Второй тур

Вариант 1

1. $t=\dfrac{2d}{\sqrt{v^2-u^2}}=0{,}5$ мин . **2.** $a=4\pi\alpha\approx 50{,}3$ м/с^2 .

3. $v=\sqrt{\dfrac{F(L-l)}{m}}$. **4.** $\varphi_2=\varphi+(\varphi-\varphi_1)\dfrac{V_1}{V_2}=0$.

5. $A=\nu RT_0(m-1)=2490$ Дж , где $\nu=1$ моль.

6. $l=\sqrt{\dfrac{kq^2}{mg\cos\alpha}}$. **7.** $R=\dfrac{4\mathcal{E}}{3I}=100$ Ом .

8. $\Gamma_2^2-5{,}2\Gamma_2+1=0$, $\Gamma_2=5$ или $\Gamma_2=\dfrac{1}{5}$.

Вариант 2

1. $r_m=l-h=3$ км . **2.** $\rho_{ш}=(3/4)\rho_{в}$ – шар будет плавать.

3. $s=(2/3)l=60$ см . **4.** $m=\dfrac{(p_0+\rho gh)MV}{RT}=0{,}12$ мг .

5. $I_2=I_1\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^{3/2}=23$ А . **6.** $Q=-0{,}4$ нКл.

7. $\dfrac{I_{кз}}{I_1}=\dfrac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}-U_1}\approx 5{,}3$, $r=\dfrac{\mathcal{E}-U_1}{I_1}=1$ Ом .

8. $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)F<d<F$, 10 см $<d<$ 20 см.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада «Росатом»

МАТЕМАТИКА

1. 1) 2 пары; 2) $(4;1)$.

Общее решение уравнения можно записать как

$$\begin{cases}x=-1+5t,\\ y=-6+7t,\end{cases}\quad t\in\mathbb{Z}\ .$$

Эти решения удовлетворяют неравенству

$$(5t-1)^2+(7t-6)^2\le 37\Rightarrow 37t^2-47t\le 0\Rightarrow t\in[0;\,47/37]\Rightarrow t_1=0,\ t_2=1\,.$$

Допустимые пары: $(-1;-6)$ и $(4;1)$. Во второй паре значение $x+y$ наибольшее.

2. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Найдем x, при котором каждая из скобок равна нулю:

$$\sin^2 x - \cos x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left[\begin{aligned} &\cos x = \frac{1}{2}, \\ &\cos x = -\frac{3}{2} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ &x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}\right.$$

$$\cos 2x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \cos(\pi - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} &2x = \pi - x + 2\pi m, \\ &2x = -\pi + x + 2\pi l \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &x_3 = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi m}{3}, \\ &x_4 = -\pi + 2\pi l. \end{aligned}\right.$$

Пересечением серий $x_1 \cap x_3$ является x_1, т.е. $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ – решение.

Пересечения серий $x_1 \cap x_4$ и $x_2 \cap x_4$ пустые.

Найдем пересечение серий $x_2 \cap x_3$:

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi m}{3} \Rightarrow m = 3n - 1,$$

т.е. серия x_2 входит в серию x_3 и поэтому является решением.

3. 1) $x_n^1 = 3/2^{n-1}$, $x_n^2 = -1/2^{n-2}$; 2) $\dfrac{3\left(2^n - 1\right)}{4^n - 1}$.

Корни многочлена $P_1(x) = x^2 - x - 6$ равны $x_1^1 = 3$, $x_1^2 = -2$. Корни многочлена $P_2(x) = P_1(x)$ равны $x_2^1 = 3/2$, $x_2^2 = -2/2 = -1$. Предполагаем, что корни многочлена $P_k(x)$ равны $x_k^1 = 3/2^{k-1}$, $x_k^2 = -2/2^{k-1} = -1/2^{k-2}$. Тогда многочлен $P_{k+1}(x) = P_k(2x)$ будет иметь корни $x_{k+1}^1 = x_k^1/2 = 3/2^k$, $x_{k+1}^2 = x_k^2/2 = -1/2^{k-1}$, т.е. $x_n^1 = 3/2^{n-1}$, $x_n^2 = -1/2^{n-2}$.

