Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» 2015 – 2016 учебного года (отборочный тур)

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» проводится Национальным исследовательским ядерным университетом «МИФИ» (НИЯУ МИФИ) более 20 лет с целью выявления одарённых школьников, ориентированных на инженерно-технические специальности, способных к техническому творчеству и инновационному мышлению и проявляющих интерес к вопросам науки, техники и высоких технологий.

Олимпиада «Росатом» проводится по математике и физике для школьников 7 – 11 классов. Школьники невыпускных классов составляют около половины участников олимпиады. Отборочный этап состоит из нескольких независимых туров и проходит в октябре-январе. Один из отборочных туров проходит дистанционно (с использованием сети Интернет). До заключительного этапа олимпиады допускаются лучшие участники отборочного этапа (до 45%, но обычно около 30%). «Пропуск» на заключительный этап можно получить на любом из отборочных туров, количество участий в которых никак не ограничивается.

Для широкого продвижения олимпиады «Росатом» в регионы РФ и отборочный, и заключительный этапы олимпиады «Росатом» проходят в очной форме во многих регионах РФ с обязательным выездом представителей оргкомитета. В 2015 – 2016 учебном году олимпиада проводилась на следующих региональных площадках: Алматы (Казахстан), Арзамас (Нижегородская обл.), Байконур, Балаково (Саратовская область), Владимир, Волгодонск (Ростовская область), Глазов (Удмуртская республика), Дзержинск (Нижегородская обл.), Димитровград (Ульяновская обл.), Екатеринбург, Железногорск (Красноярский край), Заречный (Пензенская обл.), Зеленогорск (Красноярский край), Калининград, Калуга, Киров, Ковров (Владимирская обл.), Курчатов (Курская обл.), Лесной (Свердловская обл.), Липецк, Нижний Новгород, Нововоронеж (Воронежская обл.), Новоуральск (Свердловская обл.), Обнинск (Калужская обл.), Озерск (Челябинская обл.), Рязань, С.-Петербург, Саров (Нижегородская обл.), Северск (Томская обл.), Сергиев Посад (Московская обл.), Смоленск, Снежинск (Челябинская обл.), Трехгорный (Челябинская обл.), Тамбов, Ярославль. И здесь мы хотим поблагодарить наших друзей и коллег – региональных соорганизаторов олимпиады «Росатом», благодаря которым тысячи лучших школьников страны могут участвовать в олимпиаде.

Каждый год в олимпиаде «Росатом» принимают участие 15 – 17 тысяч школьников из 60 – 65 субъектов Российской Федерации и всех федеральных округов (в сумме по математике и физике и по всем классам). Несколько тысяч участвуют в заключительном этапе, победителями и призёрами становятся около 500 – 600 участников.

Олимпиада «Росатом» много лет входит в Перечень олимпиад школьников (в 2015 – 2016 учебном году математика – 2 уровень, физика – 1 уровень), поэтому её победители и призёры могут получить особые права при зачислении в вузы, в которых в качестве вступительных испытаний есть математика или физика. Ежегодно в НИЯУ МИФИ поступает около 40 – 50% победителей и призёров олимпиады «Росатом», ещё столько же поступает победителей и призёров других олимпиад школьников, обеспечивая около 40% бюджетного набора в университет.

Ниже приведены задания отборочного тура олимпиады «Росатом» 2015 – 2016 учебного года по математике и физике для школьников 11 класса.

Физика

1. Искусственный спутник планеты, ускорение свободного падения на поверхности которой равно g, движется на малой высоте над поверхностью со скоростью, вдвое превышающей первую космическую скорость для данной планеты. Чему равна и как направлена сила, действующая на спутник со стороны его двигателя? Масса спутника m.

2. Точечный заряд, расположенный в точке C, создает в точках A и B электрическое поле с потенциалом φ_A и φ_B (рис. 1; угол ACB – прямой). Найти потенциал поля, создаваемого этим зарядом в точке M, являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB.

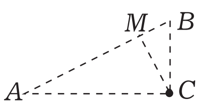

Рис. 1

3. «Круглый» хлеб с изюмом имеет радиус $r = 20$ см. На вертикальном разрезе, проходящем через центр, в среднем оказываются разрезанными $n = 6$ изюмин (рис. 2). Оцените число изюмин в хлебе, если диаметр изюмины $d = 0,5$ см.

