Задания заключительного тура

Всероссийского конкурса научных работ школьников «Юниор» 2014-2015 учебного года

секция математики, 11 класс

1. Найти множество значений функции $f(x)=\dfrac{7x^2+22x+16}{x^2+2x+2}$.

2. Решить уравнение $4x^3-3x=\cos\dfrac{3\pi}{7}$

3. Через $n_{b,c}$ обозначим число целых решений неравенства $\left|10x^2+bx+c\right|\le 20$. Найти максимальное возможное значение $n_{b,c}$. При каких значениях b и c оно достигается?

4. На столе стоит большой бокал с лимонадом по форме похожий на перевернутую правильную четырехугольную пирамиду. Когда Петя отпил из бокала 228 мл лимонада, то отметил, что уровень лимонада в бокале упал на 3 см. Тогда Петя долил в бокал 672 мл лимонада, при этом его уровень в бокале поднялся на 6 см. Петя обдумал эксперимент и понял сколько лимонада было в бокале первоначально. А вы можете ответить на этот вопрос?

Ответы и решения

1. Число $a\in E_f$, если уравнение $\dfrac{7x^2+22x+16}{x^2+2x+2}=a$ имеет решение:

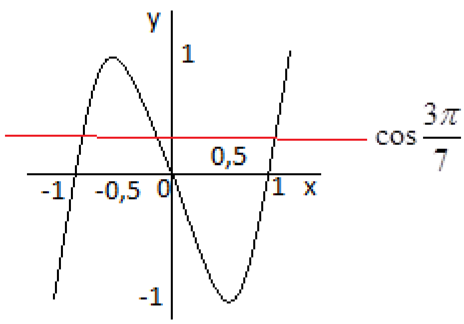
$$x^2+2x+2\ne 0\to 7x^2+22x+16=ax^2+2ax+2a\to(a-7)x^2+2(a-11)x+2a-16=0 .$$

При $a\ne 7$ квадратное уравнение имеет решение, если его дискриминант неотрицателен:

$$D/4=(a-11)^2-(a-7)(2a-16)\ge 0\to a^2-8a-9\le 0\to a\in[-1,9],\ a\ne 7 .$$

При $a=7$ уравнение примет вид: $-8x-2=0$ и оно также имеет решение $x=-1/4$. Поэтому $a=7$ также принадлежит области значений функции.

2. Построим график многочлена $P_3(x)=4x^3-3x$ на отрезке $[-1;1]$:



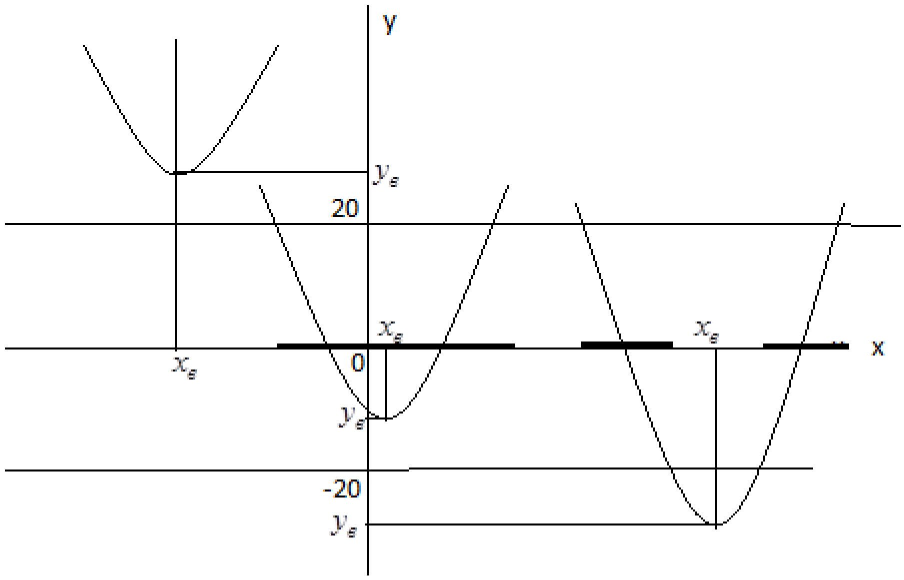
Значение $P_3(-1)=-1,\ P_3(1)=1$. Все корни уравнения $4x^3-3x=\cos\dfrac{3\pi}{7}$ располагаются на отрезке $[-1;1]$. Полагая $x=\cos t,\ t\in[0;\pi]$, имеем

$$4\cos^3 t - 3\cos t = \cos\frac{3\pi}{7} \to \cos 3t = \cos\frac{3\pi}{7} \to 3t = \pm\frac{3\pi}{7} + 2\pi k,\ k \in Z\ ,$$