Многочлен $P_k(x)$ имеет вид $P_k(x) = 4^{k-1}x^2 - 2^{k-1}x - 6$, а многочлен $Q_n(x)$ –

$$Q_n(x) = \left(1 + 4 + \ldots + 4^{n-1}\right)x^2 - \left(1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}\right)x - 6n =$$

$$= \frac{4^n - 1}{3}x^2 - \left(2^n - 1\right)x - 6n.$$

Дискриминант многочлена $Q_n(x)$ равен $D/4 = \left(2^n - 1\right)^2 +$

$+8n\left(4^n-1\right)>0$, поэтому действительные корни есть. По теореме Виета их сумма равна $\dfrac{3\left(2^n-1\right)}{4^n-1}$.

4. 5 фантиков.

Вероятность выигрыша Пети $p=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$ (общее число исходов опыта $n=6\cdot 6=36$, из них благоприятствуют выигрышу 6 исходов: $(1;1)$, $(1;2)$, $(1;3)$, $(2;1)$, $(2;2)$, $(3;1)$). Пусть ξ – случайная величина выигрыша Пети. Она принимает значение k с вероятностью $\dfrac{1}{6}$ и значение -1 с вероятностью $\dfrac{5}{6}$. Тогда среднее значение выигрыша $M\xi=k\cdot\dfrac{1}{6}-1\cdot\dfrac{5}{6}=0\Rightarrow k=5$.

5. $a\in\left[\dfrac{2}{11};\dfrac{2}{9}\right)\cup\left[\dfrac{2}{7};+\infty\right)$.

В области $A(x>a,\, y>2a)$ система примет вид

$$\begin{cases}x+y=5a,\\ x+2y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=10a-2,\\ y_1=2-5a.\end{cases}$$

Это решение принадлежит области A, если

$$\begin{cases}10a-2>a,\\ 2-5a>2a\end{cases}\Rightarrow a\in\left(\frac{2}{9};\frac{2}{7}\right).$$

В области $B(x>a,\, y\le 2a)$ система примет вид

$$\begin{cases}x=5a,\\ x+2y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=5a,\\ y_2=(2-5a)/2.\end{cases}$$

Ее решение принадлежит области B, если

$$\begin{cases}5a>a,\\ (2-5a)/2\le 2a\end{cases}\Rightarrow a\in\left[\frac{2}{9};+\infty\right).$$

В области $C(x\le a,\, y\le 2a)$ система может иметь решения только при $a=0$ и имеет вид

$$\begin{cases}0=5a,\\ x+2y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_3=2-2t,\\ y_3=t,\, t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Условия принадлежности решения к области C приводит к неравенствам

$$\begin{cases}2-2t\le 0,\\ t\le 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\ge 1,\\ t\le 0.\end{cases}$$

Последнее показывает, что в области C система несовместна при любых a. В области $D(x \le a,\ y > 2a)$ система примет вид

$$\begin{cases} y = 5a, \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2 - 10a, \\ y_3 = 5a. \end{cases}$$

Это решение принадлежит области D, если

$$\begin{cases} 2 - 10a \le a, \\ 2 - 5a > 2a \end{cases} \Rightarrow a \in \left[\frac{2}{11}; \frac{2}{7}\right).$$

На рисунке 59 на трех числовых осях параметра a указаны интервалы существования решений. Верхний интервал соответ-

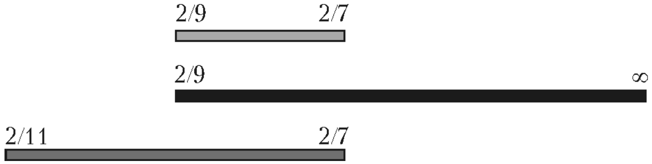

Рис. 59

ствует значениям, при которых существуют решения $(x_1; y_1)$, полуось в середине – решениям $(x_2; y_2)$, а внизу – решениям $(x_3; y_3)$. Единственное решение бывает при

$$a \in \left[\frac{2}{11}; \frac{2}{9}\right) \cup \left[\frac{2}{7}; +\infty\right).$$

6. $\frac{\pi}{4}\left(\left(\sqrt{2a} - \sqrt{b}\right)^4 + 6\left(3 - 2\sqrt{2}\right)b^2\right) = 4\pi\left(19 - 12\sqrt{2}\right) \approx 25{,}5$.