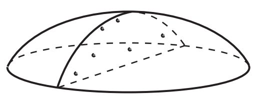

Рис. 2

4. Вертикальный сосуд объёмом V поделён на две части тонкой перегородкой. Объёмы верхнего и нижнего отсеков относятся как 1:2. В перегородке имеется отверстие с клапаном. Клапан открывается, если давление нижнего газа превысит давление

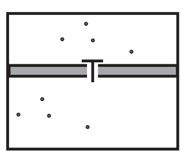

Рис. 3

верхнего на величину Δp. Если нагреть газ в сосуде (и в верхней, и в нижней части) до температуры T_0, клапан откроется. Какое количество вещества газа перейдёт из нижнего отсека в верхний при нагревании его до температуры T_1 ($T_1 > T_0$)?

5. Длинный тонкостенный диэлектрический цилиндр массой m, радиусом R и длиной l расположен горизонтально и может вращаться вокруг своей оси (рис. 4). Цилиндр заряжен зарядом Q. На цилиндр намотана нить, ко второму концу которой привязан груз массой $m/2$. Груз отпускают. С учётом явления самоиндукции найти ускорение груза.

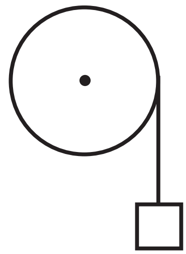

Рис. 4

Решения

1. Очевидно, сила тяги двигателя должна быть направлена к центру планеты, поскольку при скорости спутника, большей первой космической, сила гравитации не сможет удержать спутник на орбите. Поэтому закон вращательного движения даёт

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} + F, \qquad (*)$$

где $v = 2v_0$ – скорость спутника (v_0 – первая космическая скорость), $G\frac{mM}{R^2} = mg$ – сила гравитации на поверхности планеты (g – ускорение свободного падения на поверхности), F – искомая сила тяги двигателя. А поскольку

$$\frac{mv_0^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} = mg,$$

из формулы (*) находим

$$F = \left(2^2 - 1\right)mg = 3mg.$$

2. Из определения потенциала имеем

$$\varphi_A = \frac{kQ}{AC},\ \varphi_B = \frac{kQ}{BC},$$

где k – постоянная закона Кулона, Q – заряд, расположенный в точке C. Далее из подобия треугольников AMC и ABC заключаем, что

$$\frac{MC}{BC} = \frac{AC}{\sqrt{AC^2 + BC^2}}.$$

Отсюда находим

$$\varphi_M = \frac{kQ}{MC} = \frac{kQ\sqrt{AC^2 + BC^2}}{AC \cdot BC} =$$

$$= kQ\sqrt{\frac{1}{BC^2} + \frac{1}{AC^2}} = \sqrt{\varphi_A^2 + \varphi_B^2}.$$

3. Будем считать для оценки, что хлеб имеет форму диска (цилиндра) с одинаковыми верхним и нижним основаниями. Изюминка будет разрезана, если разрез пройдёт на расстоянии не меньше, чем $d/2$ от её центра. Это значит, что разрезанными будут изюминки, центры которых попадут в «ломоть» хлеба толщиной d, содержащий центр хлеба. Объём этого ломтя $V = 2rhd$ (h – высота хлеба), и по условию в него попадает n изюмин. Поэтому концентрация n_0 изюминок в хлебе равна

$$n_0 = \frac{n}{V} = \frac{n}{2rhd}.$$

Отсюда находим полное число изюминок в хлебе:

$$N = n_0 \pi r^2 h = \frac{\pi n r}{2d} \sim 180 \text{ штук.}$$

Если считать хлеб не диском (с одинаковыми верхним и нижним основаниями), а конусом, оценка числа изюминок отличается на множитель 2/3, т. е. по порядку величины будет такой же:

$$N = \frac{\pi n r}{3d} \sim 120 \text{ штук.}$$

4. Пусть количество вещества газа в верхней части сосуда ν_1, в нижней ν_2. Тогда из условия открывания клапана имеем:

$$pV = \nu_1 R T_0,$$

$$(p + \Delta p) 2V = \nu_2 R T_0,$$

где p и V – давление в верхней части сосуда в момент открытия клапана и её объём. Вычитая эти уравнения, получим:

