Инженерная олимпиада школьников-2014/2015

Представлены задания заключительного тура III инженерной олимпиады школьников, проведённой силами пяти ведущих российских вузов.
Проведён подробный разбор решений. Задачи отборочного тура см. в № 9/2015.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: абитуриент, инженерная олимпиада, динамика, электростатика, электродинамика, термодинамика, МКТ, НГТУ, СПбГЭТУ «ЛЭТИ», НИЯУ МИФИ, МГУПС (МИИТ), СГАУ

М.Е. БУШУЕВА
(НГТУ, Нижний Новгород),
Б.Г. КОМАРОВ
(СПбГЭТУ «ЛЭТИ», Санкт-Петербург),
С.Е. МУРАВЬЁВ
semuraviev@mail.ru
(НИЯУ МИФИ, г. Москва)
В.И. СКРЫТНЫЙ
viskrytnyj@mephi.ru
(НИЯУ МИФИ, г. Москва),
А.П. ПРУНЦЕВ
(МГУПС (МИИТ), г. Москва),
И.В. ЧОСТКОВСКАЯ
(СГАУ, г Самара)

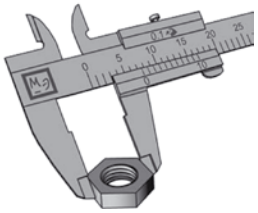
Начиная с 2011 г., пять ведущих технических университетов нашей страны – Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), Нижегородский государственный технический университет имени Р.Е. Алексеева, Самарский государственный аэрокосмический университет (национальный исследовательский университет) и Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» – проводят Инженерную олимпиаду школьников, задания которой связаны с физикой в технике, физикой в современных технологиях, физикой в жизни человека. В течение двух последних лет олимпиада входит во всероссийский перечень олимпиад школьников (под номером 9), что даёт возможность победителям и призёрам олимпиады получить значительные льготы при поступлении в вузы (любые, а не только вузы-организаторы олимпиады). Ниже приводится задание заключительного тура инженерной олимпиады школьников 2014/2015 уч. г.

В будущем году мы обязательно продолжим проведение Инженерной олимпиады, так что приглашаем всех желающих принять в ней участие. Следите за сайтами вузов-организаторов.

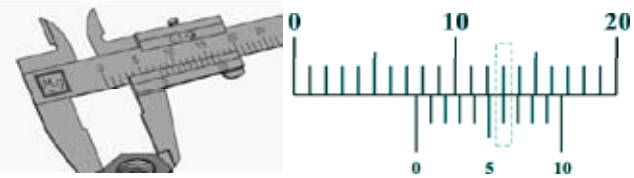
Задания заключительного тура

9–10 классы

1. Для измерений размеров используется точный измерительный прибор – штангенциркуль, который кроме основной шкалы имеет дополнительную подвижную шкалу – нониус, цена деления которой составляет 0,9 мм. Название *нониус* произошло от фамилии автора – португальского математика Нуниша (*Nonius*). Нониус позволяет измерять размеры с точностью 0,1 мм*. Объясните, как это удаётся сделать.



Решение. При измерении предмет зажимают между неподвижной и подвижной частями штангенциркуля. Если нуль шкалы нониуса при этом точно попал на миллиметровое деление основной шкалы, размер предмета равен целому числу миллиметров (показанию основной шкалы). Если размер предмета не равен целому числу миллиметров, то нуль шкалы нониуса попадёт между двумя делениями основной шкалы. В этом случае и работает шкала нониуса, которая позволяет определить размер предмета с точностью до 0,1 мм. Это делается так. Поскольку цена деления шкалы нониуса равна 0,9 мм, то 10 делений шкалы нониуса (полная шкала) равны 9 мм, 9 делений шкалы нониуса – 8,1 мм, 8 делений шкалы – 7,2 мм, 7 делений – 6,3 мм, 6 делений – 5,4 мм, 5 делений – 4,5 мм, 4 деления – 3,6 мм, 3 деления – 2,7 мм, 2 деления – 1,8 мм, 1 деление – 0,9 мм. Поэтому если размер предмета равен целому числу миллиметров плюс 0,9 мм, расстояние от нуля шкалы нониуса до следующего миллиметрового деления основной шкалы будет равно 0,1 мм, и с одним из делений основной шкалы совпадёт девятое деление шкалы нониуса (поскольку оно находится от нуля шкалы нониуса на расстоянии 8,1 мм). Если размер предмета равен целому числу миллиметров плюс 0,8 мм, расстояние между нулём шкалы нониуса и следующим миллиметровым делением



