

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада «Росатом»

В течение 2015/16 учебного года Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» проводил Отраслевую физико-математическую олимпиаду школьников «Росатом». Олимпиада, в которой приняли участие около двадцати тысяч школьников, проходила в Москве и городах расположения объектов атомной отрасли (35 региональных площадок).

Олимпиада «Росатом» 2016/17 учебного года входит в Перечень олимпиад школьников (математика – 2 уровень, физика – 1 уровень), поэтому ее победители и призеры смогут воспользоваться особыми правами при поступлении в любые вузы РФ, в которых в качестве вступительных испытаний есть математика или физика.

Ниже приводятся задания олимпиады «Росатом» по математике и физике 2015/16 учебного года для учащихся 11 класса.

МАТЕМАТИКА

1. Сколько пар $(x; y)$ целых чисел, являющихся решениями уравнения $7x - 5y = 23$, удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leq 37$? Найдите пару $(x; y)$, для которой $x + y$ наибольшее.

2. Найдите x , при котором выражение $(\sin^2 x - \cos x - 1/4)^2 + (\cos 2x + \cos x)^2$ принимает наименьшее значение.

3. Для квадратного трехчлена $P_1(x) = x^2 - x - 6$ и натурального числа n определим многочлены $P_2(x) = P_1(2x)$, $P_3(x) = P_2(2x)$, ..., $P_n(x) = P_{n-1}(2x)$. Решите уравнение $P_n(x) = 0$ и найдите сумму корней многочлена $Q_n(x) = P_1(x) + P_2(x) + \dots + P_n(x)$.

4. Петя и Вова играют в кости на фантики. Ведущий игру Петя выигрывает, если при бросании им двух игральных кубиков сумма выпавших на них очков не превосходит 4, и проигрывает во всех остальных случаях. Проиграв, Петя отдает Вове 1 фантик, выиграв – получает от Вовы k фантиков. Игра считается

справедливой, если среднее значение выигрыша каждым игроком равно нулю. Найдите значение k , при котором игра будет справедливой.

5. Функция $\chi(t)$ такова, что

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t \leq 0. \end{cases}$$

При каких значениях система

$$\begin{cases} x \cdot \chi(x - a) + y \cdot \chi(y - 2a) = 5a, \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

6. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AD = 8$, $AB = 4$ расположены три круга K , K_1 и K_2 . Круг K касается кругов K_1 , K_2 внешним образом, а также касается прямых AD и BC . Круги K_1 , K_2 касаются также сторон AD , AB и AD , CD соответственно. Найдите максимальное возможное значение суммы площадей трех кругов.

ФИЗИКА

1. Три точечных тела, заряженные разными зарядами, но имеющие одинаковые массы, представляют собой замкнутую систему. В некоторый момент времени тела оказываются на одной прямой, при этом ускорение одного из них (неизвестно какого – крайнего или среднего) равно a , второго (тоже неизвестно какого) равно $3a$. Найдите ускорение третьего тела в этот момент. Между телами действуют только кулоновские силы.

2. В электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 1, два из трех резисторов одинаковы, третий отличается от них. Известно, что показания первого амперметра $I_1 = I$, второго $I_2 = 2I/3$. Известно также, что сопротивление первого резистора r . Найдите сопротивления второго и третьего резисторов. Считайте, что сопротивления амперметров равны нулю.

3. 2016 одинаковых стержней массой m каждый соединены шарнирно и подвешены за 2016-й стержень к потолку (рис.2). На нижний конец нижнего стержня действует горизонтальная

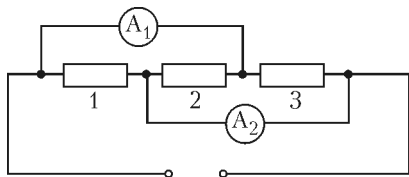


Рис. 1

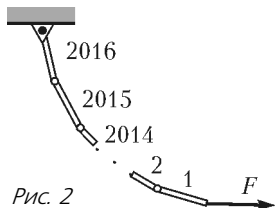


Рис. 2

сила F . Найдите угол между стержнем и вертикалью в положении равновесия.

4. В теплоизолированном сосуде под массивным поршнем, на котором лежит куча песка, находится одноатомный идеальный газ (рис.3). Объем газа V , давление p . Песок (по одной песчинке) снимают с поршня, и объем газа медленно увеличивается вдвое. Какой была бы кинетическая энергия поршня в тот момент, когда объем газа вырос вдвое, если бы песок сняли с поршня весь сразу? Атмосферное давление отсутствует.

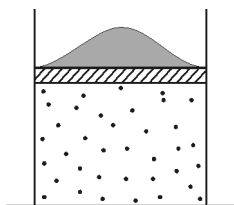


Рис. 3

Указание. В адиабатическом процессе давление и объем идеального газа связаны соотношением $pV^\gamma = \text{const}$, где γ – известное число ($\gamma > 1$).

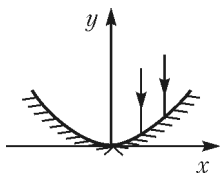


Рис. 4

5. Зеркало образовано вращением параболы $y = 2x^2$ вокруг оси y (параболическое зеркало). На зеркало параллельно оси падают два луча: один на некотором расстоянии x , второй – на расстоянии $2x$ от оси y (рис.4). Какой из лучей после отражения от поверхности зеркала пересечет ось y ближе к вершине параболы и на сколько?

Найдите расстояние от вершины параболы до точки пересечения этого луча с осью y .

Публикацию подготовили С.Гришин, С.Муравьев