$$\Delta p V = \left(\frac{\nu_2}{2} - \nu_1\right) R T_0. \qquad (*)$$

При нагревании газа до температуры, большей T_0, перепад давлений будет больше, чем Δp. Клапан откроется и начнёт пропускать газ из нижней части сосуда в верхнюю. Это приведёт к уменьшению давления внизу и увеличению вверху сосуда. Клапан снова закроется, когда перепад снова станет равным Δp. В этот момент для газа в верхней и нижней частях сосуда имеем:

$$p_1 V = (\nu_1 + \Delta\nu) \nu_1 R T_1,$$

$$(p_1 + \Delta p) 2V = (\nu_2 - \Delta\nu) R T_1,$$

где p_1 – давление в верхней части сосуда в момент закрытия клапана, $\Delta\nu$ – количество молей газа, перетекшего из нижней части сосуда в верхнюю. Вычитая, находим

$$\Delta p v = \left(\frac{\nu_2}{2} - \nu_1\right) R T_1 - \frac{3}{2} \Delta\nu R T_1.$$

Отсюда и формулы (*) получаем окончательно

$$\Delta\nu = \frac{2}{9} \frac{\Delta p V (T_1 - T_0)}{R T_1 T_0}.$$

5. Вращение заряженного цилиндра эквивалентно кольцевому току. Силу такого тока найдем как отношение заряда, прошедшего через сечение боковой поверхности цилиндра, к соответствующему интервалу времени. Поскольку за время Δt через сечение пройдёт заряд $\Delta q = \sigma v \Delta t l$, где v – скорость вращения цилиндра в этот момент, то

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \sigma v l.$$

Магнитное поле соленоида, в котором течёт ток I, и на единицу длины приходится число витков n, есть $\mu_0 n I = \mu_0 I_l$, где I_l – ток, текущий через единицу длины соленоида. Поэтому внутри нашего цилиндра возникнет следующее магнитное поле:

$$B = \mu_0 \sigma v.$$

Это поле создает следующий магнитный поток через цилиндр:

$$\Phi = \pi R^2 \mu_0 \sigma v.$$

И, следовательно, при изменении скорости вращения цилиндра (при разгоне груза) возникает ЭДС индукции

$$\mathscr{E} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \pi R^2 \mu_0 \sigma \frac{\Delta v}{\Delta t} = \pi R^2 \mu_0 \sigma a, \quad (1)$$

которая согласно правилу Ленца будет препятствовать ускорению зарядов цилиндра, а поскольку цилиндр диэлектрический, будет препятствовать его разгону. (В формуле (1) a – ускорение цилиндра). Поскольку ЭДС индукции есть работа вихревого электрического поля над единичным зарядом при его кольцевом перемещении, из (1) можно найти напряжённость вихревого электрического поля E. Используя осевую симметрию задачи, имеем:

$$2\pi RE = \mathscr{E} = \pi R^2 \mu_0 \sigma a \Rightarrow E = \frac{1}{2}\mu_0 \sigma R a.$$

Теперь можно записать второй закон Ньютона для тела и цилиндра:

$$(m/2)a = (m/2)g - T,$$

$$ma = T - QE,$$

где $Q = 2\pi Rl\sigma$ – заряд цилиндра. Складывая эти уравнения и подставляя напряжённость вихревого поля и заряд цилиндра, получим:

$$3ma/2 = mg/2 - \pi\mu_0\sigma^2 R^2 la,$$

откуда найдём

$$a = \frac{mg}{3m + 2\pi\mu_0\sigma^2 R^2 l}.$$

Математика

1. Для многочлена $P(t) = t^3 + 3t^2 - 9t - 27$ найти x, при котором выражение $P\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right)$ принимает наименьшее возможное значение.

2. Сколько пар чисел $(x;y)$, $0 \le x \le 4\pi$, $-2\pi \le y \le 2\pi$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \cos x + \sin y = 1, \\ \sin x + \cos y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Найти значения первой координаты x таких решений.

3. Числа x, y и z, не равные нулю, таковы, что их квадраты в указанном порядке являются последовательными членами арифметической прогрессии, а числа $10x$, $4y^2$ и $5z^3$ – последовательными членами геометрической прогрессии. Найти все такие тройки x, y и z, если известно, что отношение $x:z$ рационально.

4. Маша строила числовое множество следующим образом. На первом шаге она взяла точки 1 и 16 на числовой оси и написала между ними их среднее геометрическое. На втором и последующих шагах между любыми двумя соседними числами, полученными на предыдущих этапах, она располагала их средние геометрические. Сколько чисел появится на числовой оси после десятого шага и какова их сумма? Какое число будет стоять на девятом месте, если считать, что полученное после десятого шага числовое множество упорядочено по возрастанию?

5. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} |x\cos a + y\sin a| + |y\cos a - x\sin a| = 1, \\ x\sqrt{3} - y + \sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений?

6. Точка M – середина ребра AD куба $ABCDA'B'C'D'$ с ребром a. Через точку B' проведена прямая L, параллельная плоскостям $A'BM$ и $C'BD$. Найти длину отрезка прямой L, расположенного внутри куба.

Решения

1. По условию задачи $t = \sin x - \sqrt{3}\cos x$. Перепишем это выражение в виде

$$t = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Следовательно, $t \in [-2;2]$. Надо

найти наименьшее значение многочлена $P(t)$ на отрезке $[-2;2]$. Для этого найдём производную $P'(t)$ и разложим её на множители:

$$P'(t) = 3t^2 + 6t - 9 = 3(t+3)(t-1).$$

Так как на $[-2;1)$ $P'(t) < 0$, а на $(1;2]$ $P'(t) > 0$, то $t = 1$ – точка минимума. Таким образом, многочлен принимает минимальное значение при $t = 1$. Отсюда $2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$. Решая это уравнение, находим:

$$\left[\begin{aligned} x - \pi/3 = \pi/6 + 2\pi k \\ x - \pi/3 = 5\pi/6 + 2\pi k \end{aligned}\right. \to$$

$$\to \left[\begin{aligned} x = \pi/2 + 2\pi k, \\ x = 7\pi/6 + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{aligned}\right.$$

2. Перепишем систему

$$\begin{cases} \cos x + \sin y = 1, \\ \sin x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$$

в виде

$$\begin{cases} \sin y = 1 - \cos x, \\ \cos y = \sqrt{2} - \sin x. \end{cases}$$

Из того что правые части этой системы неотрицательны, следует что $\sin y \ge 0$, $\cos y \ge 0$ (аналогично можно показать, что $\sin x \ge 0$, $\cos x \ge 0$).

Возводим оба уравнения полученной системы в квадрат

$$\begin{cases} \cos^2 y = \left(\sqrt{2} - \sin x\right)^2, \\ \sin^2 y = (1 - \cos x)^2 \end{cases}$$

и складываем. В результате получим

$$1 = 3 - 2\cos x - 2\sqrt{2}\sin x + 1,$$

или

$$\sqrt{2}\sin x + \cos x = \frac{3}{2}.$$

Используя формулу дополнительного аргумента, перепишем это уравнение в виде:

$$\sin\left(x + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда находим

$$\left[\begin{aligned} x = \frac{\pi}{3} - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi n, \\ x = \frac{2\pi}{3} - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi k, \end{aligned}\right.$$

$$\sin x \ge 0,\ \cos x \ge 0, \forall n, k \in \mathbb{Z}.$$

Вычислим $\sin x$ и $\cos x$ для $x = \frac{\pi}{3} - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi n$:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{6} - 1}{2\sqrt{3}}, \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{6} + 3}{6}. \end{cases}$$

Аналогично, вычислим $\sin x$ и $\cos x$ для $x = \frac{2\pi}{3} - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi k$:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{6} + 1}{2\sqrt{3}}, \\ \cos x = \dfrac{3 - \sqrt{6}}{6}. \end{cases}$$

В обоих случаях условия $\sin x \ge 0$, $\cos x \ge 0$ выполнены.

1 случай.

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{6} - 1}{2\sqrt{3}}, \\ \cos x = \dfrac{3 + \sqrt{6}}{6}. \end{cases}$$

Тогда $\sin y = 1 - \cos x = \frac{3 - \sqrt{6}}{6}$, а $\cos y = \sqrt{2} - \sin x = \frac{\sqrt{6} + 1}{2\sqrt{3}}$. В этом случае решение системы можно записать в виде

$$\begin{cases} x = \arcsin\dfrac{\sqrt{6} - 1}{2\sqrt{3}} + 2\pi k, \\ y = \arcsin\dfrac{3 - \sqrt{6}}{6} + 2\pi n. \end{cases}$$

Условию $0 \le x \le 4\pi$, $-2\pi \le y \le 2\pi$ удовлетворяют наборы с $k = 0, 1$ и с $n = -1, 0$. Итого 4 решения.

2 случай.