Пусть ρ, r, R – радиусы окружностей K_1, K_2, K (рис.60) $b = 2R$, $AE = x$ – переменная, $x \in [R; a - R]$, $TE = PN = x - \rho =$

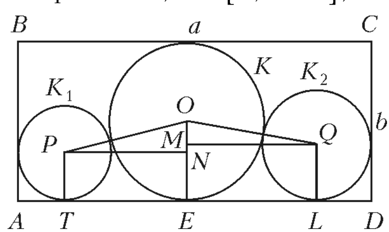

Рис. 60

$= 2\sqrt{R\rho}$. Тогда $EL = QM = 2\sqrt{Rr} = a - x - r$, $OP = R + \rho$, $OQ = R + r$, $OM = R - r$, $ON = R - \rho$.

Условия

$$\begin{cases} \rho + 2\sqrt{R}\cdot\sqrt{\rho} - x = 0, \\ r + 2\sqrt{R}\cdot\sqrt{r} - a + x = 0, \\ \rho^2 + r^2 \to \max \end{cases}$$

приводят к зависимости r и ρ от x в виде

$$\begin{cases} \rho = \left(\sqrt{x+R} - \sqrt{R}\right)^2, \\ \rho = \left(\sqrt{a-x+R} - \sqrt{R}\right)^2. \end{cases}$$

Обозначая $\varphi(x) = \left(\sqrt{x+R} - \sqrt{R}\right)^4$, приходим к тому, что $\rho^2 + r^2 = \varphi(x) + \varphi(a-x)$.

Свойства функции $\varphi(x)$:

1) $\varphi(x)\uparrow$ на отрезке $[R; a-R]$;

2) $\varphi'(x) = \dfrac{2\left(\sqrt{x+R} - \sqrt{R}\right)^3}{\sqrt{x+R}} > 0$, $x \in [R; a-R]$;

3) $\varphi''(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x+R} - \sqrt{R}\right)^2\left(2\sqrt{x+R} + \sqrt{R}\right)}{\left(\sqrt{x+R}\right)^3} > 0$,

$x \in [R; a-R]$, т.е. функция $\varphi'(x)\uparrow$ на отрезке $[R; a-R]$.

Критические точки функции:

$$\left(\rho^2 + r^2\right)' = \varphi'(x) - \varphi'(a-x) = 0 \Rightarrow \varphi'(x) = \varphi'(a-x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = a - x \Rightarrow x^* = \frac{a}{2}.$$

На концах отрезка значения функции $\rho^2 + r^2 = \varphi(x) + \varphi(a-x)$ одинаковы и равны

$$\varphi(R) + \varphi(a-R) =$$

$$= \left(\sqrt{2R} - \sqrt{R}\right)^4 + \left(\sqrt{a} - \sqrt{R}\right)^4 = \frac{b^2}{4}\left(\sqrt{2} - 1\right)^4 + \frac{1}{4}\left(\sqrt{2a} - \sqrt{b}\right)^4.$$

Это значение наибольшее для $\rho^2 + r^2$ при $b \le a \le 2b$. При этих же условиях минимальное значение $\rho^2 + r^2$ достигается при $x = a/2$, оно равно $2\varphi\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}\right)^4}{2}$. Тогда наибольшее значение суммы площадей кругов равно

$$S_{\max} = \pi\left(R^2 + \rho^2 + r^2\right)_{\max} = \frac{\pi}{4}\left(6\left(3 - 2\sqrt{2}\right)b^2 + \left(\sqrt{2a} - \sqrt{b}\right)^4\right),$$

а наименьшее –

$$S_{\min} = \pi\left(R^2 + \rho^2 + r^2\right) = \pi\left(\frac{b^2}{4} + \frac{\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{b}\right)^4}{2}\right).$$

ФИЗИКА

1. Поскольку система замкнута, то сумма сил, действующих на все тела системы, равна нулю. А так как массы тел одинаковы, то равна нулю и векторная сумма их ускорений. В рассматриваемый момент тела находятся на одной прямой, поэтому силы могут действовать только вдоль этой прямой. Значит, и ускорения тел могут быть направлены только вдоль этой прямой. Условию задачи не противоречат два случая направления заданных в условии ускорений: эти ускорения направлены одинаково или противоположно.

