**Новые свойства автомедианных треугольников**

**Сысоев Ярослав**

11 класс

МОУ «Лицей №5» им. Ю. А. Гагарина г. Волгограда

Научный руководитель: Лецко В. А., к. п. н., доцент, ВГСПУ

Изучением треугольников математика занимается с античных времен. Но интерес к этой тематике не ослабевает и в наши дни. Так, из 35 с лишним тысяч замечательных точек, представленных в онлайн «Энциклопедии центров треугольника» ([1]), подавляющее большинство открыто и описано за последние 30 лет. Наша работа посвящена изучению автомедианных треугольников, т. е. треугольников, подобных треугольникам из своих медиан. Эти треугольники облагают рядом красивых свойств. Наиболее широко известные свойства представлены, например, в [2]. В последнее время обнаружены и другие интересные свойства автомедианных треугольников ([3], [4]). Нами получено несколько новых критериев автомедианности произвольного разностороннего треугольника.

Пусть – произвольный разносторонний треугольник такой, что . Обозначим (следуя [1]) через соответственно центроид, точку Лемуана, 1-ю и 2-ю изогональные точки (точки Ферма), 1-ю и 2-ю изодинамические точки (точки Аполлония) и точку Парри (точку пересечения описанной окружности с окружностью, проходящей через центроид и точки Аполлония – окружностью Парри, отличную от – фокуса параболы Киперта).

Пусть и точки лежат на сторонах треугольника так, что . Назовем треугольник подобно-вписанным, отвечающим значению , если он подобен при подходящем соответствии вершин.   
В частности, срединный треугольник будет подобно-вписанным, отвечающим значению . Кроме срединного для любого разностороннего треугольника существует еще два подобно-вписанных треугольника, отвечающих значениям и . Назовем треугольник, возникающий на пересечении прямых высекаемым треугольником, отвечающим значению .

Нами доказано следующее утверждение:

Для любого разностороннего треугольника следующие утверждения попарно эквивалентны:

1. Треугольник C – автомедианный.
2. – прямой.
3. – прямой.
4. – основание высоты треугольника , опущенной из .
5. совпадает с .
6. Окружность Парри совпадает с окружностью Аполлония, проходящей через вершину .
7. принадлежит окружности Аполлония, проходящей через вершину .
8. Два подобно-вписанных в треугольник C треугольника равны.
9. Два подобно-вписанных в треугольник C треугольника центрально-симметричны.
10. Площадь, по крайней мере, одного подобно-вписанного треугольника, составляет от площади треугольника C.
11. Вершина, по крайней мере, одного подобно-вписанного треугольника делит соответствующую сторону исходного треугольника в отношении .
12. .
13. Не существует высекаемого треугольника, подобного треугольнику C.
14. , где – углы при вершинах .

Равносильность некоторых из вышеприведенных утверждений очевидна. Для доказательства других мы использовали аппарат аналитической геометрии и специальную параметризацию треугольников. Некоторые вычисления проводились с использованием системы компьютерной алгебры maple.

**Литература**

1. Kimberling, Clark. [Encyclopedia of Triangle Centers](http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html), [Электронный ресурс]. URL: <http://faculty.evansville.edu/ck6>/encyclopedia/ETC.html
2. Блинков А. Д. Классические средние в арифметике и в геометрии. – Издание 2-е, стереотипное. М: МЦНМО, 2013. – 168 с.
3. Georgi Ganchev, Gyulreyaz Ahmed, Marinella Petkova. Points, whose pedal triangles are similar to the given triangle, arXiv: math.HO/1210.2929 v1, 2012. [Электронный ресурс]. URL: <https://arxiv.org/abs/1210.2929>
4. Greґgoire Nicollier. Convolution Filters for Triangles, Forum Geometricorum. Volume 13 (2013), 61–85.