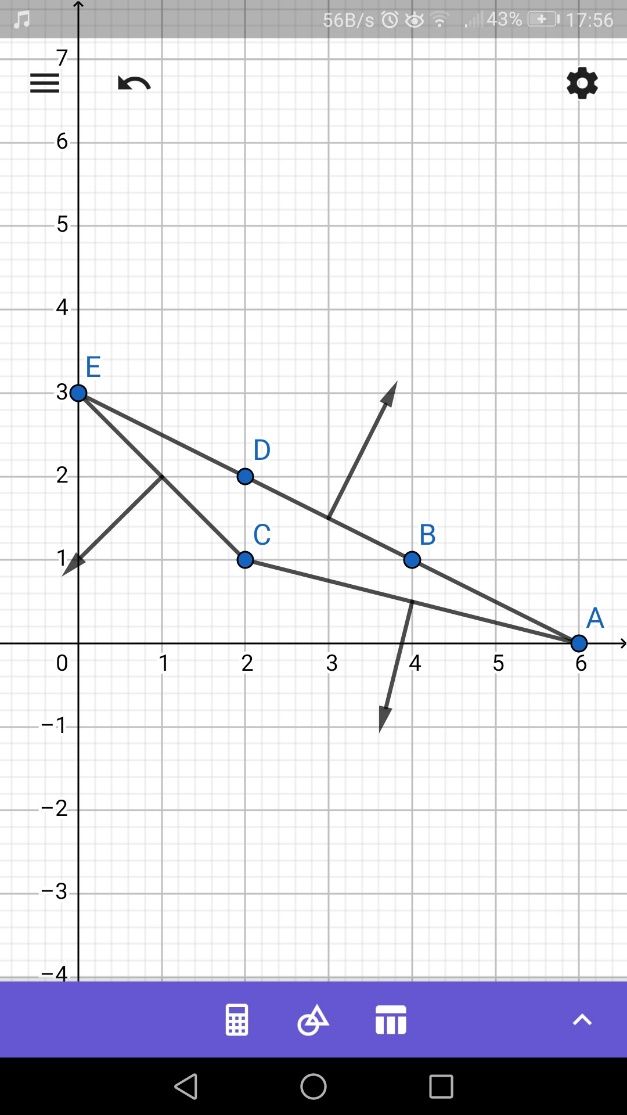
(3.0)