*Существуют штангенциркули, позволяющие измерять с точностью до 0, 05 мм. – *Ред.*

основной шкалы равно 0,2 мм, и с одним из делений основной шкалы совпадет восьмое деление шкалы нониуса. Если размер предмета равен целому числу миллиметров плюс 0,7 мм, расстояние между нулём шкалы нониуса и следующим миллиметровым делением основной шкалы равно 0,3 мм, и с одним из целых значений основной шкалы совпадёт седьмое деление шкалы нониуса. И так далее. Таким образом, размер предмета определяется так: он равен целому числу миллиметровых делений основной шкалы, которое «перешагнул» нуль шкалы нониуса, и такому числу десятых долей миллиметра, какое деление шкалы нониуса точно совпало с одним из миллиметровых делений основной шкалы (для примера, показанного на рисунке, это 7,6 мм).

2. Оцените объём своего тела. Также оцените и обоснуйте точность этой оценки, то есть укажите интервал вблизи данного вами значения, внутрь которого истинное значение объёма обязательно попадёт. Значения всех необходимых для оценки величин выберете сами, исходя из своих знаний, опыта и здравого смысла.

Решение. Проще (и точнее) всего объём тела человека оценить, как $V = m/\rho$, где в качестве плотности нужно взять плотность воды 1000 кг/м^3 = 1 кг/л, поскольку тело человека содержит много воды. Таким образом, объём тела человека в литрах численно равен его массе в килограммах. Это значение приближённое, в том числе и потому, что объём тела человека меняется при дыхании. Точность этой оценки можно оценить так. Объём лёгких взрослого человека 5–6 л. При дыхании вентилируется около 1 л объёма лёгких. Как мы знаем, тело человека при полном вдохе плавает на поверхности воды, при полном выдохе – тонет (изменение объёма тела и, соответственно, средней плотности, при вдохе-выдохе используют аквалангисты для подъёма или погружения). Это значит, что при наполнении лёгких средняя плотность тела становится чуть меньше плотности воды, при выдохе – чуть больше. Поэтому точность нашей оценки объема ±1 л.

3*. Колонны Исаакиевского собора в Санкт-Петербурге изготовлены из гранита и имеют высоту h = 30 м**. Оцените, на сколько сжаты колонны под действием собственной тяжести. Плотность гранита $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, модуль Юнга $E = 5 \cdot 10^{10}$ Па.

Указание. Модуль Юнга E определяется как коэффициент пропорциональности между механическим напряжением (F/S) и относительным удлинением

образца ($\Delta l/l$): $F/S = E \cdot (\Delta l/l)$, где F – сила, растягивающая или сжимающая образец, S – площадь поперечного сечения образца, Δl – его удлинение или укорочение, l – первоначальная длина.

Решение. В самом верху колонна не будет сжата, в середине – сжата половиной своего веса, внизу – всем своим весом. Поэтому оценим среднее относительное сжатие колонны как её относительное сжатие посередине. Малый поперечный элемент колонны толщиной l в её середине сжимается половиной её веса. Поэтому напряжение этого элемента равно $\sigma = \dfrac{F}{S} = \dfrac{\rho g h}{2}$, где S – площадь сечения колонны.

