Олимпиада «Росатом» 2014 – 2015 учебного года

В течение 2014 – 2015 учебного года Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» проводил традиционную физико-математическую олимпиаду школьников «Росатом». Олимпиада проводилась в несколько туров в Москве и на 33 выездных площадках (во многих из них расположены научные и промышленные предприятия атомной отрасли) для школьников 7 – 11 классов. В олимпиаде принимали участие более 15 тысяч участников. Ниже приведены задания заключительного тура олимпиады «Росатом» по математике и физике для школьников 11 класса. Задания олимпиады «Росатом» для школьников 7 – 10 классов можно найти на сайте олимпиады[1].

Задание заключительного тура

Математика

1. Найти наибольшее значение выражения $x-2y$ для всех чисел $(x;y)$, удовлетворяющих уравнению

$$4x^2+9y^2=25.$$

2. Найти все решения $(x;y)$ уравнения

$$\left(2\sin(x+y)+3\right)\left(\cos\left(2x-y\right)-1\right)=-10,$$

лежащие на прямой $6x+5y=15\pi$.

3. Найти зависимость от n числа целых неотрицательных решений уравнения

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=m$$

при $m=2$ и $m=3$. При каком n число решений для $m=3$ будет в четыре раза большим, чем число решений для $m=2$?

4. В гостиной есть двое часов с боем, показывающих разное время. Каждый час они производят звуковые сигналы в количестве, на которое указывает часовая стрелка, при этом минутная стрелка направлена на 12. Интервал между сигналами для первых часов 3 с, для вторых – 4 с. Часы начали и закончили бой одновременно. Петя, находясь в соседней комнате, насчитал 13 ударов, принимая совпадающие сигналы за один. Какое время показывали первые и вторые часы в момент первого удара боя? Продолжительность одного сигнала мала и её можно не учитывать, качество сигнала у обоих часов одинаковое.

5. Для всех целых $k<0$ найти целые решения x и y системы уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy^2-ky^2=0, \\ x^2-xy+ky^2=0. \end{cases}$$

6. Волк окружён собаками, расположенными в точках M, N, P и Q на сторонах квадрата $ABCD$,

$$M\in[A;B],\ N\in[B;C],$$
$$P\in[C;D],\ Q\in[D;A]$$

[1] www.mephi.ru/schoolkids/olimpiads/rosatom

так, что

$$AM : MB = BN : NC =$$
$$= CP : PD = DQ : QA = 1 : 3.$$

Волк, находящийся внутри квадрата в точке пересечения прямых MP и NQ, может бежать со скоростью $v_в$ по прямой в любом направлении. Собаки бегают только по сторонам квадрата со скоростью, не превосходящей $v_с$. Волк может вырваться из окружения, если на границе квадрата встретит не более одной собаки. При каких значениях отношения $v_с/v_в$ волк имеет шанс спастись?

Физика

1. В двух полупространствах созданы однородные магнитные поля с индукциями $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ ($B_2 = 2B_1$), векторы которых параллельны. Частица с зарядом q и массой m находится на границе раздела полей и имеет скорость $\vec{v}_0$, направленную перпендикулярно границе раздела (рис. 1). Найти среднюю скорость смещения частицы вдоль границы раздела полей за большое время.

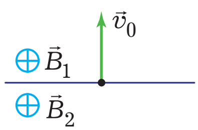

Рис. 1

2. Цилиндр объёмом V разделён тремя подвижными поршнями на четыре отсека, объёмы которых относятся как 1:1:1:2 (начиная с левого) (рис. 2).

He	Ne	Kr	Ar

Рис. 2

В отсеках содержатся гелий He, неон Ne, криптон Kr и аргон Ar. Давление в сосуде p. В некоторый момент поршни становятся полупроницаемыми и начинают пропускать молекулы газов, которые были слева от каждого поршня (левый поршень пропускает гелий, но не пропускает остальные газы, средний пропускает гелий и неон, но не пропускает криптон и аргон, правый поршень пропускает все газы, кроме аргона). Найти давление в правом отсеке и его объём после установления равновесия.