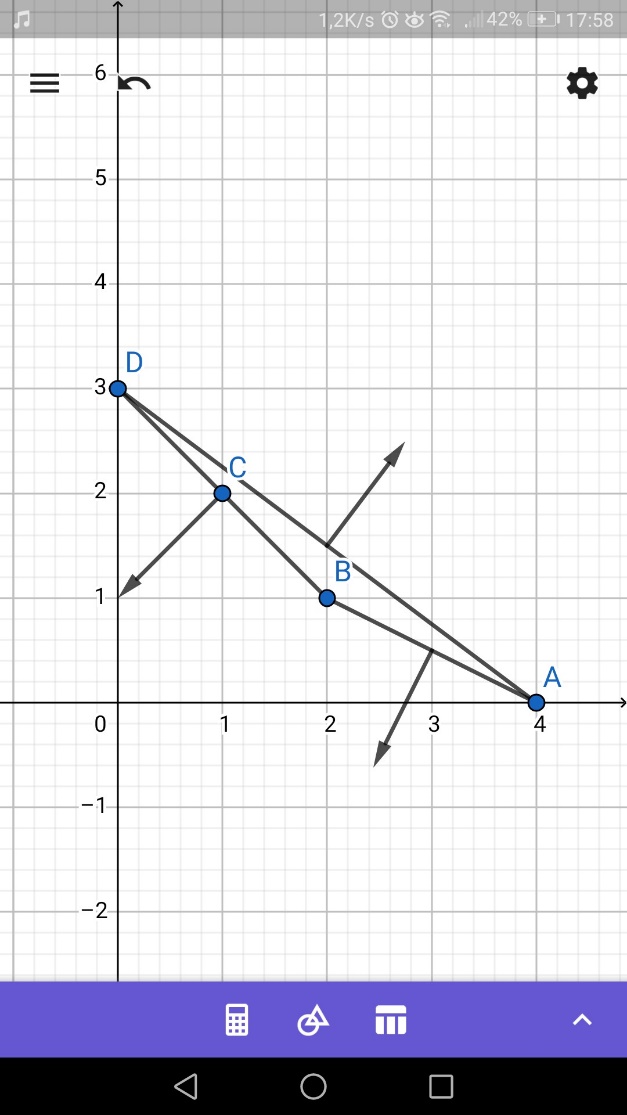
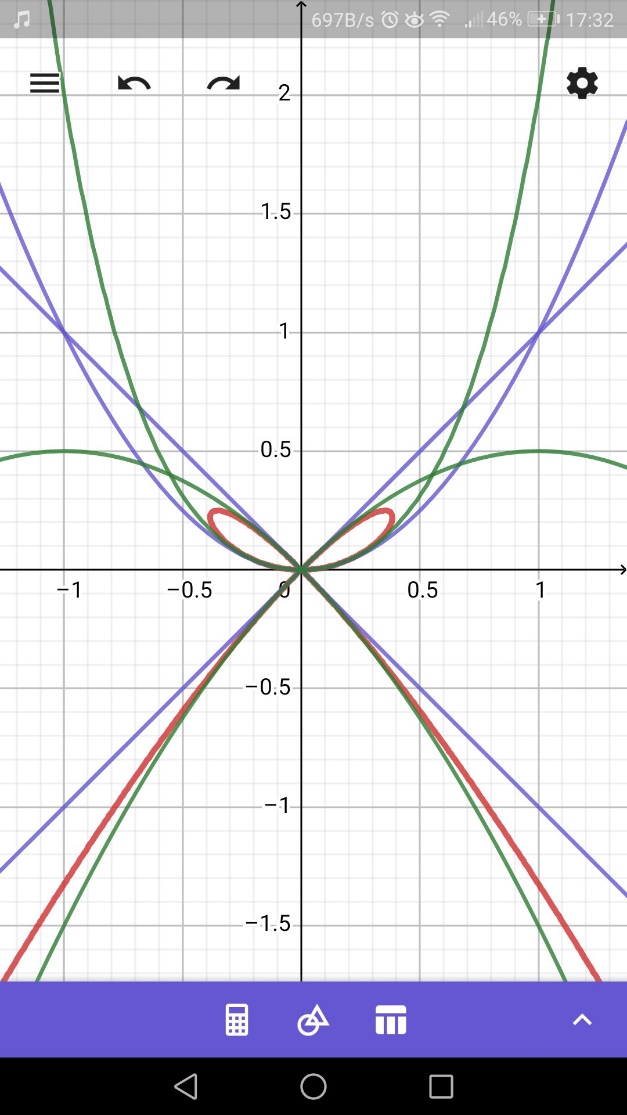
Найдём координаты особой точки – той точки кривой, в которой частные производные по x и y равны нулю:

.

Мы выбираем только указанное решение этой системы, так как только оно удовлетворяет уравнению кривой. Затем определим носитель многочлена, стоящего в левой части уравнения кривой: . Построим выпуклый многоугольник из полученного набора точек. Выбираем те ребра, нормальные векторы которых направлены в сторону начала координат, потому что только они дают информацию о поведении кривой вблизи точки (0;0). Ребру АВ соответствует укороченное уравнение , откуда ; ребру BC соответствует укороченное уравнение , откуда . Это и есть первые приближения уравнения (3.0) вблизи нуля.

На рисунке видно, что первое приближение достаточно точно описывает ветви кривой вблизи особой точки, но, если точности недостаточно, можно получить второе приближение с помощью введения поправок в первое , подстановки полученного выражения в уравнение (3.0) вместо x и y и последующего построения многоугольника Ньютона:

Определим носители полученных трёх уравнений, учитывая, что показатели степеней в двух из них не отличаются: и . Построим многоугольники Ньютона.