По закону Гука, имеем для относительного сжатия ε рассматриваемого элемента:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{\rho g h}{2E}, \qquad (1)$$

где Δl – деформация элемента. Если считать, что относительная деформация (1) будет у всей колонны, то её полная деформация составит

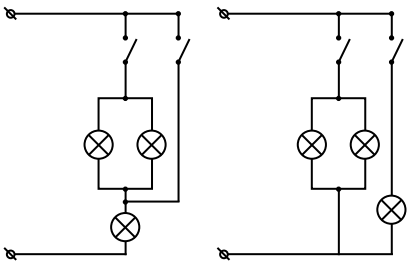
$$\Delta h = \varepsilon h = \frac{\rho g h^2}{2E} = 2{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

4. При установке трёхламповой люстры с двумя выключателями была допущена ошибка. В результате этого при замыкании одного из выключателей все три лампы горели неполным накалом. При замыкании другого выключателя нормально горела только одна из ламп, а две другие вообще не горели. Тот же эффект давало одновременное замыкание обоих выключателей. При разомкнутых выключателях все три лампы не горели. Нарисуйте возможную схему выполненного монтажа и объясните, как нужно исправить схему, чтобы при помощи этих выключателей включались и горели полным накалом одна (при замыкании одного выключателя), две (при замыкании второго) или все три лампы (при замыкании обоих выключателей).

*Задача № 821 из «Сборника задач по физике для 9–11 классов», сост. Г.Н. Степанова.

**При этом высота колонн Исаакиевского собора – 17 м (https://ru.wikipedia.org/wiki/Исаакиевский_собор). – *Ред.*

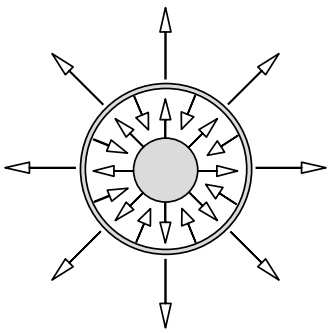
Решение. Лампы горят слабым накалом, если к напряжению бытовых электрических сетей (220 В) они подключаются не параллельно, а последовательно (в этом случае напряжение на каждой из ламп меньше рабочего напряжения лампы, равного 220 В). Одна из возможных схем неправильного включения ламп показана на левом рисунке. Правый рисунок даёт правильную схему включения ламп.



5. Космическая станция представляет собой шар радиуса R, температура поверхности которого в результате работы аппаратуры внутри станции и излучения тепла в пространство поддерживается равной T. Станцию окружают тонкой сферической оболочкой радиуса $2R$. Найти новую температуру поверхности станции и температуру оболочки.

Указание. Единица поверхности станции и оболочки излучают по всем направлениям энергию, пропорциональную четвёртой степени их температуры (закон Стефана–Больцмана).

Решение. В установившемся режиме вся энергия, выделяемая аппаратурой внутри станции, излучается в окружающее пространство. Поэтому по закону Стефана–Больцмана (см. указание к условию задачи) находим



$$w = 4\pi R^2 \sigma T^4, \qquad (2)$$

где w – мощность выделения энергии внутри станции, σ –коэффициент пропорциональности в законе Стефана–Больцмана (постоянная Стефана). Оболочка, которой окружили станцию, излучает в окружающую среду точно такую же энергию (поскольку вся энергия, выделяемая аппаратурой в установившемся режиме, должна излучаться). Поэтому

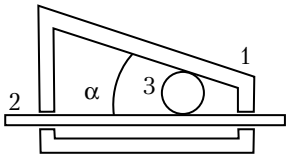
$$w = 4\pi (2R)^2 \sigma T_0^4, \qquad (3)$$

где T_0 – температура оболочки. Отсюда $T_0 = T/\sqrt{2}$.

Новую температуру поверхности станции можно найти из следующих соображений. Оболочка излучает энергию (3) и наружу, и внутрь. Поэтому в установившемся режиме поверхность станции должна излучать вдвое большую энергию. Отсюда находим новую температуру поверхности станции:

$$T_c' = \sqrt[4]{2}T.$$

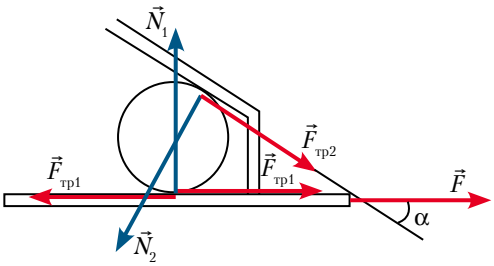
6. Храповым механизмом называется устройство, допускающее движение подвижных частей (зубчатых колёс, штоков и др.) только в одном направлении. Во фрикционных храповых механизмах силой, препятствующей движению, является сила трения. На рисунке представлен фрикционный храповой механизм, состоящий из полого наклонного корпуса *1* и направляющей *2*, которая может перемещаться вправо или влево в отверстиях в корпусе. Между направляющей и наклонной гранью корпуса расположен маленький шарик *3*. Объясните принцип работы механизма. Какое трение – между шариком и направляющей, шариком и корпусом, направляющей и корпусом обеспечивает его работу? В каком направлении – направо или налево – механизм препятствует движению направляющей? Считая, что коэффициент трения между шариком и направляющей равен μ и меньше коэффициента трения между шариком и корпусом, определите, при каком угле α храповой механизм не позволит направляющей перемещаться в одном из направлений при любой действующей на неё внешней силе.



Решение. Очевидно, трение будет препятствовать вытаскиванию направляющей вправо, поскольку может возникнуть эффект заклинивания – сила трения между направляющей и шариком «потянет» шарик вправо, это приведёт к увеличению сил реакции, что в свою очередь увеличит трение. Нарушение работы храпового механизма рассматриваемого типа может происходить в двух местах. При малом трении между шариком и направляющей направляющую можно вытащить вправо, и шарик не будет ей мешать, но при этом не будет вращаться, поскольку вращаться ему не позволит трение между ним и корпусом. При малом трении между шариком и корпусом проскальзывание между шариком и направляющей не будет возникать, но направляющую можно вытащить вправо, вращая шарик, поскольку его вращению не мешает трение между ним и корпусом. Таким образом, и трение между направляющей и шариком, и трение между шариком и корпусом необходимы для нормальной работы храпового механизма рассматриваемого типа, причём, по условию, нарушаться его работа будет при проскальзывании шарика относительно корпуса (там, по условию, меньше трение).

Пусть на направляющую действует горизонтальная сила $\vec{F}$, направленная вправо. Пока механизм работает, шарик находится в равновесии. Поэтому применим к шарику условия равновесия и исследуем возможность их нарушения.

На шарик действуют – сила трения со стороны направляющей $F_{тр1}$, направленная вправо и равная



внешней силе, поскольку направляющая находится в равновесии, сила трения со стороны корпуса $F_{тр2}$, направленная вправо-вниз (по часовой стрелке, поскольку в отсутствие трения между шариком и корпусом шарик вращался бы против часовой стрелки, а трение препятствует этому вращению), сила реакции со стороны направляющей $\vec{N}_1$ и сила реакции со стороны корпуса $\vec{N}_2$ (см. рисунок). Учитывая условия равновесия шарика и направляющей, запишем:

– уравнение сил (горизонтальная ось):

$$N_2 \sin\alpha - F_{тр2}\cos\alpha - F_{тр1} = 0;$$

– уравнение сил (вертикальная ось):

$$N_1 - N_2\cos\alpha - F_{тр2}\sin\alpha = 0;$$

– условие равенства моментов (относительно центра шарика): $F_{тр1} = F_{тр2}$;

– условие равновесия направляющей: $F_{тр1} = F$, где α – угол наклона наклонной грани корпуса (см. рисунок в условии задачи; силой тяжести шарика пренебрегаем по сравнению с силами реакции и трения).

Из этой системы уравнений находим N_1 и N_2:

$$N_1 = N_2 = \frac{(1+\cos\alpha)F}{\sin\alpha}.$$

С ростом внешней силы $\vec{F}$ растут силы реакции и максимальные значения сил трения. Поэтому равновесие не нарушится при любом значении внешней силы, если выполнено условие:

$$F_{тр2} \le \mu N_2 \Rightarrow \mu \ge \frac{\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

(при этом аналогичное условие между направляющей и шариком также не нарушится, поскольку силы реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ одинаковы, а коэффициент трения между шариком и корпусом меньше коэффициента между шариком и направляющей). Отсюда находим ограничение на угол наклона грани корпуса механизма:

$$\alpha \le 2\operatorname{arctg}\mu.$$

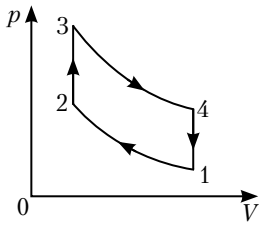
11 класс

1. Задача № 1 из задания для 9–10 класса.