В первом случае вектор ускорения третьего тела направлен противоположно ускорениям первых двух тел и равен по величине $4a$. Во втором случае ускорение третьего тела равно $2a$ и направлено так же, как вектор ускорения $\vec{a}$ (и противоположно вектору $3\vec{a}$).

Заметим, что полученный результат не зависит от знаков и величин зарядов, а также от расстояний между телами.

2. Если бы совпадали сопротивления крайних резисторов, токи через амперметры были бы одинаковыми. Поэтому есть две возможности – равны друг другу сопротивления второго и третьего резисторов: $r_2 = r_3$ (а сопротивление первого от них отличается) или равны друг другу сопротивления первого и второго резисторов: $r_1 = r_2$ (а отличным от них является третье сопротивление).

Поскольку амперметры не имеют сопротивлений, резисторы включены в цепь параллельно источнику, причем амперметр A_1 измеряет ток, текущий через второй и третий резисторы, а амперметр A_2 – через первый и второй (рис.61). Поэтому

$$i_2 + i_3 = I_1 = I,$$

$$i_1 + i_2 = I_2 = \frac{2}{3}I,$$

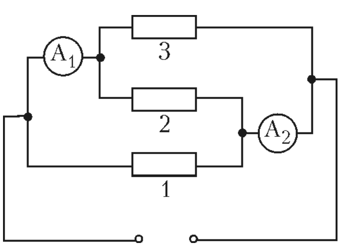

Рис. 61

где i_1, i_2, и i_3 – токи, текущие через первый, второй и третий резисторы соответственно. Учитывая, что в первом случае $i_2 = i_3$, получаем

$$i_2 = i_3 = \frac{I}{2}, \; i_1 = \frac{I}{6}.$$

Тогда в этом случае

$$r_2 = r_3 = \frac{r}{3}.$$

Во втором случае ($i_1 = i_2$) находим

$$i_1 = i_2 = \frac{I}{3}, \; i_3 = \frac{2I}{3}$$

и, следовательно,

$$r_2 = r, \; r_3 = \frac{r}{2}.$$

Таким образом, с данными условия совместимы два ответа:

$$r_2 = r_3 = \frac{r}{3}; \; r_2 = r, \; r_3 = \frac{r}{2}.$$

3. Условие равновесия самого нижнего стержня (условие равенства моментов относительно шарнира) дает (рис.62)

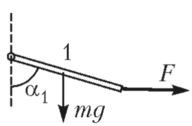

Рис. 62

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha_1 = Fl = \cos\alpha,$$

где l – длина стержня, α_1 – угол между первым стержнем и вертикалью. Отсюда находим

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2F}{mg}.$$

Рассмотрим теперь условие равновесия двух нижних стержней (рис.63). В качестве внешних сил на них действуют две силы тяжести, сила реакции второго шарнира (которым второй стержень связан с третьим) и сила $\vec{F}$. Используем далее условие равенства моментов относительно второго шарнира. При этом заметим, что плечо силы $\vec{F}$ относительно второго шарнира больше плеча силы $\vec{F}$ относительно первого на величину $l\cos\alpha_2$, а плечо силы тяжести первого стержня больше на величину $l\sin\alpha_2$. Поэтому условие равновесия дает

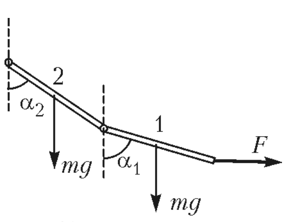

Рис. 63

$$mg\left(\frac{l}{2}\sin\alpha_1 + l\sin\alpha_2\right) + mg\frac{l}{2}\sin\alpha_2 = F\left(l\cos\alpha_1 + l\cos\alpha_2\right).$$

