Очный отборочный тур олимпиады «Росатом» в СНГ, осень 2019
11 класс, комплект 2

Вариант № 1

1. В процессе опроса группы старшеклассников выяснилось, что каждого из них можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: умеющих водить автомобиль, мотоцикл и кататься на самокате. Известно, что каждый шестой водитель автомобиля может управлять мотоциклом, а каждый третий мотоциклист способен вести автомобиль. Каждый четвертый автомобилист может ехать на самокате, при этом шестая часть самокатчиков может управлять автомобилем. Наконец, каждый четвертый мотоциклист может ехать на самокате, при этом только двенадцатая часть самокатчиков может управлять мотоциклом. Только один самокатчик признался, что умеет ездить на машине и мотоцикле. Сколько школьников участвовало в опросе, если анкет было выдано не более семидесяти?

2. При каких целых n функция $f(x)=\sin(n+1)x\cdot\cos\dfrac{7x}{n}$ является периодической с периодом $T=2\pi$?

3. Петя записал в первый столбик все четырехзначные числа, в записи которых используются цифры от 0 до 5, а во второй – произведения цифр каждого такого числа. Вася сумел в уме вычислить сумму чисел, записанных во втором столбце. Какой результат он получил?

4. Случайная величина a равномерно распределена на отрезке $\left[-1;5\right]$. Найти вероятность того, что все корни квадратного уравнения $x^2-ax+a-3=0$ не меньше -1.

5. Сколько существует различных пар целых чисел a и b, для которых уравнение $ax^2+bx+108=0$ имеет целые положительные корни?

6. Окружность радиуса 1 касается прямой P в точке A и прямой Q в точке B так, что хорда стягивает дугу окружности в

60^0. Прямые P и Q пересекаются в точке F. Точка C расположена на луче AF, а точка D – на луче FB так, что $AC = BD = 2$. Найти длину медианы треугольника CBD, проведенной из вершины B.

Ответы и решения

1. Пусть среди старшеклассников, участвовавших в опросе, x, y и $z-$число автомобилистов, мотоциклистов и самокатчиков соответственно. Тогда по условию имеем

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{3}, \quad \frac{x}{4} = \frac{z}{6}, \quad \frac{z}{12} = \frac{y}{4},$$

отсюда получаем

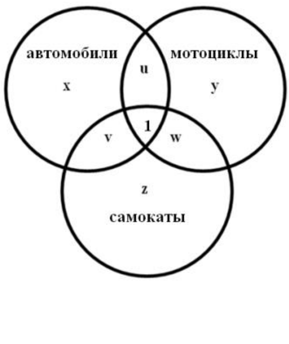
$$x = 2y, \quad z = 3y,$$

более того, видим, что y должно быть кратно 3 и 4, следовательно, кратно 12. Тогда положим

$$y = 12k, \quad x = 24k, \quad z = 36k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть теперь u – число автомобилистов—мотоциклистов, не водящих самокаты, v – число автомобилистов—самокатчиков, не водящих мотоциклы, а w – число мотоциклистов—самокатчиков, не водящих автомобили. Данные представлены на диаграмме. Тогда по условию

$$\begin{cases} u + 1 = \dfrac{y}{3} = 4k, \\ v + 1 = \dfrac{x}{4} = 6k, \\ w + 1 = \dfrac{z}{12} = 3k. \end{cases}$$



Отсюда получаем

$u = 4k - 1, \ v = 6k - 1, \ w = 3k - 1.$

При этом общее число школьников, участвовавших в опросе, было

$$x + y + z - u - v - w - 2 \cdot 1 = 59k + 1.$$

Всего анкет участников опроса не более 70, следовательно, $59k+1\le 70,$ значит, $k=1.$ Таким образом, всего в опросе участвовало $59\cdot 1+1=60$ школьников.

Ответ: 60 школьников.

2. По условию задачи $f(x+T)=f(x),\ x\in R.$ Для функции $f(x)=\sin(n+1)x\cdot\cos\dfrac{7x}{n}$ получаем тождество

$$\sin(n+1)(x+2\pi)\cdot\cos\frac{7(x+2\pi)}{n}\equiv\sin(n+1)x\cos\frac{7x}{n}.$$

В силу того, что функция $\sin x$ является периодической с периодом $2\pi,$ это тождество преобразуется к виду

$$\sin(n+1)x\cdot\cos\frac{7(x+2\pi)}{n}\equiv\sin(n+1)x\cos\frac{7x}{n}.$$

Перенесем выражение из правой части тождества в левую, и вынесем общий множитель

$$\sin(n+1)x\left(\cos\frac{7(x+2\pi)}{n}-\cos\frac{7x}{n}\right)\equiv 0.$$

Применим формулу разности косинусов

$$-2\sin(n+1)x\sin\left(\frac{7x}{n}+\frac{7\pi}{n}\right)\sin\frac{7\pi}{n}\equiv 0.$$