При нахождении второго приближения из двух или нескольких ребер, нормальные векторы которых направлены в начало координат, следует выбрать то, которое расположено ближе других к оси абсцисс. В данном случае выбираем ребро АС, которому соответствует укороченное уравнение , откуда . В другом случае выбираем ребро АВ, которому соответствуют следующие укороченные уравнения:, откуда . Таким образом получено второе приближение:

(3.1)

(3.2)

(3.3)

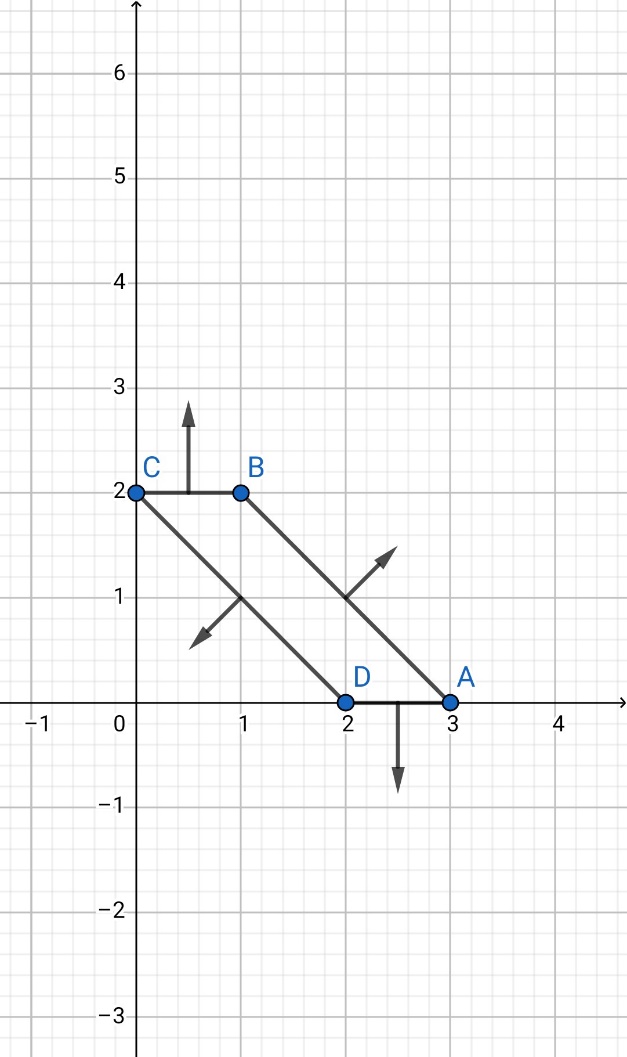
Оно, вместе с кривой и её первым приближением, показано на графике. Очевидно, последующие приближения дадут ещё более хорошие результаты вблизи особой точки кривой.

Уравнения (3.1), (3.2) и (3.3) дают первые два слагаемых в разложении ветвей банта по степеням переменной x. Зная первые два члена разложения, мы понимаем, какой будет шаг показателя степени, и следующие слагаемые можно искать проще: методом неопределённых коэффициентов.

