$(n \in \mathbb{Z})$, $y = -1$, т.е. решение не единственно. При $a = 2$ система приобретает вид $\begin{cases} y = (|x| + 1)2 - \cos x, \\ \sin^4 x + y^4 = 1. \end{cases}$ Так как $|\cos x| \le 1$, то из первого уравнения системы следует $y = 2 + 2|x| - \cos x \ge 1$, из второго уравнения следует $y \le 1$, а поэтому решение $y = 1$, $x = 0$ единственно.

18. $a \ge 2$, $b < \frac{1}{2}$.

Пусть $t = 2x - 1$. Рассмотрим функцию $f(t) = \frac{t}{t^2 + 4}$. Так как $t^2 + 4 \ge 2\sqrt{4t^2} = 4|t|$, то $-\frac{1}{4} \le \frac{t}{t^2 + 2} \le \frac{1}{4}$. Значения $\pm\frac{1}{4}$ достигаются при $t = \pm 2$. Следовательно, множество значений функции $g(t) = 16^{\frac{2x-1}{4x^2-4x+5}} = 16^{\frac{t}{t^2+4}}$ есть отрезок $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Поэтому $a \ge 2$, $b < \frac{1}{2}$.

19. $x = -a$; $y = a$ при $a \in (-2; 0)$.

Первое уравнение приводится к виду $(x + y)^2 + (y - a)^2 = 0$, откуда получаем $x = -y = -a$. Подстановка в неравенство дает $2^{-2-a} \cdot \log_2(-a) < 1 \Leftrightarrow \log_2(-a) < 2^{2+a}$. Равенство достигается при $a = -2$, и ввиду монотонности получаем $a \in (-2; 0)$.

20. 9.

После замены $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$ второе уравнение выполнено, а первое запишется в виде $\cos^{15} 3\alpha + \sin^{16} 3\alpha = 1$. Из цепочки $1 = \cos^{15} 3\alpha + \sin^{16} 3\alpha \le \cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha = 1$ следует, что $\cos^{15} 3\alpha = \cos^2 3\alpha$ и $\sin^{16} 3\alpha = \sin^2 3\alpha$. Значит, либо $3\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, либо $3\alpha = 2\pi n$, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$ или $\alpha = \frac{2\pi n}{3}$. Получается 9 пар решений $(x; y)$: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $(0; \pm 1)$; $(1; 0)$.

ИНЖЕНЕРНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный тур

9–10 классы

1. При торможении на барабан со стороны колодок и (по третьему закону Ньютона) со стороны барабана на колодки действуют силы трения (рис.45).

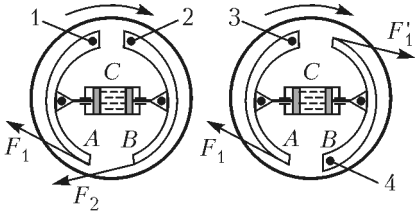

Рис. 45

Для левого барабана силы трения, действующие на колодки, создают моменты, стремящиеся развернуть их относительно точек крепления по часовой стрелке. Это приводит к увеличению силы реакции между барабаном и левой колодкой (эффект заклинивания) и к уменьшению силы реакции между барабаном и правой колодкой. Следовательно, сила трения между барабаном и левой колодкой при торможении возрастает, а между барабаном и правой колодкой убывает. Таким образом, для левой колодки возникает эффект заклинивания, что приводит к увеличению трения, для правой – нет.

При торможении с помощью барабана, приведенного на правом рисунке, силы трения заклинивают обе тормозные колодки. Это значит, что торможение правым барабаном более эффективно.

2. Пусть в резервуар каждую секунду поступает масса воды m, каждый насос откачивает в секунду массу воды μ, масса воды в заполненном водосборнике равна M. Тогда для наполнения половины водосборника при работе одного насоса имеем

$$mt_1 - \mu t_1 = \frac{M}{2}.$$

Для заполнения второй половины водосборника при работе двух насосов имеем

$$mt_2 - \mu t_2 = \frac{M}{2}.$$

Решая систему уравнений относительно m и μ, получим

$$m = \frac{M(2t_2 - t_1)}{2t_1t_2}, \quad \mu = \frac{M(t_2 - t_1)}{2t_1t_2}.$$

Теперь можно рассмотреть работу трех насосов:

$$3\mu t_3 - mt_3 = M,$$

откуда находим

$$t_3 = \frac{M}{3\mu - m} = \frac{2t_1t_2}{t_2 - 2t_1} = 60 \text{ мин}.$$

3. Данная в условии электрическая цепь может быть преобразована к виду, изображенному на рисунке 46. Ее сопротивле-