3. Цилиндр из сухого льда (твёрдой углекислоты) радиусом R и высотой $h = R/2$ стоит на своём основании на плоской поверхности. Лёд испаряется так, что с единицы площади в единицу времени с открытой поверхности льда испаряется масса σ. За какое время весь лёд испарится? Плотность льда ρ.

4. Из листа фанеры вырезали равносторонний треугольник массой m и поставили его в угол между тремя взаимно перпендикулярными поверхностями так, что треугольник касается своими сторонами всех трёх граней угла между поверхностями (см. рис. 3). Какой минимальной горизонтальной силой нужно действовать на середину нижней стороны треугольника, чтобы он покоился?

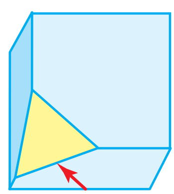

Рис. 3

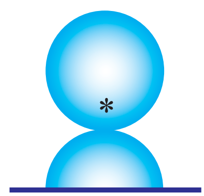

Рис. 4

5. На вершину закреплённой полусферы радиуса R ставят шар того же радиуса со смещённым центром тяжести («ванька-встанька»). При каком положении центра тяжести (см. рис. 4; центр тяжести шара показан звёздочкой) положение шара будет устойчивым? Проскальзывания нет. Ответ обосновать.

Ответы и решения

Математика

1. Заметим, что числа
$$x=\frac{5}{2}\cos\varphi \text{ и } y=\frac{5}{3}\sin\varphi$$
удовлетворяют уравнению при любых $\varphi\in[0;2\pi]$. Тогда выражение
$$x-2y=\frac{5}{2}\cos\varphi-\frac{10}{3}\sin\varphi=$$
$$=\frac{5}{6}(3\cos\varphi-4\sin\varphi)=$$
$$=\frac{25}{6}\left(\frac{3}{5}\cos\varphi-\frac{4}{5}\sin\varphi\right)=$$
$$=\frac{25}{6}(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)=$$
$$=\frac{25}{6}\cos(\varphi+\theta),$$
где $\theta=\arccos\frac{3}{5}$. Поскольку наибольшим возможным значением $\cos(\varphi+\theta)$ на отрезке $[0;2\pi]$ является 1, то
$$(x-2y)_{\max}=\frac{25}{6}.$$

2. Заметим, что
$|2\sin(x+y)+3|\le 5,\ \ |\cos(2x-y)-1|\le 2$
для любых x и y. Тогда равенство
$(2\sin(x+y)+3)(\cos(2x-y)-1)=-10$
возможно только при $\sin(x+y)=1$ и $\cos(2x-y)=-1$. Последнее приводит к системе уравнений для x и y с целочисленными параметрами m и n:
$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\\ 2x-y=\pi+2\pi n,\ m,n\in Z\end{cases}$$
и её решениям
$$\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2\pi}{3}(m+n),\\ y=\dfrac{2\pi}{3}(2m-n),\ \ m,n\in Z.\end{cases}$$

Подставляя найденные x и y в уравнение прямой $6x+5y=15\pi$, получим линейную зависимость между m и n:
$$3\pi+4\pi(m+n)+\frac{10\pi}{3}(2m-n)=$$
$$=15\pi\to 32m+2n=36.$$
Это линейное уравнение в целых числах имеет бесконечное число решений: $m=t$ и $n=18-16t$ для любого $t\in Z$. Тогда
$$x=\frac{5\pi}{2}(5-4t),$$
$$y=12\pi(t-1),\ \ t\in Z.$$

