Олимпиадное задание

Заключительного тура Всероссийского конкурса научных работ школьников

Юниор-2013 года

по математике

Олимпиадное задание для школьников 11 класса, заключительный тур 2013 г.

1. На базаре покупали кур, уток и гусей, всего 36 штук, по цене 80 р. за курицу, 150 р. за утку и 200 р. за гуся. Истратили на покупку 4300 р. Сколько было куплено кур, уток и гусей?

2. При каких значениях a объединение $\left[\begin{array}{l} 3\cos 2x + 5\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = a, \\ \cos 2x = ctg^2 x - 1 \end{array}\right.$ имеет не менее 10 решений на интервале $(0;2\pi)$?

3. Точка M расположена внутри куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a так, что объемы пирамид MAA_1B_1B, MAA_1D_1D и $MA_1B_1C_1D_1$ относятся как $1:2:3$ соответственно. Найти наименьшее возможное расстояние точки M до вершины D.

Ответы

Задача 1. 20 кур, 10 уток, 6 гусей.

Задача 2. $a \in \left(-\frac{97}{24};-2\right) / \left\{\pm\frac{5\sqrt{2}}{2};-3\right\}$

Задача 3. $d_{\min} = a\sqrt{\frac{6}{7}}$ (внутри)

Олимпиадное задание для школьников 10 класса, заключительный тур 2013 г.

1. Сколько целых неотрицательных решений имеет система: $\begin{cases} x+y+z+u=15 \\ y+2z+3u=18 \end{cases}$?

2. При каких значениях a корни уравнения $(x-1)(x-a)(x+2a+1)=0$ могут быть тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

3. В основании $SABC$ лежит треугольник ABC, длины сторон BC, CA и AB равны $3, 3$ и 2. Длины боковых ребер SA, SB и SC равны $1, 4$ и 4 соответственно. Найти длину отрезка, соединяющую середины ребер SC и АВ.

Ответы

Задача 1. 33 решения

Задача 2. $a_1=0,\ a_2=-3,\ a_3=-\frac{3}{5}$

Задача 3. $d^2=\frac{a^2+b^2-c^2+a_1^2+b_1^2-c_1^2}{4}\to d=\frac{\sqrt{15}}{2}$

Олимпиадное задание для школьников 9 класса, заключительный тур 2013 г.

1. Доказать, что если выражение $3mn-5pq$ делится на $m+p$ для целых $m,n.p$ и q, то $3pn-5mq$ также делится на $m+p$.

2. Какую величину необходимо прибавить к выражению $\left(n^2-1\right)^{2012}\cdot\left(n+1\right)^{2013}$, чтобы полученная сумма была кратна натуральному числу n?

3. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB=AC)$ через середину основания BC проведена прямая, пересекающая сторону AC и продолжение стороны AB в точках N и M соответственно. Известно, что длина отрезков MB и NC равна 4 и 3. Найти длину боковой стороны треугольника ABC.

Ответы

Задача 2. $An-1$ для любого $A\in Z, n>1$

Задача 3. 1) 24 2) $\frac{24}{7}$