ние равно

$$R_{\text{общ}} = R\,.$$

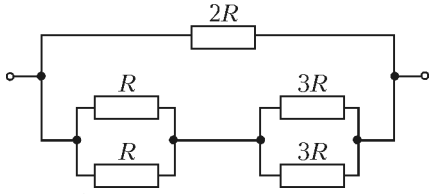

Рис. 46

4. Очевидно, что отношение количества дней, которые типография работала на первой и второй порциях бумаги, равно отношению объемов этих порций:

$$\frac{n_{2/3}}{40} = \frac{V_{2/3}}{V_{1/3}}\,,$$

где $n_{2/3}$ – количество дней, на которые хватит остатка рулона, $V_{2/3}$ – его объем, $V_{1/3}$ – объем первой порции рулона, которая израсходована за 40 дней. Находя объемы первой и второй порций:

$$V_{1/3} = \pi\left(R^2 - \left(\frac{2R}{3}\right)^2\right)h = \frac{5}{9}\pi R^2 h\,,\quad V_{2/3} = \left(\frac{2R}{3}\right)^2 h = \frac{4}{9}\pi R^2 h\,,$$

где R – радиус неразмотанного рулона, h – его высота, получим

$$n_{2/3} = 40\frac{V_{2/3}}{V_{1/3}} = 32 \quad \text{дня.}$$

5. Понятно, что при параллельном соединении насосов каждый из них работает при одинаковом напоре Δp (разность давлений жидкости после и до насоса). А вот расходы, которые обеспечивают насосы, складываются. Используя напорно-расходные характеристики первого и второго насосов, найдем расход при напоре $\Delta p = p_0/2$:

$$\mu\left(\frac{p_0}{2}\right) = \sqrt{\frac{p_0}{2\alpha}} + \frac{p_0}{2\beta}\,.$$

При заданном расходе μ_0 системы насосов расход жидкости через насосы распределяется так, чтобы напор первого и второго насосов был одинаковым:

$$\mu_0 = \mu_1 + \mu_2\,,$$

$$p_0 - \alpha\mu_1^2 = p_0 - \beta\mu_2\,.$$

Отсюда находим

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_0} - \beta}{2\alpha}\,.$$

Подставляя теперь это значение в напорно-расходную характеристику, получаем

$$\Delta p = p_0 - \alpha\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\beta\mu_0} - \beta}{2\alpha}\right)^2.$$

Отметим, что можно провести аналогию между течением жидкости в трубопроводе и электрическим током: расход – электрический ток, напор – разность потенциалов, насос – источник ЭДС.

6. Пусть в единицу времени через сечение трубы протекает масса воды Δm. Обозначим температуру воды посередине трубы t_x. Тогда первая половина трубы теряет в единицу времени количество теплоты $c\Delta m(t_1 - t_x)$, вторая половина трубы – $c\Delta m(t_x - t_2)$. С другой стороны, эти количества теплоты уходят в помещение через боковые стенки труб, причем поток тепла в разных точках трубы будет разным, поскольку различной является разность температур между каждой точкой и помещением. Однако полный поток тепла от каждой половины трубы должен быть пропорционален разности между температурой какой-то ее точки, например начала трубы, и температурой помещения. Поэтому для потока тепла Q_1 между первой половиной трубы и помещением можно записать

$$Q_1 = \eta(t_1 - t),$$

где коэффициент пропорциональности η зависит от «геометрии» трубы, от точки, в которой мы взяли температуру t_1 (но не от температуры). А поскольку «геометрия» второй половины трубы точно такая же, как у первой, то для потока тепла Q_2 от второй половины трубы имеем

$$Q_2 = \eta(t_x - t).$$

Таким образом,

$$c\Delta m(t_1 - t_x) = \eta(t_1 - t),$$

$$c\Delta m(t_x - t_2) = \eta(t_x - t).$$

Деля эти соотношения друг на друга, получим квадратное уравнение

$$t_x^2 - 2tt_x + t_2t + t_1t - t_2t_1 = 0,$$

откуда найдем искомую температуру t_x:

$$t_x = t + \sqrt{(t - t_2)(t - t_1)} = 45\ ^\circ\mathrm{C}.$$

11 класс

1. Секстант работает следующим образом (рис.47). Необходимо в зрительную трубу видеть линию горизонта (через полупрозрачное зеркало $З_2$) и, вращая алидаду, добиться такого положения, что изображение звезды, угол склонения α которой над горизонтом надо измерить, в двух зеркалах попадает точно на линию горизонта. Докажем, что угол β между алидадой и нулевым отсчетом шкалы лимба – угол $CЗ_1 0$, или, что то же самое, угол $З_2CЗ_1$ – равен половине угла α. Действительно, чтобы через полупрозрачное зеркало $З_2$ можно было видеть линию горизонта (при горизонтальном расположении зрительной трубы и при том, что угол раствора секстанта равен $60°$), оно должно быть установлено так, чтобы все углы равнялись $\gamma = 60°$. Далее, из закона отражения заключаем, что пара углов δ – между зеркалом $З_1$ и отраженным от него лучом и между зеркалом $З_1$ и продолжением падающего луча – равны друг другу. Из треугольника $З_1CЗ_2C$ имеем

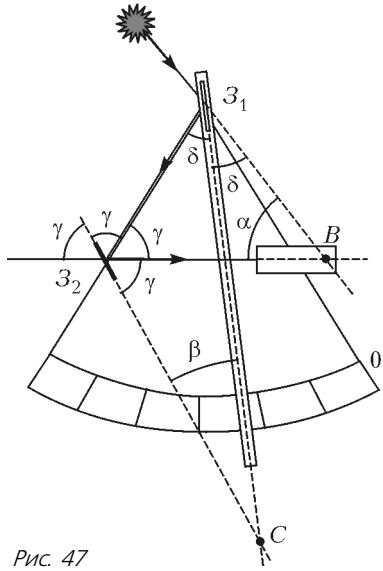

Рис. 47

$$120° + \beta + \delta = 180°, \text{ или } \beta + \delta = 60°.$$

С другой стороны, из треугольника $З_1З_2B$ имеем

$$60° + 2\delta + \alpha = 180°, \text{ или } 2\delta + \alpha = 120°.$$

Отсюда получаем

$$\alpha = 2\beta.$$

Таким образом, измеряя по шкале лимба угол между алидадой и нулевым отсчетом шкалы и умножая его на 2, получаем угол склонения звезды над горизонтом.

На палубе корабля при сильной качке зрительную трубу трудно навести на горизонт, но в ней какие-то моменты видно линию горизонта. Медленно вращая алидаду, добиваемся такого положения, чтобы именно в те моменты, когда труба проходит через линию горизонта, отражение звезды в двух зеркалах

попадало точно на эту линию. В этом положении измеряем угол между алидадой и нулевым отсчетом шкалы лимба и умножаем на 2.

2. В зависимости от полярности приложенного напряжения данная цепь имеет вид, показанный на рисунке 48 либо слева,

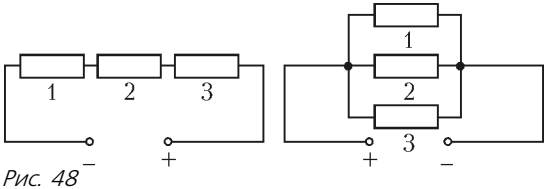

Рис. 48

либо справа: при закрытых диодах резисторы соединены последовательно, при открытых – параллельно. Поэтому в течение половины времени, отвечающей левому рисунку, на резисторах будут выделяться мощности

$$P_{11} = \frac{U^2 r_1}{2\left(r_1 + r_2 + r_3\right)^2} = \frac{U^2}{32R}, \quad P_{21} = \frac{U^2 r_2}{2\left(r_1 + r_2 + r_3\right)^2} = \frac{U^2}{32R},$$

$$P_{31} = \frac{U^2 r_3}{2\left(r_1 + r_2 + r_3\right)^2} = \frac{U^2}{16R}$$

(двойка в знаменателе связана с необходимостью использовать действующее значение напряжения). В течение второй половины времени (правый рисунок) на резисторах выделяются мощности

$$P_{12} = \frac{U^2}{2R}, \quad P_{22} = \frac{U^2}{2R}, \quad P_{32} = \frac{U^2}{4R}.$$

Поэтому за большое время средние мощности будут такими:

$$P_{1\text{ср}} = \frac{P_{11} + P_{12}}{2} = \frac{17U^2}{64R}, \quad P_{2\text{ср}} = \frac{P_{21} + P_{22}}{2} = \frac{17U^2}{64R},$$

$$P_{3\text{ср}} = \frac{P_{31} + P_{32}}{2} = \frac{5U^2}{32R}.$$

3. Силы, с которыми стенки полости действуют на грани ключа, и точки их приложения показаны на рисунке 49. Из-за отсутствия трения эти силы перпендикулярны граням шлица и ключа. Поскольку сумма сил, действующих на ключ, равна нулю, а сумма двух сил, создающих момент M, также равна нулю (пара сил), должна быть равна нулю сумма сил $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C$. Это значит, что эти силы образуют треугольник, причем, из-за перпендикулярности сил граням ключа, подобный