3. Обозначим через k_n^m число неотрицательных решений уравнения
$$x_1+x_2+\ldots+x_n=m.$$
Для $m=2$ число решений, для которых $x_i=2$, а $x_j=0,\ j\ne i$, равно $C_n^1=n$. Число решений, для которых $x_i=1,\ x_j=1,\ x_k=0,\ k\ne i,j$, равно
$$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}.$$
Тогда
$$k_n^2=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}=C_{n+1}^2.$$
Для $m=3$ число решений, для которых $x_i=3$, а $x_j=0,\ j\ne i$, равно $C_n^1=n$. Число решений, для которых $x_i=2,\ x_j=1,\ x_k=0,\ k\ne i,j$, равно
$$A_n^2=2!C_n^2=n(n-1).$$
Число решений, для которых $x_i=1,\ \ x_j=1,\ \ x_k=1,\ \ x_r=0,\ \ r\ne i,j,k$, равно
$$C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$
Тогда

$$k_n^3 = C_n^1 + 2C_n^2 + C_n^3 =$$
$$= n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} =$$
$$= n + \frac{n(n-1)(n+4)}{6} =$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = C_{n+2}^3.$$

Ответ на второй вопрос задачи приводит к уравнению $k_n^3 = 4k_n^2$ относительно n:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

После преобразования, получим

$$n + 2 = 12 \to n = 10.$$

4. Пусть t_1, t_2 – время, которое показывали первые и вторые часы в момент начала боя часов. Тогда целые числа $t_1 - 1$ и $t_2 - 1$ определяют количество временных промежутков по 3 и 4 секунды для каждого из часов, в течение которых боя не было. Время от первого до последнего удара для каждых часов по условию одинаково и равно

$$L = 3 \cdot (t_1 - 1) = 4 \cdot (t_2 - 1).$$

Таким образом, неизвестные t_1 и t_2 связаны линейным уравнением:

$$3t_1 - 4t_2 = -1.$$

Его решения зависят от целочисленного параметра k и имеют вид: $t_1 = 4k + 1$, $t_2 = 3k + 1$, $k \in Z$, при этом $L = 12k$. Количество совпадающих сигналов, включая первый и последний, равно $k + 1$, поэтому общее число сигналов, услышанных Петей, равно

$$t_1 + t_2 - (k+1) = 6k + 1.$$

По условию

$$6k + 1 = 13,$$

откуда $k = 2$, и время на часах $t_1 = 9$, $t_2 = 7$.

5. Складывая и вычитая уравнения, приходим к системе:

$$\begin{cases} x(2x + y(y-1)) = 0, \\ y(x(y+1) - 2ky) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что из предположения $x = 0$ в первом уравнении, из второго уравнения получим $y = 0$ и наоборот, т. е. нулевое решение системы существует при любых целых $k < 0$. Рассмотрим случай $x \neq 0$, $y \neq 0$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} x(y+1) = 2ky, \\ 2x = -y(y-1), \end{cases}$$

или после преобразований:

$$\begin{cases} y^2 = 1 - 4k, \\ x = -y(y-1)/2. \end{cases}$$

С учётом целочисленности y существует целое число m, для которого $1 - 4k = m^2$, или

$$k = \frac{(1-m)(1+m)}{4} < 0.$$

Отрицательность параметра k выполняется, если $|m| > 1$.

По условию число k целое. Дробь

$$\frac{(1-m)(1+m)}{4}$$

будет целым числом только при условии, что m нечётно, т. е.

$$m = 2l + 1, \ l \neq 0, \ -1, \ l \in Z.$$

Подставляя такое m в выражение для k, получим:

$$k = -l(l+1), \ l \neq 0, \ -1, \ l \in Z.$$

Этим значениям k и m соответствуют две серии решений

$$\begin{cases} x_1 = -y_1(y_1 - 1)/2 = -l(2l+1), \\ y_1 = m = 2l + 1, \ l \in Z, l \neq 0, \ -1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x_2 = -y_2(y_2 - 1)/2 = -(l+1)(2l+1), \\ y_2 = -m = -2l - 1, \ l \in Z, l \neq 0, \ -1. \end{cases}$$

Если k нельзя представить в виде $k = -l(l+1)$ для целых $l \neq 0$, -1, то система имеет только нулевое решение.

6. Заметим, что искомое отношение скоростей собаки и волка не зависит от размера квадрата, и поэтому, для простоты, на рис. 5 изображён квадрат со стороной 4. Собаки расположены в точках M, N, P, Q, волк – в центре квадрата в точке W, $BN = CP = 1$, $NC = 3$. Расположение точки T на стороне BC определено условием

$$NT = TC + CP = 2,$$

т. е. $TC = 1$ (до точки T собаки добегают одновременно), K – точка выхода волка на границу квадрата, O – середина стороны BC, $KC = x$, x – параметр. Рассмотрим различные случаи расположения точки K.