2. Задача № 2 из задания для 9–10 класса.

3. Задача № 4 из задания для 9–10 класса.

4. Двигатель внутреннего сгорания работает по циклу, состоящему из двух адиабат и двух изохор (цикл Отто). Бензин впрыскивается в цилиндр двигателя при комнатной температуре (t_1 = 20 °C), состояние *1* на рисунке. Затем на участке *1-2* смесь воздуха с бензином адиабатно (без теплообмена с окружающей средой) сжимается, нагреваясь до температуры t_2 = 250 °C. Затем смесь поджигается (участок *2-3*), затем совершает работу на участке адиабатного расширения *3-4*, а затем на участке *4-1* выбрасывается из цилиндра и заменяется на холодный атмосферный воздух. Найти КПД двигателя. В адиабатном процессе давление и объём газа связаны соотношением: pV^γ = const, где γ – некоторое известное число.



Решение. Поскольку процессы *1-2* и *3-4* – адиабатные, КПД цикла определяется соотношением

$$\eta = \frac{Q_{2-3} - Q_{1-4}}{Q_{2-3}},$$

где $Q_{2\text{-}3}$ – количество теплоты, полученное газом на участке *3-2*, $Q_{1\text{-}4}$ – количество теплоты, отданное газом на участке *1-4*. Поскольку процессы *2-3* и *4-1* – изохорные,

$$Q_{2\text{-}3} = \alpha R(T_3 - T_2),\ \ Q_{1\text{-}4} = \alpha R(T_4 - T_1), \qquad (4)$$

где α – коэффициент пропорциональности, зависящий от атомности газа, T_3 и T_4 – температуры газа в состояниях *3* и *4*. Из закона Клапейрона–Менделеева имеем:

$$T_3 - T_2 = \frac{V_{2,3}(p_3 - p_2)}{\nu R} = \frac{V_{2,3}p_2\left(\frac{p_3}{p_2} - 1\right)}{\nu R} = T_2\left(\frac{p_3}{p_2} - 1\right),$$

$$T_4 - T_1 = \frac{V_{4,1}(p_4 - p_1)}{\nu R} = \frac{V_{4,1}p_1\left(\frac{p_4}{p_1} - 1\right)}{\nu R} = T_1\left(\frac{p_4}{p_1} - 1\right), \qquad (5)$$

где $V_{2,3} = V_2 = V_3$ и $V_{4,1} = V_4 = V_1$ – объём газа в состояниях *2*, *3* и *4*, *1* соответственно. Очевидно, отношение давлений на концах изохор одинаковое. Действительно, из уравнения адиабаты (см. указание к условию) имеем:

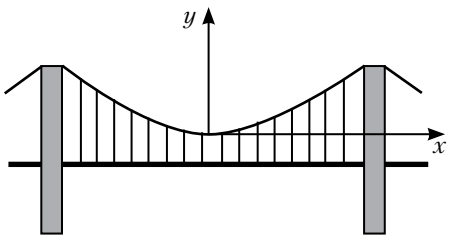
$$p_4 = p_3\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^\gamma, \qquad p_1 = p_2\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma.$$

Поэтому давление на изохорах *2-3* и *4-1* изменяется в одинаковое количество раз: $\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_3}{p_2}$.

В результате, из определения КПД и формул (4), (5), находим: $\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{230}{523} \approx 0{,}44.$

5. Задача № 6 из задания для 9–10 класса.