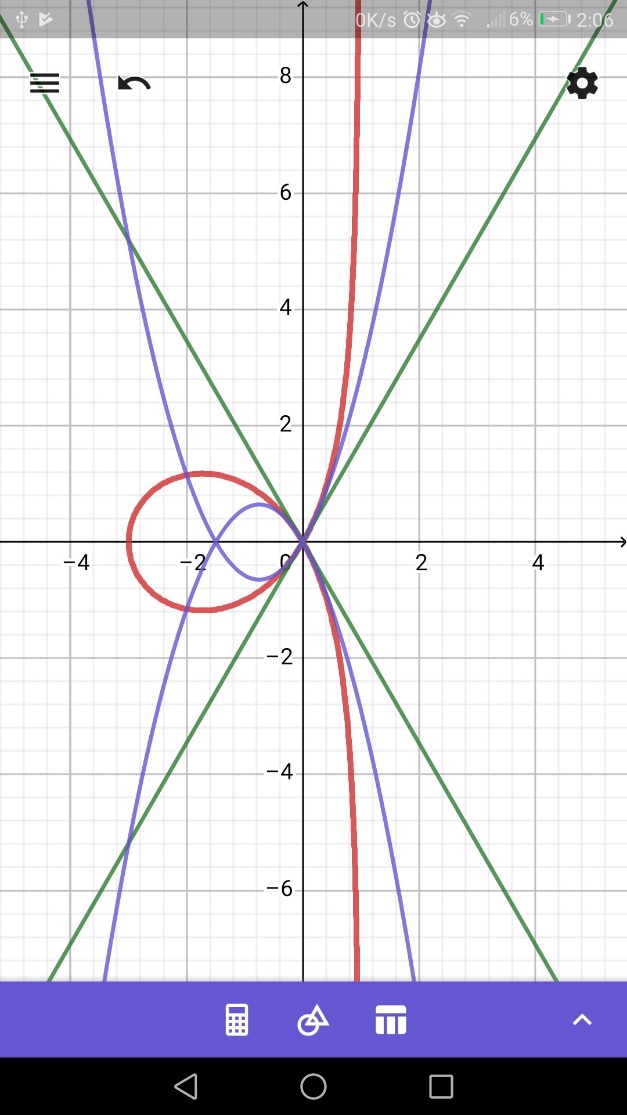
Рассмотрим также алгебраическую кривую третьей степени, называемую трисектрисой Маклорена и задающуюся уравнением:

(4.0)

Аналогичным образом находим особую точку кривой:

По носителю многочлена построим многоугольник Ньютона. Ребру CD соответствует укороченное уравнение , откуда первое приближение вблизи нуля (особой точки): . Поправочные члены дают более точные уравнения.

(4.1)

(4.2)

Некоторые кривые, называющиеся уникурсальными, допускают кроме неявного задания ещё и параметрическое. Параметрически заданная кривая имеет вид: , где – некоторые функции параметра t.

Поскольку кривая (4.0) допускает рациональную параметризацию, то можно сравнить приближения, полученные с помощью многоугольника Ньютона, с точными уравнениями, описывающими ветви кривой вблизи особой точки. Происходит это следующим образом. Через точку (0;0) проведём всевозможные прямые ; с помощью подстановки их уравнения в исходную неявную функцию (4.0) выразим функции параметрические:

Точке (0;0) соответствует значение параметра . Затем раскладываем и в ряд Тейлора в точках при :

(5)

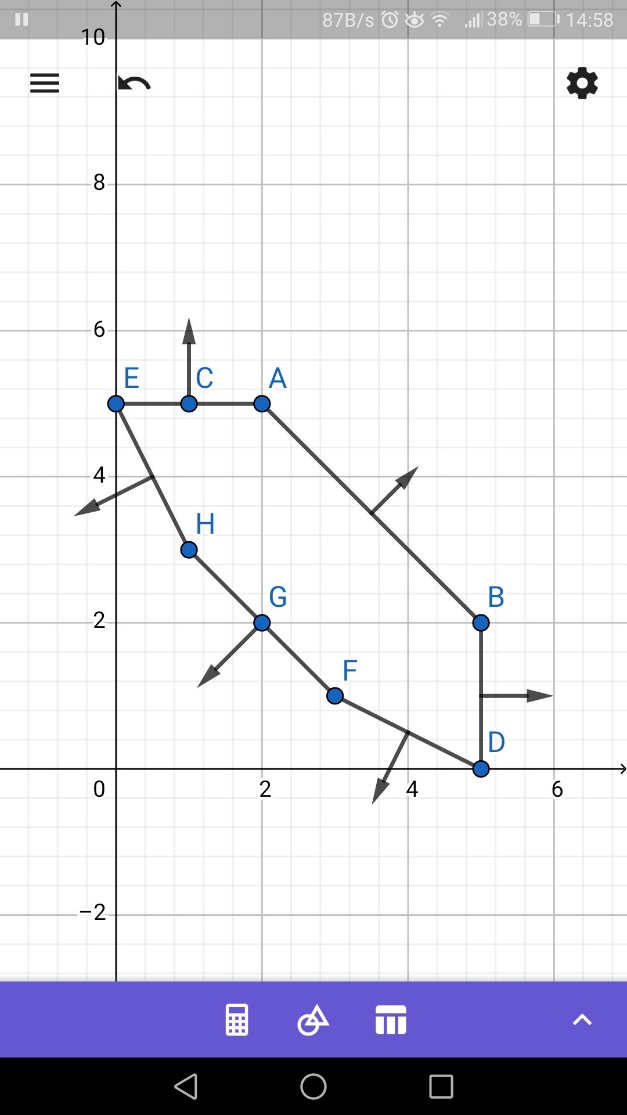
(6)