Случай 1. $K \in [T;C] \to x \in [0;1]$.

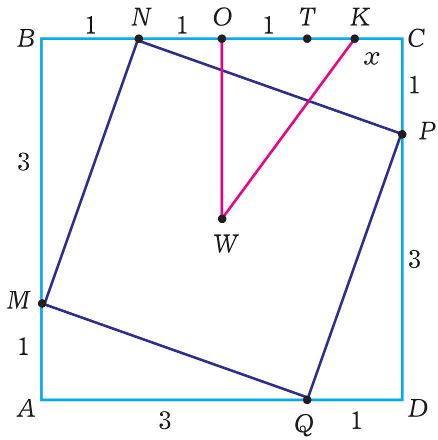

Рис. 5

Расстояния

$$WK = \sqrt{(x-2)^2 + 4}, \; NK = 3 - x.$$

$$t_{\text{в}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2+4}}{v_{\text{в}}} -$$

время выхода волка в точку K, $t_{\text{с}} = \dfrac{3-x}{v_{\text{с}}}$ – минимальное время появления двух собак в точке K. Условие спасения волка $t_{\text{в}} < t_{\text{с}}$ запишем в форме неравенства

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2+4}}{v_{\text{в}}} < \frac{3-x}{v_{\text{с}}},$$

или

$$\frac{v_{\text{с}}}{v_{\text{в}}} < \frac{3-x}{\sqrt{(x-2)^2+4}}.$$

Волк имеет шанс спастись в случае 1, если

$$\frac{v_{\text{с}}}{v_{\text{в}}} < \max_{x\in[0;1]} \frac{3-x}{\sqrt{(x-2)^2+4}}.$$

Вычислим максимум функции

$$f_1(x) = \frac{3-x}{\sqrt{(x-2)^2+4}}$$

на отрезке $[0;1]$. Её производная

$$f_1'(x) = \left(\frac{3-x}{\sqrt{(x-2)^2+4}}\right)' =$$

$$= \frac{-5x-2}{\left((x-2)^2+4\right)^{3/2}} < 0$$

для всех $x \in [0;1]$, поэтому максимум достигается на левом конце отрезка при $x = 0$ и равен $f_1(0) = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$. Условием возможного спасения волка с его выходом в точку K отрезка $[T;C]$ является выполнение неравенства

$$\frac{v_{\text{с}}}{v_{\text{в}}} < \frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}06.$$

Случай 2. $K \in [N;T]$, $x \in [1;3]$.

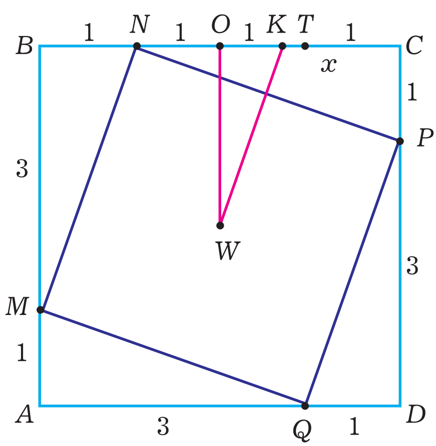

Рис. 6

Минимальное время появления в точке K двух собак

$$t_c = \frac{x+1}{v_c},$$

$$t_в = \frac{\sqrt{(x-2)^2+4}}{v_в} -$$

время выхода волка в точку K. Условие спасения волка $t_в < t_c$ записываем неравенством

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2+4}}{v_в} < \frac{x+1}{v_c},$$

