12+

ISSN 1814-6422

Sapere Aude – Дерзай знать!

ПОТЕНЦИАЛ

Ежемесячный журнал для старшеклассников и учителей

№06, 2016

МАТЕМАТИКА ФИЗИКА ИНФОРМАТИКА

Спор Нильса Бора и Альберта Эйнштейна

Экскурсии в мир элементов

Законы сохранения в задачах о конденсаторах

Задача «Рыбаки и рыбки»

Математика нужна каждому

Инженерная олимпиада школьников 2015-2016 учебного года

Приведено задание заключительного тура Инженерной олимпиады школьников, которая с 2012 года проводится Национальным исследовательским ядерным университетом «МИФИ», Московским государственным университетом путей сообщения (МИИТ), Нижегородским государственным техническим университетом имени Р.Е. Алексеева, Самарским государственным аэрокосмическим университетом и Санкт-Петербургским государственным электротехническим университетом «ЛЭТИ».

Задания

9 – 10 классы

1. На рисунке показаны две схемы расположения барабанного тормоза автомобиля. Принцип работы тормоза заключается в следующем. На оси колёс надеты цилиндрические барабаны, вращающиеся вместе с колесами. К торцевым стенкам барабана (которые вместе с барабаном не вращаются) прикреплены две тормозных колодки А и В (в точках 1, 2, 3 и 4). При нажатии на педаль тормоза возрастает давление жидкости в тормозных цилиндрах С, колодки прижимаются к внутренней поверхности барабана и тормозят его благодаря трению. Какая система, показанная на левом или правом рис. 1, тормозит более эффективно? Направления вращения барабанов показаны стрелкой. Ответ обосновать.

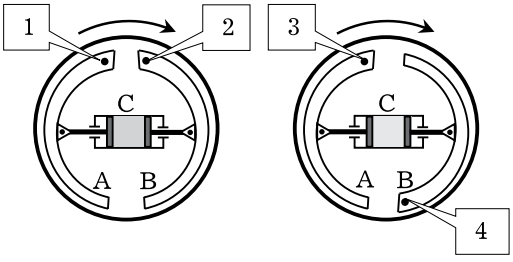


Рис. 1

2. В шахтный водосборник – резервуар для сбора шахтных вод перед их откачкой водоотливной установкой – равномерно поступает вода. Первоначально водосборник был пустой, а на откачку воды из камеры водосборника работал один насос. Насос не справлялся с водой, так что за $t_1 = 6$ мин камера заполнилась наполовину. Тогда включили второй (точно такой же) насос, но вода продолжала прибывать, и ещё через

$t_2 = 15$ мин камера была заполнена полностью. За какое время камера опустеет, если в момент её полного заполнения включить третий (точно такой же) насос?

3. Найти сопротивление цепи. Сопротивления резисторов указаны на рисунке 2.

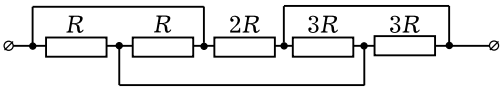
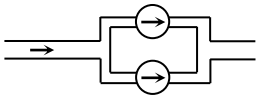


Рис. 2

4. В типографию завезли бумагу в рулоне. Во время работы типографии рулон разматывают и используют бумагу для печати газет. Через 40 дней работы оказалось, что радиус оставшейся части рулона составляет 2/3 от начального. На сколько дней работы хватит его оставшейся части? Считать, что типография работает с одинаковой интенсивностью, бумага намотана до самой оси рулона.