Для проверки подставляем (5) и (6) в левую и правую части равенства (4.1) вместо *x* и *y* соответственно:

Таким образом, многоугольник Ньютона дает хорошее приближение ветвей кривой вблизи особой точки вплоть до третьего с помощью введения поправочных членов. Рассмотрены и другие примеры алгебраических кривых и их приближений в особых точках – см. приложение 1.

Рассмотрим также кривую пятой степени, первое приближение которой описывает её недостаточно точно:

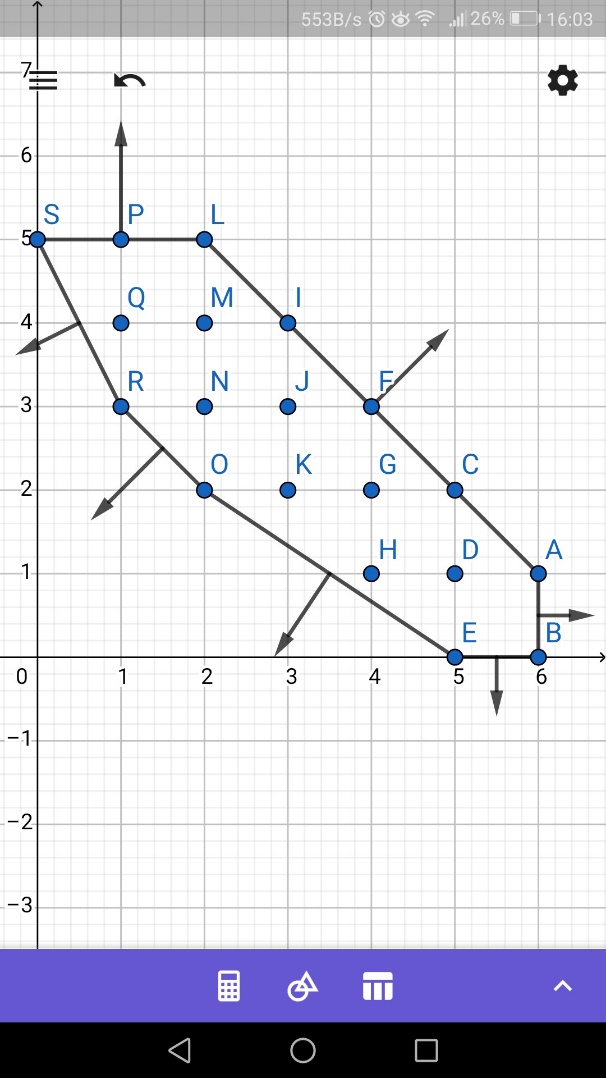
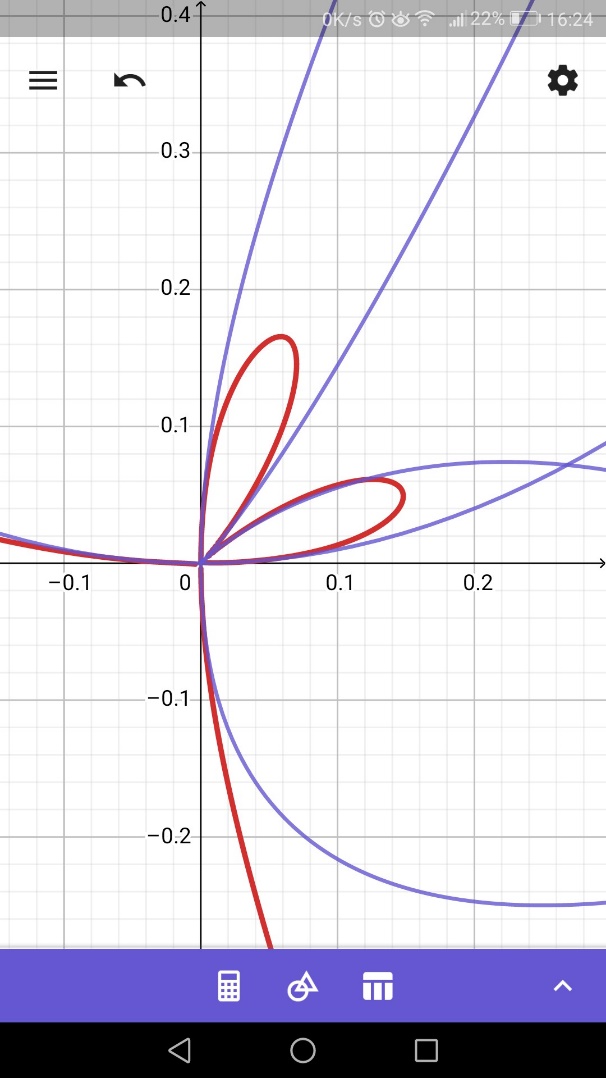
(7.0)