Тождество справедливо, если $\sin\dfrac{7\pi}{n}=0$ или $\dfrac{7\pi}{n}=\pi m,\ m\in Z.$

Отсюда находим $n=\dfrac{7}{m},\ m\in Z.$ Учитывая целочисленность $n,$ получаем $n=\pm 1,\pm 7.$

Ответ: $n=\pm 1,\pm 7.$

3. Сумма таких произведений получится в результате раскрытия скобок в выражении
$(1+2+3+4+5)(0+1+2+3+4+5)(0+1+2+3+4+5)(0+1+2+3+4+5).$
Сумма слагаемых в каждой скобке равна 15, а число скобок равно 4. Следовательно, сумма произведений равна $15^4=50625.$

Ответ: $15^4 = 50625.$

4. Дискриминант квадратного трехчлена

$$D = a^2 - 4a + 12 = (a-2)^2 + 8 > 0$$

и поэтому уравнение всегда имеет два различных корня. Воспользуемся условиями расположения корней квадратного трехчлена. В случае положительного дискриминанта корни

$$f(x) = x^2 + px + q$$

лежат справа от $x=b$ тогда и только тогда, когда $f(b)\geq 0$ и абсцисса вершины графика также лежит справа от $x=b$. Это приводит к системе

$$\begin{cases} 2a - 2 \geq 0 \\ \dfrac{a}{2} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ a \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 1$$

Таким образом, пространство всех событий составляет отрезок [-1;5], а пространство благоприятных событий – отрезок [1;5]. Вероятность искомого события $P(A) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}.$

Ответ: $P(A) = \dfrac{2}{3}.$

5. Рассмотрим сначала пары, в которых $a = 0.$ Для таких пар получим линейное уравнение $bx + 108 = 0.$ Пусть $x_1 -$ его положительный корень. Имеем $b \cdot x_1 = -108 = -2^2 \cdot 3^3,$ значит, $b < 0,$ и числа b и x_1 не могут иметь простых делителей, отличных от 2 и 3. Всего имеется $(2+1)(3+1) = 12$ различных (положительных) делителей числа 108, поскольку у делителя кратность двойки можно выбрать тремя способами: 0, 1 или 2; при этом кратность тройки можно выбрать четырьмя способами: 0, 1, 2 или 3. Таким образом, x_1 может принимать 12 различных значений, при каждом из них b определяется однозначно: $b = {-108}/{x_1}.$ Соответственно, существует 12 пар вида $(0, b).$

Пусть теперь $a \neq 0$ и $x_1, x_2 -$ целые положительные решения уравнения $ax^2 + bx + 108 = 0.$ Тогда по теореме Виета получим $a \cdot x_1 \cdot x_2 = 108 = 2^2 \cdot 3^3.$ Следовательно, $a > 0,$ а числа $a,\ x_1,\ x_2$ не могут иметь простых делителей, отличных от 2 и 3. Таким образом, имеют место разложения $a = 2^s 3^q,\ x_1 = 2^{s_1} 3^{q_1},\ x_2 = 2^{s_2} 3^{q_2},$ где $s, s_1, s_2, q, q_1, q_2 \geq 0 -$ кратности простых множителей, причем

$$s_1 + s_2 = 2 - s, \quad q_1 + q_2 = 3 - q.$$

При фиксированных s, q существует $(3-s)(4-q)$ способов выбрать $s_1, q_1,$ то есть выбрать x_1. При этом $s_2, q_2,$ а значит и x_2 определяются однозначно: $s_2 = 2 - s - s_1, \quad q_2 = 3 - q - q_1.$ В силу того, что наборы (x_1, x_2), очевидно обладают симметрией, различных значений сумм будет $\left[\frac{(3-s)(4-q)+1}{2}\right]$(квадратные скобки означают целую часть числа).

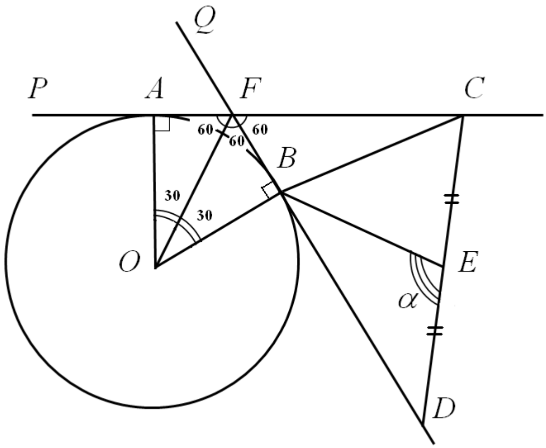
a		Способов выбрать s_1 $(3-s)(4-q)$	Различных значений сумм $x_1 + x_2$
q	s		
0	0	12	6
	1	8	4
	2	4	2
1	0	9	5
	1	6	3
	2	3	2
2	0	6	3
	1	4	2
	2	2	1
3	0	3	2
	1	2	1
	2	1	1
			Всего: 32

Поскольку по теореме Виета $b=-\left(x_1+x_2\right)a$, число различных пар a и b, удовлетворяющих условию задачи, в случае квадратного уравнения равно 32.