5. Важным параметром любого жидкостного насоса является его напорно-расходная характеристика, которая показывает, какой перепад давлений Δp (напор) может обеспечить насос в зависимости от количества жидкости μ, которое он может прокачать в единицу времени (расход). Эта зависимость, как правило, является убывающей функцией: при большом расходе насос может обеспечить только маленький напор и наоборот. Два насоса с напорно-расходными характеристиками $\Delta p_1 = p_0 - \alpha\mu^2$ и $\Delta p_2 = p_0 - \beta\mu$, где p_0, α и β – известные числа с соответствующими размерностями, включены в трубопровод так, как показано на рисунке 3. Каким будет расход в системе насосов при напоре $\Delta p = p_0 / 2$? Какой напор обеспечит эта система при расходе μ_0?



– схематическое обозначение насоса

Рис. 3

6. Через помещение, в котором поддерживается постоянная температура $t = 15°$ С, проходит труба с горячей водой. Температура трубы в том месте, где она входит в помещение, равна $t_1 = 75°$ С, в том месте, где выходит, – $t_2 = 30°$ С. Чему равна температура посередине трубы? Считать, что теплообмен между тем или иным участком трубы и помещением пропорционален разности температур этого участка трубы и помещения.

11 класс

1. Для измерения угла склонения звезды или планеты над горизонтом используется секстант, идею которого предложил И. Ньютон. Секстант состоит из неподвижной рамы Р с лимбом Л и нанесённой на нём угловой шкалой (образующей 1/6 полного угла – отсюда название прибора), подвижной радиальной планки (алидады) А, имеющей шарнирное крепление в центре рамы, жёстко связанного с алидадой в центре секстанта зеркала $З_1$, полупрозрачного неподвижного зеркала $З_2$, параллельного нулевому отсчёту шкалы лимба – 0, зрительной трубы $З_т$. Посмотрите на рисунки 4 и 5 и опишите, как с помощью секстанта можно измерить угол склонения планеты над горизонтом. Что нужно измерять, чтобы найти

угол склонения планеты? Секстант можно использовать и на палубе корабля при сильной качке. Объясните, почему качка «не мешает» проводить измерения?

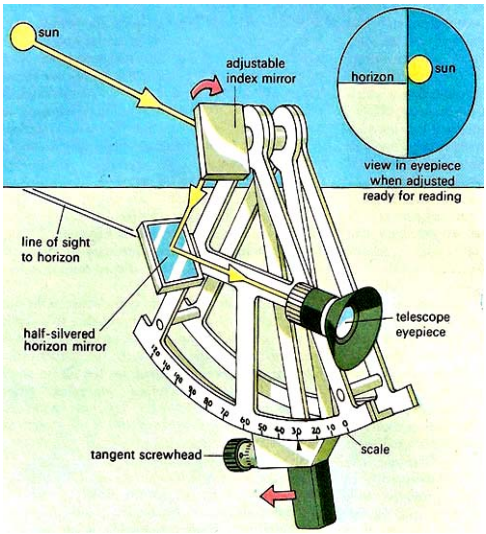


Рис. 4

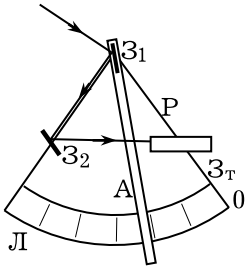


Рис. 5

2. Цепь из трёх резисторов $r_1 = R$, $r_2 = R$, $r_3 = 2R$ и двух идеальных диодов подключили к источнику переменного напряжения с амплитудой U_0 (рис. 6). Найти среднюю тепловую мощность, которая будет выделяться на каждом резисторе за большое время. Идеальный диод проводит электрический ток в одном направлении – в направлении стрелочки в обозначении диода. Провода сопротивления не имеют.

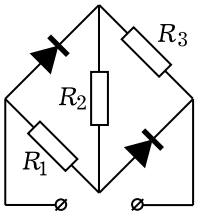


Рис. 6

3. В ряде случаев шлицы (углубления или пазы в головках крепёжных изделий – винтов, болтов и т. д.) должны иметь нестандартную форму. Рассмотрите шлиц в виде прямоугольного треугольника с катетами a (AB) и $3a/2$ (BC). В шлиц вставлен ключ, зазоры между сторонами которого и сторонами шлица малы. К ручке ключа приложены две силы (пара сил), создающие момент M. Определить силы, с которыми ключ действует на грани шлица. Трением пренебречь.