Отсюда, с учетом первого условия равновесия, находим

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{2F}{3mg}.$$

Теперь ясно, как будут находиться следующие углы – в знаменателе будет появляться нечетное число $2k - 1$, где k – номер стержня, угол наклона которого исследуется. Поэтому для 2016-го стержня имеем

$$\operatorname{tg}\alpha_{2016} = \frac{2F}{4031mg}.$$

4. Конечное давление газа в первом случае найдем по закону адиабатического процесса:

$$pV^{\gamma} = p_1(2V)^{\gamma}, \text{ и } p_1 = \frac{p}{2^{\gamma}}.$$

Работа, совершенная газом в этом процессе, равна уменьшению его внутренней энергии:

$$A = U_1 - U_2 = \frac{3}{2}(pV - p\cdot 2V) = \frac{3}{2}pV\left(1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}}\right).$$

Во втором процессе газ совершит ту же работу. Но если в первом случае она тратилась на увеличение потенциальной энергии поршня и песчинок, которые оказались на разных высотах, то теперь она будет потрачена на изменение потенциальной и кинетической энергии самого поршня:

$$A = (2Mgh - Mgh) + E_{\text{к}},$$

где M – масса поршня, h – высота расположения поршня над дном сосуда в начальном состоянии, $E_{\text{к}}$ – искомая кинетическая энергия. С другой стороны, давление газа после снятия песка теперь равно давлению поршня:

$$p_1 = \frac{Mg}{S},$$

где S – площадь сечения сосуда. Поэтому предыдущую формулу можно привести к виду

$$A = (p_1 \cdot 2V - p_1V) + E_{\text{к}} = p_1V + E_{\text{к}} = \frac{pV}{2^{\gamma}} + E_{\text{к}}.$$

Отсюда находим

$$E_{\text{к}} = A - \frac{pV}{2^{\gamma}} = \frac{3}{2}pV\left(1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}}\right) - \frac{pV}{2^{\gamma}} =$$

$$= pV\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2^{\gamma}} - \frac{1}{2^{\gamma}}\right) = pV\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2^{\gamma}}\right).$$

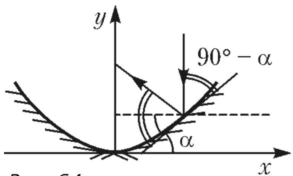

Рис. 64

5. Рассмотрим отражение от поверхности зеркала луча, имеющего (до отражения) координату x. Введем систему координат, как показано на рисунке 64. Тогда тангенс угла наклона поверхности зеркала в точке падения луча к оси x определяется производной нашей параболы:

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = 4x$$

(углы α отмечены на рисунке одной дугой). Геометрически очевидно, что угол между отраженным лучом и зеркалом в точке падения равен $90° - \alpha$ (отмечен на рисунке двумя дугами). Поэтому угол между отраженным лучом и осью x равен $90° - 2\alpha$. Следовательно, координата точки пересечения отраженного луча и оси y определяется соотношением

$$y = 2x^2 + x\operatorname{tg}(90° - 2\alpha) = 2x^2 + \frac{x}{\operatorname{tg}2\alpha}.$$

Используя далее известную формулу для тангенса двойного угла и соотношение для $\operatorname{tg}\alpha$, получим

$$y = 2x^2 + \frac{x\left(1 - \operatorname{tg}^2\alpha\right)}{2\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{8}.$$

Таким образом, расстояние от вершины параболы до точки пересечения рассматриваемого луча и оси y не зависит от луча. Это значит, что все лучи придут в точку, лежащую на расстоянии $1/8$ от вершины параболы.

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $L = \frac{a_1\Delta t_1^2}{2} + a_1\Delta t_1\Delta t_2 + \frac{a_2\Delta t_2^2}{2} = 87{,}5$ м (см. рисунок к условию).

2. $\frac{U_2}{U_1} = \frac{2}{3}$. **3.** $\Delta H = \frac{h}{1 + \left(kH/(p_0S_0)\right)}\frac{S}{S_0}$. **4.** $\Delta\omega = \frac{qB}{m}$.

5. $N = \frac{m}{\mathrm{M}_\text{в}\frac{V}{V_0} - \mathrm{M}_\text{г}\frac{V}{V_0} - m_\text{ш}} = 800$ (здесь m = 80 кг – масса