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}, \\ \cos x = \dfrac{3-\sqrt{6}}{6}. \end{cases}$$

Тогда

$$\sin y = 1 - \cos x = \frac{3+\sqrt{6}}{6},$$

а $\cos y = \sqrt{2} - \sin x = \dfrac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{3}}$. В этом случае решение системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x = \arcsin\dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} + 2\pi k, \\ y = \arcsin\dfrac{3+\sqrt{6}}{6} + 2\pi n. \end{cases}$$

Условию $0 \le x \le 4\pi, -2\pi \le y \le 2\pi$ удовлетворяют наборы с $k = 0, 1$ и с $n = -1, 0$. Итого 4 решения.

Всего получаем 8 решений. Выпишем значения первой координаты x таких решений:

$$\arcsin\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{3}}, \quad \arcsin\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{3}} + 2\pi,$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}, \quad \arcsin\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} + 2\pi.$$

3. Запишем условия того, что квадраты чисел x, y и z являются последовательными членами арифметической прогрессии, а числа $10x$, $4y^2$ и $5z^3$ – последовательными членами геометрической прогрессии:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 2y^2, \\ 25xz^3 = 8y^4. \end{cases}$$

Исключим переменную y^2 из второго уравнения системы:

$$\left(x^2+z^2\right)^2 = 4y^4 \to 2\left(x^2+z^2\right)^2 =$$

$$= 25xz^3 \to 2x^4 + 4x^2z^2 + 2z^4 = 25xz^3.$$

Разделим правую и левую части уравнения на $z^4 \ne 0$:

$$2\frac{x^4}{z^4} + 4\frac{x^2}{z^2} + 2 = 25\frac{x}{z}.$$

Обозначим $t = x : z$ и перепишем последнее уравнение в виде $2t^4 + 4t^2 - 25t + 2 = 0$. По условию t – рациональное число. Уравнение $2t^4 + 4t^2 - 25t + 2 = 0$ может иметь рациональные корни только при $t = \pm\, 0{,}5,\ \pm 1,\ \pm 2$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что только $t = 2$ удовлетворяет уравнению, поэтому уравнение имеет только один рациональный корень $t = 2$.

Тогда получим $\begin{cases} x = 2z, \\ 2y^2 = 5z^2. \end{cases}$

Записываем ответ $\begin{cases} x = 2z, \\ y = \pm z\sqrt{\dfrac{5}{2}}, \\ z \in R, z \ne 0. \end{cases}$

4. Если $a > 0$, $b > 0$ и $b > a$, то $a, \sqrt{ab}, b$ являются последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $q = \sqrt{b/a}$. После n-го шага мы получим геометрическую прогрессию с первым членом $b_1 = a$, знаменателем $q = \sqrt[2^n]{b/a}$ и числом членов $2^n + 1$. В нашем случае $a = 1$, $b = 16$, $n = 10$. Следовательно, мы имеем геометрическую прогрессию, у которой первый член $b_1 = 1$, знаменатель прогрессии $q = \sqrt[1024]{16} = \sqrt[256]{2}$, а число членов равно $2^{10} + 1 = 1025$. Сумма членов

$$S_{1025} = \frac{b_1\left(q^{1025}-1\right)}{q-1} = \frac{16\sqrt[256]{2}-1}{\sqrt[256]{2}-1},$$

на девятом месте стоит

$$b_9 = b_1 q^8 = \left(\sqrt[256]{2}\right)^8 = \sqrt[32]{2}.$$

5. Первое уравнение системы

$$|x\cos a + y\sin a| + |y\cos a - x\sin a| = 1$$

задаёт квадрат. Найдём уравнения его сторон. Для этого рассмотрим всевозможные случаи раскрытия модулей.

Случай 1. Раскрытие модулей $+,+$:

$$x(\cos a - \sin a) + y(\sin a + \cos a) = 1.$$

После преобразования этого уравнения получим:

$$x\sqrt{2}\cos(a + \pi/4) + y\sqrt{2}\sin(a + \pi/4) = 1.$$

Случай 2. Раскрытие модулей $+,-$:

$$x(\cos a + \sin a) + y(\sin a - \cos a) = 1.$$

После преобразования этого уравнения получим

$$x\sqrt{2}\cos(a - \pi/4) + y\sqrt{2}\sin(a - \pi/4) = 1.$$

Случай 3. Раскрытие модулей $-,+$:

$$-x(\cos a + \sin a) - y(\sin a - \cos a) = 1.$$

После преобразования этого уравнения получим

$$-x\sqrt{2}\cos(a - \pi/4) - y\sqrt{2}\sin(a - \pi/4) = 1.$$

Случай 4. Раскрытие модулей $-,-$:

$$x(\sin a - \cos a) - y(\sin a + \cos a) = 1.$$

После преобразования этого уравнения получим

$$-x\sqrt{2}\cos(a + \pi/4) - y\sqrt{2}\sin(a + \pi/4) = 1.$$

Второе уравнение системы $x\sqrt{3} - y + \sqrt{2} = 0$ задаёт прямую. Перепишем это уравнение в виде $-x\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} = 1$. Система уравнений будет иметь бесконечное число решений, если эта прямая проходит через одну из сторон квадрата. Получаем четыре системы уравнений для нахождения параметра a:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos(a + \pi/4) = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{2}\sin(a + \pi/4) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \cos(a + \pi/4) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin(a + \pi/4) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \to$$

$$\to (a + \pi/4) = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \to a = \frac{7\pi}{12} + 2\pi k;$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos(a - \pi/4) = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{2}\sin(a - \pi/4) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \cos(a - \pi/4) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin(a - \pi/4) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \to$$

$$\to (a - \pi/4) = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \to a = \frac{13\pi}{12} + 2\pi k;$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos(a - \pi/4) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{2}\sin(a - \pi/4) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \cos(a - \pi/4) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin(a - \pi/4) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \to$$

$$\to (a - \pi/4) = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \to a = \frac{25\pi}{12} + 2\pi k;$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2}\cos(a - \pi/4) = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \\ -\sqrt{2}\sin(a - \pi/4) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \cos(a + \pi/4) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin(a + \pi/4) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \to$$

$$\to (a + \pi/4) = \frac{11\pi}{6} + 2\pi k \to a = \frac{19\pi}{12} + 2\pi k.$$

Объединение случаев 1–4 даёт ответ:

$$a = \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{N}.$$

6. Для решения этой задачи воспользуемся методом координат. Поместим начало координат в точку A. Проведём ось X через точки A и D в направлении точки D, ось Y – через точки A и B в направлении точки B, ось Z – через точки A и A' в направлении точки A'. Запишем координаты вершин куба $A'(0;0;a)$, $B(0;a;0)$, $C'(a;a;a)$, $B(0;a;0)$, $D(a;0;0)$ и координаты точки $M\left(\frac{a}{2};0;0\right)$. Плоскости $A'BM$ и $C'BD$ задаются уравнениями

$$2x + y + z - a = 0$$

и

$$x + y - z - a = 0$$

соответственно. Найдём направляющий вектор прямой, по которой пересекаются эти плоскости. Заметим, что точка B принадлежит этой прямой, так как она принадлежит обеим плоскостям. Вторую точку на прямой (обозначим её K) будем искать из условия $y = 0$. Подставляя $y = 0$ в уравнения плоскостей $A'BM$ и $C'BD$, получим $x = \frac{2}{3}a$, $z = -\frac{1}{3}a$. Вычислим $\overrightarrow{BK} = \left\{\frac{2}{3}a;-a;-\frac{1}{3}a\right\}$ и запишем уравнение прямой, проходящей через точку $B'(0;a;a)$ параллельно вектору $\overrightarrow{BK}$: $\frac{x}{2} = \frac{y-a}{-3} = \frac{z-a}{-1}$. Найдём точку пересечения этой прямой с гранью куба $AA'D'D$ ($y = 0$): $\frac{x}{2} = \frac{-a}{-3} = \frac{z-a}{-1} \to x = \frac{2a}{3},\ z = \frac{2a}{3}$.

Искомая длина равна расстоянию между точкой $B'(0;a;a)$ и точкой $\left(\frac{2a}{3};0;\frac{2a}{3}\right)$: $d = \sqrt{\frac{4a^2}{9} + a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}a.$

Материал подготовили: ***Т.И.Бухарова, С.А.Гришин, С.Е.Муравьев***
НИЯУ МИФИ

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Стимулирующий результат

Учёного, долго занимавшегося разными вопросами науки и сосредоточившегося в конце концов на выяснении вопроса о существовании во Вселенной разума, спросили:

– Почему Вы решили заняться поисками разума в Космосе?

– На Земле я его уже искал...