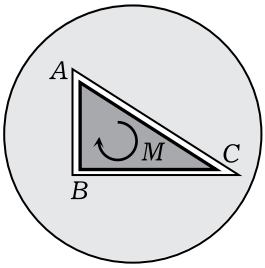


Рис. 7

4. Задача 5 из задания для 9 – 10 классов.

5. В небольшое блюдце налили $M = 20$ г воды. Оцените, за какое время вода полностью испарится. Температура воды и воздуха $t = 20°$ С, давление насыщенных паров воды при этой температуре $p = 2,4 \cdot 10^3$ Па, площадь блюдца $S = 100$ см^2, от-

носительная влажность воздуха 70%. Считать, что влажность воздуха одинакова во всём объёме помещения (в том числе и около поверхности) и не меняется в процессе испарения.

6. Задача 6 из задания для 9 –10 классов.

Решения

9 – 10 класс

1. При торможении на барабан со стороны колодок и (по третьему закону Ньютона) со стороны барабана на колодки действуют силы трения. Силы трения, действующие на тормозные колодки со стороны барабана, показаны на рис. 8 (на барабан силы действуют в противоположных направлениях).

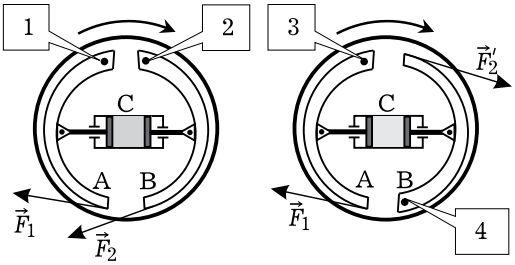


Рис. 8

Для левого барабана силы трения, действующие на колодки, создают моменты, стремящиеся развернуть их относительно точек крепления по часовой стрелке. Это приводит к увеличению силы реакции между барабаном и левой колодкой и к уменьшению силы реакции между барабаном и правой колодкой. Следовательно, сила трения между барабаном и левой колодкой при торможении возрастает, между барабаном и правой колодкой – убывает. То есть для левой колодки возникает эффект заклинивания, для правой – нет.

При торможении с помощью барабана, приведённого на правом рис. 1 в условии задачи, силы трения заклинивают обе тормозные колодки. Это значит, что торможение правым барабаном более эффективно.

2. Пусть в резервуар каждую секунду поступает масса воды m, каждый насос откачивает в секунду массу воды μ, масса воды в заполненном водосборнике – M. Тогда для наполнения половины водосборника при работе одного насоса имеем:

$$mt_1 - \mu t_1 = M / 2.$$

Для заполнения второй половины водосборника при работе двух насосов имеем:

$$mt_2 - 2\mu t_2 = M / 2.$$

Решая систему уравнений относительно m и μ, получим:

$$m = \frac{M(2t_2 - t_1)}{2t_1t_2}, \quad \mu = \frac{M(t_2 - t_1)}{2t_1t_2}.$$

Теперь можно рассмотреть работу трёх насосов:

$$3\mu t_3 - mt_3 = M \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{M}{3\mu - m}.$$

Подставляя в последнюю формулу m и μ, найдём

$$t_3 = \frac{2t_1t_2}{t_2 - 2t_1} = 60 \text{ мин.}$$

3. С помощью деформации проводов данная в условии электрическая цепь может быть преобразована в следующую цепь (рис. 9).

Находя её сопротивление, получим $R_{\text{общ}} = R$.