сечению ключа. Из соотношений подобия заключаем, что

$$\frac{F_B}{F_C} = \frac{a}{b}.$$

С другой стороны, условие моментов сил относительно вершины A дает

$$F_B a + F_C b = M.$$

Из этих двух уравнений находим силы F_B и F_C:

$$F_B = \frac{4M}{13a}, \quad F_C = \frac{6M}{13a},$$

а затем по теореме Пифагора находим силу F_A:

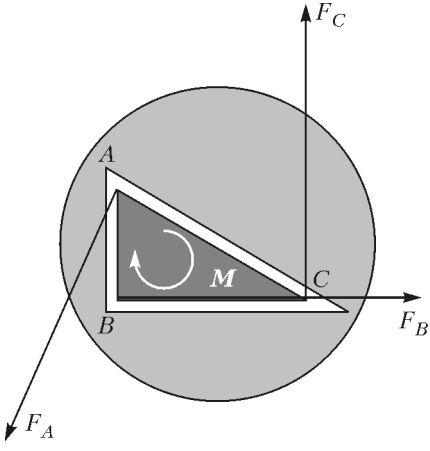

Рис. 49

$$F_A = \frac{2M}{\sqrt{13}a}.$$

5. Если бы пар был насыщенным, то скорости испарения и конденсации совпадали бы. Другими словами, количество молекул, покидающих жидкость, равнялось бы числу молекул, попадающих в жидкость из пара. Последнюю величину можно вычислить так же, как вычисляют число столкновений молекул идеального газа со стенкой сосуда (считая для оценки, что каждая молекула, попадающая из пара на поверхность жидкости, становится молекулой жидкости). Число молекул, сталкивающихся с площадкой площадью ΔS за время Δt, равно

$$\Delta N = \frac{1}{6} n v \Delta S \Delta t,$$

где n – концентрация молекул газа, v – средняя скорость. Умножая это выражение на массу одной молекулы, находим массу воды, конденсирующейся на этой площадке:

$$\Delta M = \frac{1}{6} \rho v \Delta S \Delta t,$$

где ρ – плотность пара. Поскольку $p = nkT = \frac{1}{3} nmv^2 = \frac{1}{3}\rho v^2$, то $v = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$, откуда

$$\Delta M = \frac{1}{6}\sqrt{3p\rho}\,\Delta S \Delta t.$$

Используя закон Клапейрона–Менделеева в виде $\rho = \frac{p\mathrm{M}}{RT}$, где

$\text{М} = 18$ г/моль – молярная масса воды, R – универсальная газовая постоянная, найдем скорость конденсации пара на единицу площади жидкости:

$$v_{\text{к}} = \frac{1}{6} p \sqrt{\frac{3\text{М}}{RT}} .$$

Если бы пар был насыщенным, то ровно столько воды и испарялось бы. Учитывая, что наш пар имеет относительную влажность 70 %, заключаем, что семьдесят процентов испарившейся воды конденсируется назад, поэтому результирующая скорость испарения равна

$$v_{\text{и}} = \frac{0,3}{6} p \sqrt{\frac{3\text{М}}{RT}} = 0,6 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} .$$

Отсюда находим время испарения:

$$t = \frac{M}{Sv_{\text{и}}} = 3 \text{ с} .$$

Полученный результат парадоксален – время испарения воды из блюдца, как говорит нам наш бытовой опыт, должно составить порядка суток. Однако этот результат легко объяснить, если вспомнить, что мы можем очень сильно увеличить скорость испарения воды, «сдувая» пар, образовавшийся над водой в результате испарения. Это значит, что вблизи поверхности пар является почти насыщенным независимо от того, какова его относительная влажность во всем помещении. Поэтому наша оценка, основанная на предположении об одинаковости относительной влажности во всем помещении, является очень неточной. А правильная оценка времени испарения сильно зависит от внешних условий – даже небольшое движения воздуха над поверхностью жидкости будет сильно менять время испарения.

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РОССИИ

МАТЕМАТИКА

Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений

11 класс

Вариант 1

1. $17 \cdot 13 \cdot 7 = 1547$ (один из возможных ответов).

Сумма делителей числа $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$ равна $\left(1 + p_1 + p_1^2 + \ldots p_1^{k_1}\right) \cdot \left(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots p_2^{k_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + p_s + p_s^2 + \ldots p_s^{k_s}\right)$,