Носитель многочлена: . Построим многоугольник Ньютона.

Ребру EH соответствует укороченное уравнение , откуда ; ребру FD соответствует укороченное уравнение , откуда ; наконец, ребру HGF соответствует укороченное уравнение , где решением является . Однако это недостаточно точные решения, которые свидетельствуют о том, что особая точка (0;0) является точкой самокасания. Для более точного приближения выполним подстановку в исходную функцию, определим носитель полученной функции от и найдём второе приближение:

(7.1)

Носитель:

Ребру SR соответствует укороченное уравнение , откуда , ребру RO соответствует укороченное уравнение , откуда (одно из уравнений первого приближения), ребру OE соответствует укороченное уравнение , откуда . Итак, следующие приближения более точно описывают кривую (7.0) вблизи её особой точки:

(7.2)

(7.3)

(7.4)

На рисунке кривая изображена красным цветом, полученные приближения – фиолетовым.

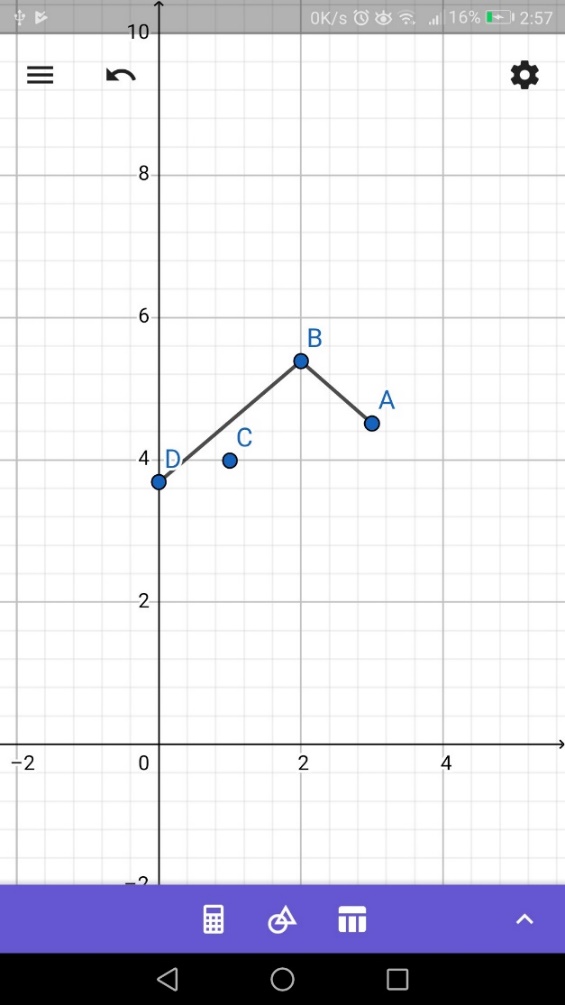
Для многочленов от одной переменной аналогом многоугольнику Ньютона выступает ломаная Адамара, которая учитывает также коэффициенты при переменных. Многочлену