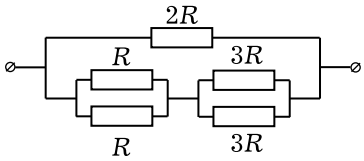


Рис. 9

4. Очевидно, отношение количества дней, которые завод работал на первой и второй порциях бумаги, равно отношению объёмов этих порций. Поэтому

$$\frac{n_{2/3}}{40} = \frac{V_{2/3}}{V_{1/3}},$$

где $n_{2/3}$ – количество дней, на которые хватит остатка рулона, $V_{2/3}$ – его объём, $V_{1/3}$ – объём первой порции рулона (которая израсходована за 40 дней). Находя объёмы первой и второй порций

$$V_{1/3} = \pi\left(R^2 - (2R/3)^2\right)h = \frac{5}{9}\pi R^2 h,$$

$$V_{2/3} = \pi(2R/3)^2 h = \frac{4}{9}\pi R^2 h$$

(R – радиус неразмотанного рулона, h – его высота), получим

$$n_{2/3} = 40\frac{V_{2/3}}{V_{1/3}} = 32 \text{ дня.}$$

5. Очевидно, при параллельном соединении насосов каждый из них работает при одинаковом напоре Δp (разность давлений жидкости после и до насоса). А вот расходы, которые обеспечивают насосы, складываются. Используя напорно-расходные характеристики первого и второго насосов, найдём расход при напоре $\Delta p = p_0/2$. При заданном расходе μ_0 системы насосов расход жидкости через насосы распределяется так, чтобы напор первого и второго насосов был одинаковым:

$$\mu_0 = \mu_1 + \mu_2,$$

$$p_0 - \alpha\mu_1^2 = p_0 - \beta\mu_2.$$

Отсюда

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_0} - \beta}{2\alpha}.$$

Подставляя теперь это значение в напорно-расходную характеристику, получим

$$\Delta p = p_0 - \alpha\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_0} - \beta}{2\alpha}\right)^2.$$

Отметим, что можно провести аналогию между течением жидкости в трубопроводе и электрическим током: расход – электрический ток, напор – разность потенциалов, насос – источник ЭДС.

6. Пусть в единицу времени через сечение трубы протекает масса воды Δm. Обозначим температуру воды посередине трубы t_x. Тогда первая половина трубы теряет в единицу времени количество теплоты $c\Delta m(t_1 - t_x)$, вторая половина трубы – $c\Delta m(t_x - t_2)$.

С другой стороны, эти количества теплоты уходят в помещение через боковые стенки труб, причём поток тепла в разных точках трубы является разным, поскольку разной является разность температур между каждой точкой и помещением. Однако полный поток тепла от каждой половины трубы должен быть пропорционален разности между температурой какой-то её точки (например, начала трубы) и температурой помещения. Действительно, если бы эти температуры начала трубы и помещения совпадали, поток тепла от трубы в помещение равнялся бы нулю. Поэтому для потока тепла между первой половиной трубы и помещением Q_1 можно записать

$$Q_1 = \eta(t_1 - t),$$

где коэффициент пропорциональности η зависит от «геометрии» трубы (но не от температуры). А поскольку «геометрия» второй половины трубы – точно такая же, как у первой, для потока тепла от второй половины трубы Q_2 имеем

$$Q_2 = \eta(t_x - t).$$

Поэтому соотношения для потоков тепла от первой и второй половин дают

$$c\Delta m(t_1 - t_x) = \eta(t_1 - t),$$

$$c\Delta m(t_x - t_2) = \eta(t_x - t).$$

Деля эти соотношения друг на друга, получим

$$t_x^2 - 2tt_x + t_2t + t_1t - t_2t_1 = 0.$$

Из квадратного уравнения найдём искомую температуру t_x:

$$t_x = t + \sqrt{(t - t_2)(t - t_1)} = 45°\,\text{C}.$$

11 класс

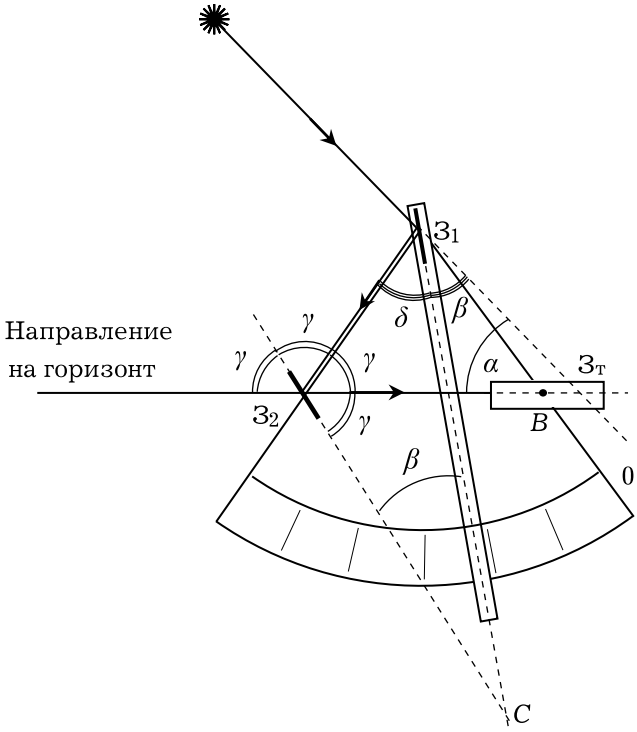


Рис. 10

1. Секстант работает следующим образом. Необходимо в зрительную трубу видеть линию горизонта (через полупрозрачное зеркало $З_2$) и, вращая алидаду, добиться такого положения, что изображение звезды, угол склонения которой над горизонтом надо измерить (угол α на рис. 10), в двух зеркалах попадает точно на линию горизонта. Схема отражения лучей зеркалами секстанта в этом случае показана на рис. 10. Докажем, что угол между алидадой и нулевым отсчётом шкалы лимба (угол $СЗ_10$ на рисунке, или, что то же самое, $З_2СЗ_1$ из-за параллельности зеркала $З_2$ ну-

левому отсчёту шкалы лимба) равен половине угла α. Действительно, чтобы через полупрозрачное зеркало $З_2$ можно было видеть линию горизонта (при горизонтальном расположении зрительной трубы и при том, что угол раствора секстанта равен $60°$), оно должно быть установлено так, чтобы все углы, отмеченные двумя дугами, равнялись друг другу и равнялись $\gamma = 60°$. Далее, из закона отражения заключаем, что пара углов – между зеркалом $З_1$ и отраженным от него лучом, и между зеркалом $З_1$ и продолжением падающего луча, равны друг другу (отмеченных тремя дугами на рисунке и обозначены как δ). Из треугольника $З_1З_2C$ имеем

$$120° + \beta + \delta = 180° \Rightarrow \beta + \delta = 60°. \quad (1)$$

С другой стороны, из треугольника $З_1З_2B$ имеем

$$60° + 2\delta + \alpha = 180° \Rightarrow 2\delta + \alpha = 120°. \quad (2)$$

Из (1), (2) получаем, что

$$\alpha = 2\beta.$$

Таким образом, измеряя по шкале лимба угол между алидадой и нулевым отсчётом шкалы и умножая его на 2, получаем угол склонения звезды над горизонтом.

На палубе корабля (даже при сильной качке) секстантом пользуются так. При качке корабля зрительную трубу трудно навести на горизонт, и мы в ней видим всё время меняющуюся картину – то выше, то ниже горизонта. Но во время качки в трубе в какие-то моменты видно линию горизонта. Медленно вращая алидаду, добиваемся, такого положения, чтобы именно в те моменты, когда труба проходит через линию горизонта, отражение звезды в двух зеркалах попадало точно на эту линию. В этом положении измеряем угол между алидадой и нулевым отсчетом шкалы лимба и умножаем на 2.