т.е. $t = \pm\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{3}$. С учетом ограничения на t получим $t_1 = \frac{\pi}{7}$, $t_2 = \frac{17\pi}{21}$, $t_3 = \frac{11\pi}{21}$. Тогда

$x_1 = \cos\frac{\pi}{7},\ x_2 = \cos\frac{17\pi}{21},\ x_3 = \cos\frac{11\pi}{21}$

3. Координаты вершины параболы $x_в = -\frac{b}{20},\quad y_в = -\frac{D}{40},\ D = b^2 - 40c$. На рис. изображен график квадратного трехчлена и решения неравенства в различных случаях:



Случай 1. $y_в = -\frac{D}{40} > 20 \to D < -800$. Неравенство $\left|10x^2 + bx + c\right| \le 20$ не имеет решений, $n_{b,c} = 0$.

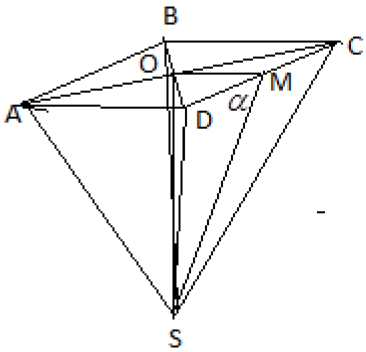
Случай 2. $-20 \le y_в = -\frac{D}{40} \le 20 \to -800 \le D \le 800$. Длина отрезка решений неравенства $\left|10x^2 + bx + c\right| \le 20$, симметричного относительно $x_в = -\frac{b}{20}$, равна $d = \frac{\sqrt{D+800}}{10}$ и с ростом D на отрезке $[-800;800]$ увеличивается. Своего максимального $d_{\max} = 4$ значения она достигает при $D = 800$ (момент касания параболы с прямой $y = -20$. Величина $n_{b,c}$ на отрезке $D \in [-800;800]$ не убывает. Максимальное число целых чисел на отрезке длины 4 равно 5 и достигается в случае, когда $x_в = -\frac{b}{20}$ целое число, т.е. $b = 20k,\ k \in Z$. Тогда

$D = 800 = b^2 - 40c \to 800 = 400k^2 - 40c \to c = 10k^2 - 20$.

Случай 3. $y_в = -\frac{D}{40} < -20 \to D > 800$. Тогда множество решений неравенства $\left|10x^2 + bx + c\right| \le 20$ представляет два отрезка, симметричных относительно $x_в = -\frac{b}{20}$, с общей длиной

$d=\frac{\sqrt{D+800}}{10}-\frac{\sqrt{D-800}}{10}=\frac{160}{\sqrt{D+800}+\sqrt{D-800}}$, которая убывает с ростом D . Величина $n_{b,c}$ также не возрастает на полуоси $D>800$.

4.



Обозначения: O - центр квадрата основания, $h=SO$ - первоначальная высота жидкости, $\measuredangle OMS=\alpha$ - угол наклона грани к основанию, V - первоначальный объем жидкости, $a-$ сторона основания. Тогда $a=2hctg\alpha\to V=\frac{4}{3}ctg^2\alpha\cdot h^3=k\cdot h^3$, где $k=\frac{4}{3}ctg^2\alpha$. Условия задачи приводят к системе:

$$\begin{cases} k\cdot h^3=V \\ k(h-3)^3=V-228 \\ k(h+3)^3=V+444,\ h>3 \end{cases}\to\begin{cases} k\left(h^3-(h-3)^3\right)=228 \\ k\left((h+3)^3-(h-3)^3\right)=672 \end{cases}\to\begin{cases} k\left(3h^2+9\right)=112 \\ k\left(3h^2-9h+9\right)=76 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kh=4 \\ k\left(3h^2+9\right)=112 \end{cases}\to 3h^2-28h+9=0\to h=\left[\begin{array}{l} 9 \\ 1/3 \end{array}\right.\to h=9\to k=\frac{4}{9}\to V=k\cdot h^3=324$$

Ответ: 324 мл