(8)

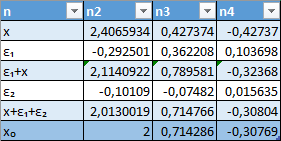
ставится в соответствие множество точек , образующих суперноситель и строится выпуклая линейная оболочка H, границей которой является ломаная линия и каждому ребру которой соответствует укороченный многочлен

, (9)

Он является первым приближением исходного многочлена в той части пространства, которую задаёт нормальный вектор к ребру , направленный вовне ломаной.

В качестве примера рассмотрим многочлен, корни которого известны заранее:

(10)

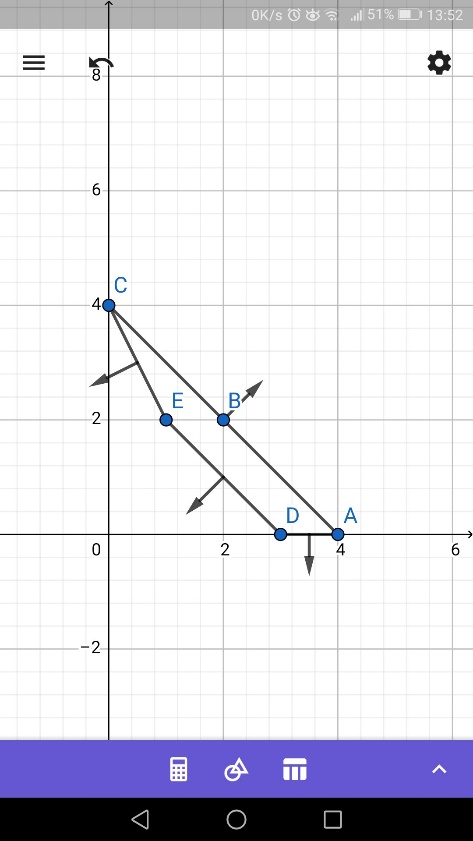
Для нахождения первого приближения определим его суперноситель: S={(),(2;),(1;),(0;)}. Построим выпуклую ломаную, натянутую на эти точки. Она состоит из двух рёбер. Ребру АВ соответствует укорочение , откуда *x=*0 (не является корнем многочлена) и . Ребру BD соответствует укорочение , откуда . Также методом введения поправочных членов были найдены вторые и третьи приближенные значения корней многочлена (10), указанные в таблице.

**Заключение**

В ходе работы методы степенной геометрии были применены для исследования ветвей плоских алгебраических кривых вблизи их особых точек, получения приближенных решений уравнений от одной переменной. Полученные значения сравнивались с точными решениями, если это было возможно. Были исследованы несколько алгебраических кривых различных порядков вблизи их особых точек.

Подводя итог работы, следует сказать, что многоугольник Ньютона и его аналоги помогают вычислять достаточно хорошие приближенные значения корней многочленов, исследовать алгебраические кривые вблизи особых точек, раскладывать в ряды ветви кривых и находить любое количество слагаемых в этих рядах методом неопределенных коэффициентов.