2. В зависимости от полярности приложенного напряжения данная цепь имеет вид, показанный либо на левом, либо на правом рис. 11: при «закрытых» диодах резисторы соединены последовательно, при «открытых» – параллельно. Поэтому в течение половины времени, отвечающей левому рисунку, на резисторах будет выделяться следующая мощность:

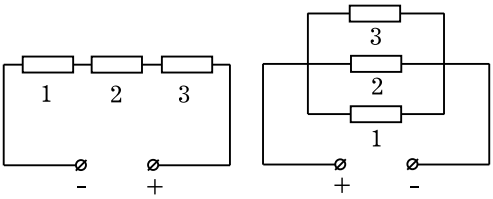


Рис. 11

$$P_{1,1} = \frac{U^2 r_1}{2(r_1 + r_2 + r_3)^2} = \frac{U^2}{32R},$$

$$P_{2,1} = \frac{U^2 r_2}{2(r_1 + r_2 + r_3)^2} = \frac{U^2}{32R},$$

$$P_{3,1} = \frac{U^2 r_3}{2(r_1 + r_2 + r_3)^2} = \frac{U^2}{16R}.$$

(2 в знаменателе – из-за необходимости использовать действующее значение напряжения). В течение второй половины времени (правый рисунок) на резисторах выделяется мощность

$$P_{1,2} = \frac{U^2}{2R},\ P_{2,2} = \frac{U^2}{2R},\ P_{3,2} = \frac{U^2}{4R}.$$

Поэтому за большое время на резисторах выделяются следующие средние мощности:

$$P_{1,\text{ср}} = \frac{P_{1,1} + P_{1,2}}{2} = \frac{17U^2}{64R},$$

$$P_{2,\text{ср}} = \frac{P_{2,1} + P_{2,2}}{2} = \frac{17U^2}{64R},$$

$$P_{3,\text{ср}} = \frac{P_{3,1} + P_{3,2}}{2} = \frac{5U^2}{32R}.$$

3. Силы, с которыми стенки полости действуют на грани ключа, и точки их приложения показаны на рисунке 12. Из-за отсутствия трения эти силы перпендикулярны граням шлица и ключа. Поскольку сумма сил, действующих на ключ, равна нулю, а сумма двух сил, создающих момент M, также равна нулю (пара сил), должна быть равна нулю и сумма $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C$. Это значит, что эти силы образуют треугольник, причём из-за перпендикулярности сил граням ключа подобный сечению ключа. Из соотношений подобия заключаем, что

$$\frac{F_B}{F_C} = \frac{a}{b},$$

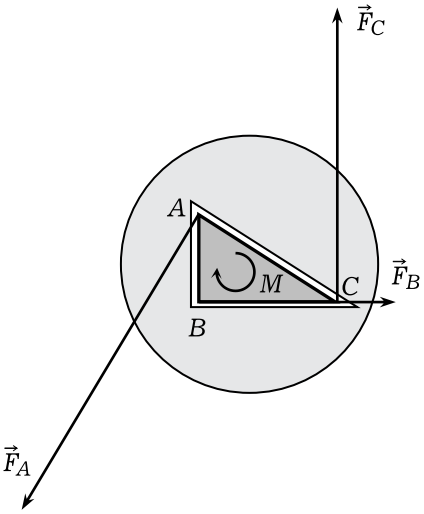


Рис. 12

где a и $b = 3a/2$ – катеты сечения ключа. С другой стороны, условие моментов относительно вершины A даёт

$$F_B a + F_C b = M.$$

Из этих двух уравнений находим силы F_B и F_C:

$$F_B = \frac{4M}{13a},\ F_C = \frac{6M}{13a},$$

а затем по теореме Пифагора и силу F_A:

$$F_A = \frac{2M}{\sqrt{13}a}.$$

4. См. решение задачи 5 из задания для 9 – 10 классов.

