**Задания заключительного тура**

**Всероссийского конкурса научных работ школьников «Юниор» 2014-2015 учебного года**

**секция математики, 9 класс**

**1.** Найти целые числа $m$ и $n$, для которых $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n=\left(7+5\sqrt{2}\right)^m$.

**2.** Петя и Вова совершают утреннюю пробежку с постоянной скоростью, одновременно и по одному маршруту: от своего дома до дома друга и обратно. Первый раз Петя встречает Вову на расстоянии 500 м от своего дома, второй раз – бегущим навстречу на расстоянии 600 м от дома Вовы. Найти расстояние между домами Пети и Вовы. Найти отношение скоростей Пети и Вовы.

**3.** Найти отношение первого члена и разности арифметической прогрессии $\{a_n\}$, для которой $S_m:S_n=\left(3m^2+2m\right):\left(3n^2+2n\right)$ для любых натуральных $m$ и $n$, где $S_m$ и $S_n$ - суммы $m$ и $n$ первых членов прогрессии соответственно.

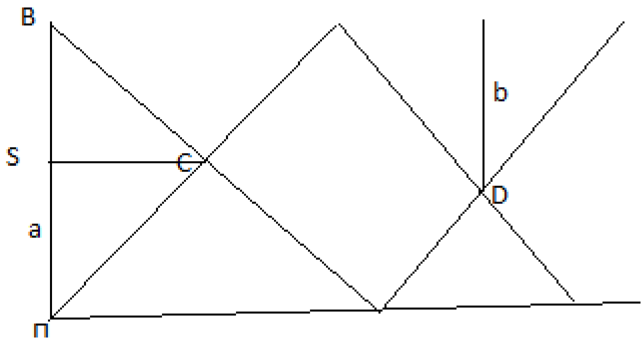
**4.** Отношение длин параллельных сторон $BC$ и $AD$ трапеции $ABCD$ равно $1:3$. Диагонали $BD$ и $AC$ пересекаются в точке $O$. Найти отношение площадей треугольника $AOD$ и трапеции.

## Ответы и решения

**1.** $\left(1+\sqrt{2}\right)^2=\left(3+2\sqrt{2}\right),\ \left(7+5\sqrt{2}\right)=\left(3+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)=\left(1+\sqrt{2}\right)^3$

Тогда $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}=\left(1+\sqrt{2}\right)^{3m}\to 2n=3m\to\begin{cases} n=3k, \\ m=2k,\ k\in Z\end{cases}$

**2.** Пусть $a$ - расстояние от дома Пети при первой встрече, $b$ - расстояние до дома Вовы при второй встрече, $S$ - расстояние между домами, $V_1-$ скорость бега Пети, $V_2-$ скорость бега Вовы.




$\frac{a}{V_1}=\frac{S-a}{V_2}$ - время первой встречи (точка C на рисунке)

$\frac{S+b}{V_1}=\frac{2S-b}{V_2}$ - время второй встречи (точка D на рисунке)

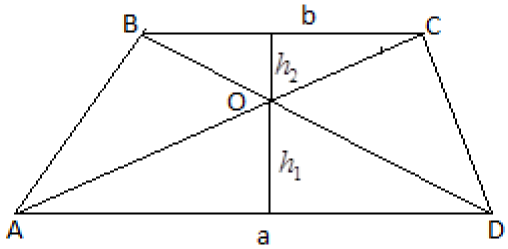
$\frac{V_2}{V_1}=\frac{S-a}{a}=\frac{2S-b}{S+b}\to S=3a-b\to V_1:V_2=a:(2a-b)$

Так как $a=500$ и $b=600$, то $S=900$ , $V_1:V_2=500:(1000-600)=5:4$

3. Положим $n=1$ . Тогда $S_m=a_1(3m^2+2m)/5$ для любых натуральных $m$ .

С другой стороны, $S_m=\dfrac{a_1+a_m}{2}\cdot m=\dfrac{2a_1+d(m-1)}{2}\cdot m=\dfrac{d}{2}m^2+(a_1-d/2)m$. Сравнивая коэффициенты квадратного трехчлена, приходим к системе: $\begin{cases}3a_1/5=d/2\\2a_1/5=a_1-d/2\end{cases}\to d=\dfrac{6a_1}{5}\to a_1:d=5:6$

4.




Длины сторон $AD=a,\quad BC=b$ . $\triangle ADO\sim\triangle CBO$ с коэффициентом подобия $k=a:b$.

$$h_1:h_2=a:b\to h_1:(h_1+h_2)=a:(a+b).$$

Площадь трапеции $S_{ABCD}=\dfrac{(a+b)(h_1+h_2)}{2}=\dfrac{a+b}{2}h_1\left(1+\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{(a+b)^2}{a^2}\cdot\dfrac{ah_1}{2}=\dfrac{(a+b)^2}{a^2}\cdot S_{AOD}$

Отсюда $S_{AOD}:S_{ABCD}=a^2:(a+b)^2=\dfrac{a^2/b^2}{(1+a/b)^2}=\dfrac{k^2}{(1+k)^2}$ .

Так как $k=3$, то $S_{AOD}:S_{ABCD}=9:16$.