или

$$\frac{v_c}{v_в} < \frac{x+1}{\sqrt{(x-2)^2+4}}.$$

Волк имеет шанс спастись в случае 2, если

$$\frac{v_c}{v_в} < \max_{x\in[1;3]} \frac{x+1}{\sqrt{(x-2)^2+4}}.$$

Найдём максимум функции

$$f_2(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x-2)^2+4}}$$

на отрезке $[1;3]$. Производная

$$f_2'(x) = \left(\frac{x+1}{\sqrt{(x-2)^2+4}}\right)' =$$

$$= \frac{10-3x}{\left((x-2)^2+4\right)^{3/2}} > 0$$

для всех $x \in [1;3]$, поэтому максимум достигается на правом конце отрезка в точке $x = 3$ и равен $f_2(3) = \frac{4}{\sqrt{5}}$. Таким образом, условием спасения волка в случае 2 является выполнение неравенства

$$\frac{v_c}{v_в} < \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Случай 3. Участок границы $[C;P]$, $CK = x \in [0;1]$.

Минимальное время появления в точке K двух собак

$$t_c = \frac{x+3}{v_c},$$

$$t_в = \frac{\sqrt{(x-2)^2+4}}{v_в} -$$

время выхода волка в точку K.

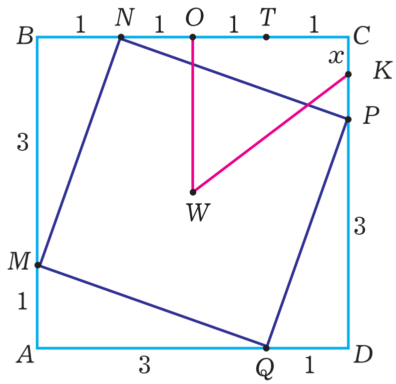

Рис. 7

Условие спасения волка $t_в < t_c$ запишем в форме неравенства

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2+4}}{v_в} < \frac{x+3}{v_c},$$

или

$$\frac{v_c}{v_в} < \frac{x+3}{\sqrt{(x-2)^2+4}}.$$

Волк имеет шанс спастись в случае 3, если

$$\frac{v_c}{v_в} < \max_{x\in[0;1]} \frac{x+3}{\sqrt{(x-2)^2+4}}.$$

Вычислим максимум функции

$$f_3(x) = \frac{x+3}{\sqrt{(x-2)^2+4}}$$

на отрезке $[0;1]$. Её производная

$$f_3'(x) = \left(\frac{x+3}{\sqrt{(x-2)^2+4}}\right)' =$$

$$= \frac{14-5x}{\left((x-2)^2+4\right)^{3/2}} > 0$$

для всех $x \in [0;1]$, поэтому максимум функции достигается на правом конце отрезка в точке $x=1$ и равен $f_3(1)=\frac{4}{\sqrt{5}}$. Таким образом, условием спасения волка в случае 3 является выполнение неравенства $\frac{v_с}{v_в}<\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Объединяя все три случая, приходим к выводу, что наилучшей стратегией для волка является бежать на одну из собак, и у него есть шанс спастись, если $\frac{v_с}{v_в}<\frac{4}{\sqrt{5}}\approx 1{,}79$.

Физика

1. В верхнем и нижнем полупространствах частица будет двигаться по полуокружности с постоянной скоростью. Однако из-за неодинаковости индукций магнитного поля радиусы этих окружностей

$$R=\frac{mv_0}{qB}$$

будут различными, причём радиус окружности в верхнем полупространстве R_1 будет вдвое больше радиуса окружности в нижнем R_2 (см. рис. 8).

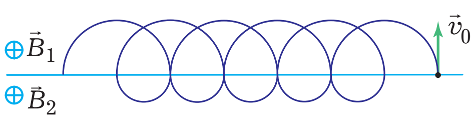

Рис. 8

Поэтому за период частица сдвинется вдоль границы раздела полупространств на расстояние, равное разности диаметров полуокружностей

$$\Delta x=2\left(R_1-R_2\right)=\frac{2mv_0\left(B_2-B_1\right)}{qB_1B_2}.$$

Время полного оборота легко найти, учитывая то обстоятельство, что величина скорости частицы не меняется (магнитное поле не совершает работы)

$$t=\frac{\pi R_1}{v_0}+\frac{\pi R_2}{v_0}=\frac{\pi\left(R_1+R_2\right)}{v_0}=$$

$$=\frac{\pi m\left(B_2+B_1\right)}{qB_1B_2}.$$

Поэтому средняя скорость частицы за время одного прохождения по двум полупространствам (или за большое время, включающее в себя много таких прохождений) будет равна

$$v_{ср}=\frac{\Delta x}{t}=\frac{2v_0\left(B_2-B_1\right)}{\pi\left(B_2+B_1\right)}=\frac{2v_0}{3\pi}.$$