Общее количество пар будет 32+12 =44.

Ответ: 44 пары.

6. Пусть точка $O-$ центр окружности. Тогда $OA\perp P$, $OB\perp Q$, $OA=OB=1$.



По условию хорда AB стягивает дугу окружности в $60°$, значит $\measuredangle AOB=60°$.

Далее, $AF=FB$, так как это отрезки касательных, проведенных к данной окружности из одной точки.

Проведем отрезок OF. Тогда прямоугольные треугольники AOF и BOF равны по гипотенузе и катету. Значит, $\measuredangle AOF=\measuredangle BOF=30°$. Тогда $\measuredangle AFO=\measuredangle BFO=60°$. Отсюда $\measuredangle BFC=60°$.

Из прямоугольных треугольников AOF и BOF получаем $AF=FB=1\cdot\operatorname{tg}30°=1/\sqrt{3}$.

Применим теорему косинусов в треугольниках BFC и DFC:

$$BC^2=BF^2+CF^2-2\cdot BF\cdot CF\cdot\cos 60°=$$

$$=\frac{1}{3}+\left(2-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=5-2\sqrt{3},$$

$$CD^2=DF^2+CF^2-2\cdot DF\cdot CF\cdot\cos 60°=$$

$$=\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(2-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(2-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=5.$$

Рассмотрим теперь треугольник BCD. Пусть $m_B = BE -$ его медиана. Тогда $CE = DE = \frac{1}{2}CD$.

Применим теорему косинусов в треугольниках BCE и BDE:

$$BD^2 = BE^2 + DE^2 - 2 \cdot BE \cdot DE \cdot \cos\alpha,$$

$$BC^2 = BE^2 + CE^2 - 2 \cdot BE \cdot CE \cdot \cos\left(180° - \alpha\right) =$$

$$= BE^2 + CE^2 + 2 \cdot BE \cdot CE \cdot \cos\alpha.$$

Складывая, получим

$$BC^2 + BD^2 = 2 \cdot BE^2 + DE^2 + CE^2,$$

откуда, домножив на 2 и учитывая равенство CE и DE, получим:

$$4 \cdot BE^2 = 2 \cdot BC^2 + 2 \cdot BD^2 - 2\left(DE^2 + CE^2\right) = 2 \cdot BC^2 + 2 \cdot BD^2 - CD^2.$$

Окончательно,

$$BE^2 = \frac{2 \cdot BC^2 + 2 \cdot BD^2 - CD^2}{4} = \frac{2\left(5 - 2\sqrt{3} + 4\right) - 5}{4} = \frac{13 - 4\sqrt{3}}{4}.$$

Тогда медиана $m_B = BE = \sqrt{\dfrac{13 - 4\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{\left(2\sqrt{3} - 1\right)^2}}{2} = \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}.$

Ответ: $m_B = \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}.$

Вариант № 2

1. Выяснилось, что каждого из опрошенных можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: любитель рока, джаза и классики. Известно, что каждый пятый любитель рока с удовольствием слушает джаз, а каждый третий поклонник джаза слушает рок. Четыре из каждых пятнадцати любителей классики могут слушать рок, а пятая часть поклонников рока получает удовольствие, слушая классику. Наконец, каждый пятый любитель классики является поклонником джаза, а четвертая часть джазовых фанатов слушает классику. Пять любителей рока считают себя поклонниками джаза и классики. Сколько человек было опрошено, если их число не превысило девяносто?

Ответ: 77 человек.

2. При каких целых n функция $f(x)=\cos 3nx\cdot\cos\dfrac{16x}{n}$ является периодической с периодом $T=3\pi$?

Ответ: $n=\pm16,\pm48.$

3. Петя записал в первый столбик все трехзначные числа, в записи которых используются цифры от 0 до 6, а во второй – произведения цифр каждого такого числа. Вася сумел в уме вычислить сумму чисел, записанных во втором столбце. Какой результат он получил?

Ответ: $21^3=9261.$

4. Случайная величина a равномерно распределена на отрезке $[-4;4]$. Найти вероятность того, что хотя бы один из корней квадратного уравнения $x^2-2ax-a-4=0$ по абсолютному значению не превосходит 1.