**Приложение 1**

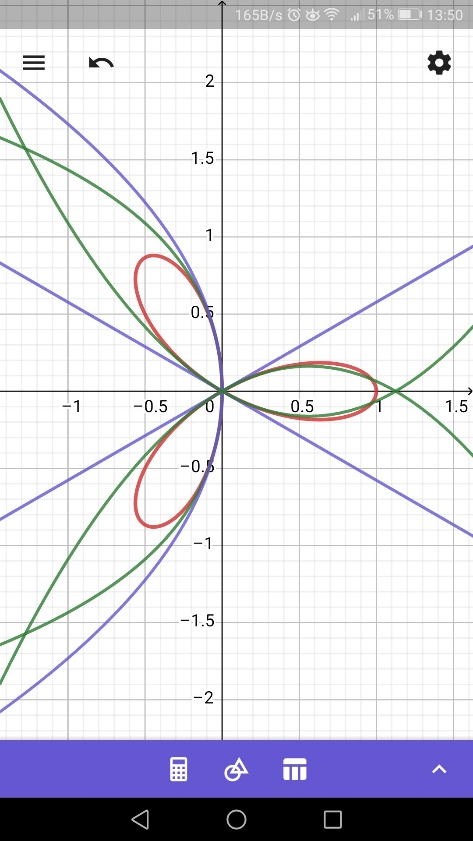
Клевер – кривая четвёртой степени:

.

Координаты особой точки - (0;0).

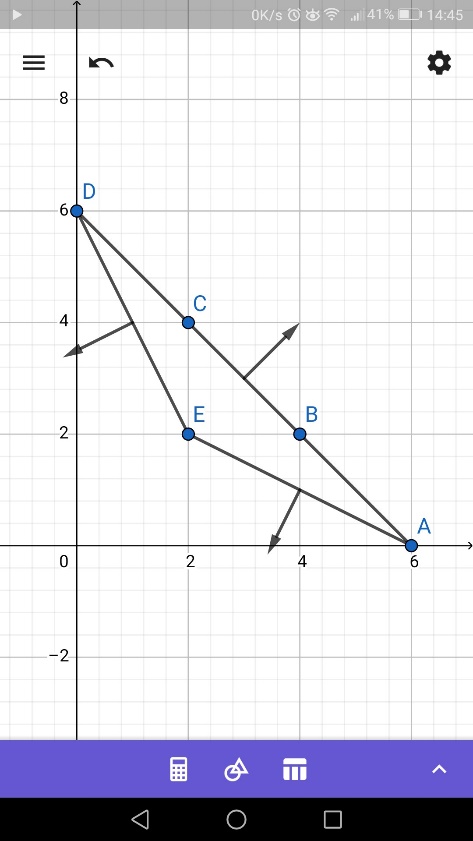
Носитель: .

Первое приближение: , .

Второе приближение:

, , .

На рисунке первое приближение выделено фиолетовым цветом, второе – зелёным, сама кривая – красным.

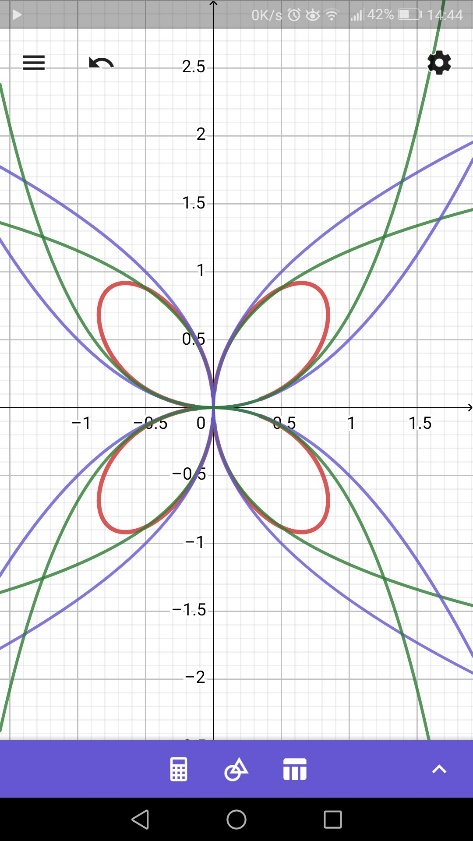


Четырёхлепестковая роза – кривая шестой степени:

Координаты особой точки – (0;0).

Носитель:

Первое приближение: , .

Второе приближение: , , , .

На рисунке первое приближение выделено фиолетовым цветом, второе – зелёным, сама кривая – красным.