5. Если бы пар был насыщенным, то скорости испарения и конденсации совпадали бы. Другими словами, количество молекул, покидающих жидкость, равнялось бы числу молекул, попадающих в жидкость из пара. Последнюю величину можно вычислить так же, как вычисляют число столкновений молекул идеального газа со стенкой сосуда (считая для оценки, что каждая молекула, падающая из пара на поверхность жидкости, становится молекулой жидкости). Число молекул, сталкивающихся с площадкой ΔS за время Δt, можно вычислить как

$$\Delta N = \frac{1}{6} nv\Delta S\Delta t,$$

где n – концентрация молекул газа, v – их средняя скорость (эта формула выводится в любом учебнике по молекулярной физике в разделе, где вычисляется давление идеального газа). Умножая это выражение на массу одной молекулы, находим массу воды, конденсирующейся на площадке ΔS за время Δt:

$$\Delta M = \frac{1}{6} \rho v\Delta S\Delta t,$$

где ρ – плотность пара. Произведение ρv выразим через давление и температуру пара. Поскольку

$$p = nkT = \frac{1}{3} nmv^2 = \frac{1}{3} \rho v^2,$$

то

$$v = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}.$$

Отсюда

$$\Delta M = \frac{1}{6}\sqrt{3p\rho}\Delta S\Delta t.$$

Используя далее закон Клапейрона – Менделеева

$$\rho = \frac{p\mu}{RT},$$

где $\mu = 18$ г/моль – молярная масса воды, R – универсальная газовая постоянная, найдём скорость конденсации пара на единицу площади жидкости

$$v_M = \frac{1}{6}p\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}. \qquad (*)$$

Если бы пар был насыщенным, то ровно столько воды и испарялось бы. Поэтому скорость испарения воды при температуре T определяется этой формулой (*) с p, равным давлению насыщенного пара при данной температуре. Учитывая, что наш пар имеет относительную влажность 70%, семьдесят процентов испарившейся воды конденсируется назад, поэтому результирующая скорость испарения равна

$$v_M = \frac{0,3}{6}p\sqrt{\frac{3\mu}{RT}}.$$

Подставляя данные значения, получим

$$v_M = 0,6\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^2\cdot\text{с}}.$$

Отсюда находим время испарения

$$t = \frac{M}{Sv_M} = \frac{2\cdot 10^{-2}}{1\cdot 10^{-2}\cdot 0,6} = 3\ \text{с}.$$

Полученный результат парадоксален – время испарения воды из блюдца, как говорит нам об этом наш бытовой опыт, должно составить порядка суток. Однако его легко объяснить, если вспомнить, что мы можем очень сильно увеличить скорость испарения воды «сдувая» пар, образовавшийся над водой в результате испарения. Это значит, что вблизи поверхности пар является почти насыщенным независимо от того, какова его относительная влажность во всем помещении. Поэтому наша оценка, основанная на предположении об одинаковости относительной влажности во всем помещении, является очень неточной. А правильная оценка времени испарения сильно зависит от внешних условий – даже небольшое движение воздуха над поверхностью жидкости будет сильно менять время испарения.

6. См. решение задачи 6 из задания для 9 – 10 классов.

М.Е. Бушуева (НГТУ им. Р.Е. Алексеева, г. Нижний Новгород),
Е.А. Изжеуров, И.В. Чостковская (СГАУ, г. Самара), *Б.Г. Комаров, А.А. Минина* (ЛЭТИ, г. Санкт-Петербург), *С.Е. Муравьев, В.И. Скрытный* (НИЯУ МИФИ, г. Москва), *А.П. Прунцев* (МИИТ, г. Москва).

Мудрые мысли Мудрые мысли Мудрые мысли

Истинное сокровище для людей – умение трудиться.

Эзоп

Творческий труд – это наибольшее счастье, которое может получить человек от жизни. Самое большое удовлетворение получаешь тогда, когда в результате своего труда видишь, как меняется жизнь, наука, техника…

А.П. Александров