2. Гелий будет распределён по сосуду с одинаковой концентрацией независимо от положения всех поршней. Поэтому парциальное давление гелия на все поршни (и справа, и слева) будет одинаковым. Поэтому при исследовании положений поршней гелий можно не учитывать. А поскольку в самом левом отсеке других газов нет, левый поршень прижмётся к левой стенке сосуда.

По аналогичным причинам при исследовании положения среднего и правого поршней можно не учитывать неон. А поскольку во втором слева отсеке нет других газов, кроме гелия и неона (которые никак не повлияют на положение среднего поршня), а справа от него есть криптон, второй поршень также окажется около левой стенки сосуда.

Точно так же около левой стенки сосуда находится и третий поршень. Поэтому объём самой правой части сосуда будет равен объёму всего сосуда V. Найдём давление газов.

Пусть количество вещества гелия в сосуде равно ν. Тогда очевидно, что количество вещества неона и криптона также равно ν, аргона – 2ν (так как в начальном положении давление всех газов одинаково). Тогда давление газа в сосуде до прохождения газов через поршни можно найти по закону Клапейрона – Менделеева для газа в любом отсеке:

$$p = \frac{\nu RT}{(V/5)} = \frac{5\nu RT}{V}.$$

С другой стороны, после установления равновесия все четыре газа будут заполнять весь объём сосуда, поэтому по закону Дальтона имеем для конечного давления газа в сосуде $p_к$:

$$p_к = \frac{(\nu + \nu + \nu + 2\nu)RT}{V} = \frac{5\nu RT}{V}.$$

Отсюда заключаем, что конечное давление равно начальному.

А.П. Дегтярева

3. Испарение цилиндра происходит с верхнего основания и с боковой поверхности. Поэтому с течением времени меняется и площадь основания (из-за бокового испарения), и площадь боковой поверхности (за счет уменьшения радиуса и высоты) (рис. 9). Найдём скорость уменьшения размеров цилиндра.

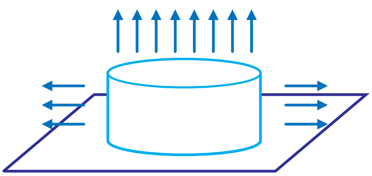

Рис. 9

Пусть открытая поверхность углекислоты (с которой и происходит испарение) равна S. Тогда за малое время Δt испарится тонкий слой, толщиной Δh, которую можно найти из очевидного соотношения:

$$\sigma S \Delta t = \rho \Delta h S.$$

Отсюда находим скорость уменьшения размеров углекислоты:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = v = \frac{\sigma}{\rho}.$$

Из этой формулы следует, что скорость уменьшения размеров не зависит от площади поверхности, с которой происходит испарение. Это значит, что испарение с боковой поверхности не изменяет скорость уменьшения высоты цилиндра, а испарение с основания – скорость уменьшения радиуса. Поэтому с боковой поверхности и с основания углекислота испарится за время

$$t_{бок} = \frac{R}{v} = \frac{R\rho}{\sigma}, \quad t_{осн} = \frac{h}{v} = \frac{R\rho}{2\sigma}.$$

Поскольку время испарения с основания меньше, цилиндр испарится с верхнего основания (становясь в процессе испарения всё более и более «блинообразным») за время

$$t = \frac{R\rho}{2\sigma}.$$

4. Очевидно, что в данном положении пластинка взаимодействует с вертикальными стенками угла только в одной точке. Действительно, треугольник может касаться своими сторонами граней угла только в единственном положении; если сдвинуть треугольник вниз на бесконечно малую величину, контакт между стенками и сторонами треугольника пропадёт, и он будет опираться на ребро угла только своей вершиной. Следовательно, на треугольник действуют: две силы реакции (со стороны вертикального ребра и нижней грани угла), сила тяжести, приложенная к центру тяжести – точке пересечения медиан, искомая сила $\vec{F}$.