6. В настоящее время в мире широко используются висячие мосты («Акаси-Кайкё», Япония, длина основного пролёта 1991 м; «Золотые ворота» США, 1280 м; «Босфорский мост», Турция; 1074 м и др.). Несущая конструкция висячего моста представляет собой гибкий элемент – «кабель» или «цепь», закреплённый на прочных опорах – пилонах, а проезжая часть подвешена к цепи на вертикальных тросах. Считая, что масса проезжей части моста много больше массы цепи, вертикальные тросы расположены близко друг к другу (так, что цепь можно считать плавной кривой), а их длины подобраны так, что силы натяжения всех тросов одинаковы, найти форму цепи (уравнение цепи в системе координат, показанной на рисунке).



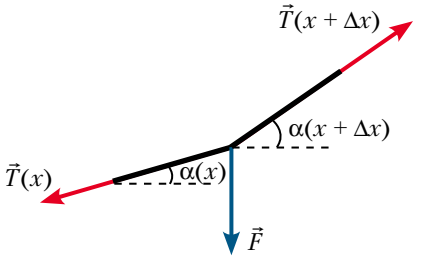
Решение. Рассмотрим элемент цепи между двумя тросами, расположенными через один (см. рисунок). На этот участок действуют две силы натяжения цепи (по краям) и сила со стороны вертикального троса (в центре). Условия равновесия этого элемента дают

$$\begin{cases} T(x+\Delta x)\cos\alpha(x+\Delta x) = T(x)\cos\alpha(x), \\ T(x+\Delta x)\sin\alpha(x+\Delta x) = F + T(x)\sin\alpha(x), \end{cases}$$

где $T(x)$ – сила натяжения цепи как функция x, $\alpha(x)$ – угол наклона цепи к горизонту как функция x, Δx – расстояние между ближайшими тросами, $\vec{F}$ – сила натяжения вертикальных тросов (которая по условию одинакова для всех тросов и которая может быть связана с массой моста и количеством вертикальных тросов N: $F = Mg/N$). Добавляя и вычитая из первого равенства величину $T(x + \Delta x)\cos\alpha(x)$ и деля его на Δx, получим:

$$T(x+\Delta x)\cdot\left(\frac{\cos\alpha(x+\Delta x) - \cos\alpha(x)}{\Delta x}\right) =$$

$$= -\cos\alpha(x)\cdot\frac{T(x+\Delta x) - T(x)}{\Delta x} \qquad (6)$$



Если считать, что Δx мало, то выражения в скобках представляют собой определения производных. Поэтому из формулы (6) находим:

$$T(x)\cos'\alpha(x) = -\cos\alpha(x)T'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(T(x)\cos\alpha(x)\right)' = 0,$$

где штрих обозначает производную соответствующей функции по x. Отсюда:

$$T(x)\cos\alpha(x) = A, \qquad (7)$$

где A – некоторая постоянная (имеющая смысл горизонтальной составляющей силы натяжения цепи и равная горизонтальной составляющей силы, действующей со стороны цепи на пилоны). Аналогичные вычисления со вторым условием равновесия дают $(T(x)\sin\alpha(x))' = f$, где $f = F/\Delta x$ – удельная нагрузка на единицу длины моста. Отсюда:

$$T(x)\sin\alpha(x) = fx + B, \qquad (8)$$

где B – некоторая постоянная. Выражая из (7) силу $T(x)$ и подставляя её в (8), получим:

$$A\,\mathrm{tg}\,\alpha(x) = fx + B.$$

Но тангенс угла наклона цепи к горизонту (к оси x) есть производная уравнения цепи по переменной x. Поэтому $Ay'(x) = fx + B$, причём, поскольку при $x = 0$ (нижняя точка цепи) цепь расположена горизонтально, постоянная B должна быть взята равной нулю. Так как производная уравнения цепи $y'(x)$ зависит от x линейно, то y зависит от x квадратично:

$$y(x) = \frac{f}{2A}x^2 + C,$$

где C – постоянная, которая должна быть выбрана равной нулю, так как $y = 0$ при $x = 0$. Таким образом, цепь представляет собой параболу:

$$y(x) = \frac{f}{2A}x^2.$$