Ответ: $P(A)=\dfrac{1}{2}.$

5. Сколько существует различных пар целых чисел a и b, для которых уравнение $ax^2+bx+16875=0$ имеет целые положительные корни?

Ответ: 78+20= 98 пар.

6. Окружность радиуса 2 касается прямой P в точке A и прямой Q в точке B так, что хорда AB стягивает дугу окружности в 60^0. Прямые P и Q пересекаются в точке F. Точка C расположена на луче FA, а точка D – на луче BF так, что $AC=BD=3$. Найти длину медианы треугольника CBD, проведенной из вершины B.

Ответ: $m_B=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+1.$

Вариант № 3

1. Каждого студента, присутствующего на лекции, можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: отличник, спортсмен, блондин. Известно, что каждый четвертый блондин занимается спортом, а четверть спортсменов – блондины. Каждый третий спортсмен отличник, а треть отличников – не занимается спортом. Наконец, $5/12$ отличников – блондины, а $5/24$ блондинов – отличники. Только два студента блондина являются спортсменами и отличниками одновременно. Сколько студентов слушают лекцию, если по мнению лектора их не более восьмидесяти?

Ответ: 43 студента.

2. При каких целых n функция $f(x) = \sin 5nx \cdot \sin \dfrac{9x}{n}$ является периодической с периодом $T = \pi$?

Ответ: $n = \pm 1, \pm 3, \pm 9$.

3. Петя записал в первый столбик все пятизначные числа, в записи которых используются цифры от 0 до 7, а во второй – произведения цифр каждого такого числа. Вася сумел в уме вычислить сумму чисел, записанных во втором столбце. Какой результат он получил?

Ответ: $28^5 = 17210368$.

4. Случайная величина a равномерно распределена на отрезке $[-2;1]$. Найти вероятность того, что все корни квадратного уравнения $ax^2 - x - 4a + 1 = 0$ по абсолютному значению превосходят 1.

Ответ: $P(A) = \dfrac{7}{9}$.

5. Сколько существует различных пар целых чисел a и b, для которых уравнение $ax^2 + bx + 1944 = 0$ имеет целые положительные корни?

Ответ: 108+24=132 пары.

6. Окружность радиуса 3 касается прямой P в точке A и прямой Q в точке B так, что хорда AB стягивает дугу окружности в

60^0. Прямые P и Q пересекаются в точке F. Точка C расположена на луче AF, а точка D – на луче FB так, что $AC = BD = 4$. Найти длину медианы треугольника CAD, проведенной из вершины A.

Ответ: $m_A = 2\sqrt{3} + \dfrac{3}{2}$.

Вариант № 4

1. Каждого спортсмена, участвующего в марафоне, можно отнести хотя бы к одной из трех категорий: веселые, тренированные, новички. Известно, что каждый шестнадцатый веселый – новичок, а пятая часть новичков – веселятся. Каждый пятый тренированный спортсмен веселый и только каждый десятый весельчак тренирован. Наконец, пятая часть новичков оказалась тренированной, а каждый восьмой из тренированных – новичок. Только три участника марафона являются тренированными, веселыми новичками одновременно. Сколько спортсменов вышло на старт, если им было выдано не более 150 номеров?

Ответ: 130 спортсменов.

2. При каких целых n функция $f(x) = \cos 3nx \cdot \sin \dfrac{18x}{2n+1}$ является периодической с периодом $T = 5\pi$?

Ответ: $n = 0, \pm 2, 4, -8, -14, 22$.

3. Петя записал в первый столбик все шестизначные числа, в записи которых используются цифры от 0 до 3, а во второй – произведения цифр каждого такого числа. Вася сумел в уме вычислить сумму чисел, записанных во втором столбце. Какой результат он получил?

Ответ: $6^6 = 46656$.

4. Случайная величина a равномерно распределена на отрезке $[-1; 4]$. Найти вероятность того, что оба корня квадратного уравнения $ax^2 + 4x + a - 3 = 0$ отрицательные.

Ответ: $P(A)=\frac{1}{5}$.

5. Сколько существует различных пар целых чисел a и b, для которых уравнение $ax^2+bx+432=0$ имеет целые положительные корни?

Ответ: 78+20=98 пар.

6. Окружность радиуса 4 касается прямой P в точке A и прямой Q в точке B так, что хорда AB стягивает дугу окружности в 60^0. Прямые P и Q пересекаются в точке F. Точка C расположена на луче FA, а точка D – на луче BF так, что $AC=BD=5$. Найти длину медианы треугольника CAD, проведенной из вершины A.

Ответ: $m_A=\frac{5\sqrt{3}}{2}-2.$