Геометрически очевидно, что (см. рис. 10)

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{a}{2}.$$

Поэтому условие моментов относительно середины нижней стороны треугольника (с учётом того, что точка пересечения медиан делит каждую медиану в соотношении 2:1) даёт:

$$Nx = mg\frac{1}{3}y \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{3\sqrt{2}}.$$

А поскольку $F = N$ (это следует из проекции уравнения сил на горизонтальную ось), то

$$F = \frac{mg}{3\sqrt{2}}.$$

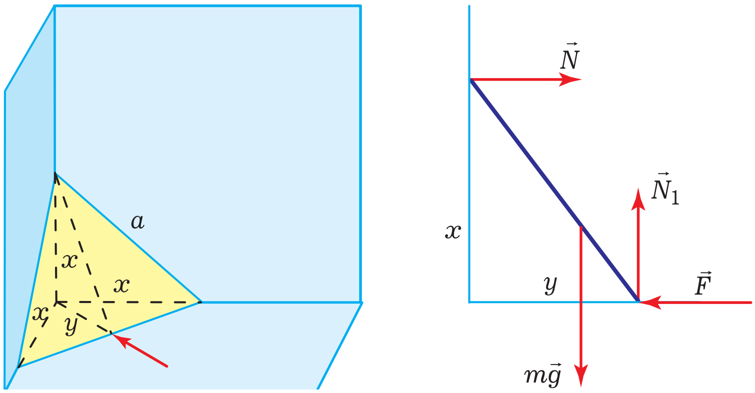

Рис. 10

5. Отклоним верхний шар от положения равновесия и исследуем вопрос о смещении центра тяжести. Если он поднимется, положение равновесия шара будет устойчивым. В начальном состоянии центр тяжести верхнего шара находился на высоте

$$h_0 = 2R - \frac{2}{3}R = \frac{4}{3}R.$$

Пусть верхний шар отклонился так, что направление на точку касания шаров составляет малый угол α с вертикалью (см. рис. 11). Тогда (поскольку проскальзывания шаров нет) направление на центр тяжести верхнего шара из его центра будет составлять такой же угол α с направлением на новую точку касания. Поэтому высоту нового положения центра тяжести по отношению к основанию нижнего полушара можно найти как

$$h_1 = 2R\cos\alpha - \frac{2}{3}R\cos 2\alpha.$$

Используя далее известную тригонометрическую формулу

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$$

и учитывая, что для малого угла $\sin\alpha \approx \alpha$, получим:

$$h_1 = \frac{4}{3}R - R\alpha^2 + \frac{4}{3}R\alpha^2 =$$

$$= \frac{4}{3}R + \frac{1}{3}R\alpha^2 > h.$$

Таким образом, центр верхнего шара при отклонении поднимается, и, следовательно, его положение на «вершине» полушара – устойчивое.

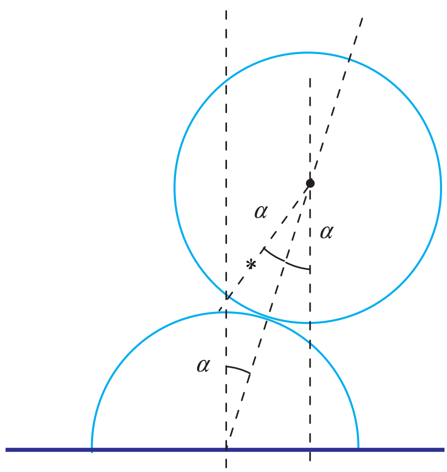

Рис. 11

С.А. Гришин, С.Е. Муравьев *НИЯУ МИФИ.*

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Природа – бесконечная сфера, центр которой везде, а окружность нигде.

Б. Паскаль