Очный отборочный тур олимпиады «Росатом» в СНГ, осень 2019
11 класс, комплект 3

Вариант № 1

1. Два различных числа x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 2019x = y^3 - 2019y \\ x \cdot y = 8 \end{cases}.$$

Найти $x^2 + y^2$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + \pi x + \sin^2 y = 0 \\ \cos 2x - 4\sin^2 y = 1 \end{cases}$

3. На столе лежат семнадцать монет достоинством $1, 2, \ldots, 16, 17$ тугриков. На какое наибольшее число кучек, содержащих одинаковое число тугриков, их можно разложить? Кто-то утащил со стола монету в 3 тугрика. Можно ли разложить оставшиеся монеты по кучкам, содержащим равное число тугриков?

4. Функция $f(u)$, не являющаяся постоянной, удовлетворяет равенству $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ для любых x, y. Найти значение $f(2021)$, если $f(2019) \cdot f(-2020) = 2$.

5. При каких a и b уравнение $x^3 - bx + \sqrt{b} = a$ имеет три различных корня, являющихся тремя последовательными членами арифметической прогрессии с разностью 4?

6. Точка M, расположенная на диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$, соединена отрезками с его вершинами. Площади, образовавшихся треугольников MAB, MBC, MCD, равны $8, 25, 20,$ соответственно. Найти площадь четвертого треугольника MAD.

Ответы и решения

1. Преобразуем первое уравнение системы

$$x^3 - y^3 = 2019(x-y) \to x^2 + xy + y^2 = 2019$$

С учетом второго уравнения системы $x^2 + y^2 = 2019 - 8 = 2011.$

Ответ: $x^2 + y^2 = 2011.$

2. Решим второе уравнение системы

$$\cos 2x - 1 = 4\sin^2 y \le 0 \to \begin{cases} \sin^2 y = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \to y = \pi k,\ k \in Z$$

Из первого уравнения $x^2 + \pi x = 0 \to \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\pi \end{array} \right.$

Ответ: 1) $x = -\pi, y = \pi k, k \in Z$; 2) $x = 0,\ y = \pi k,\ k \in Z.$

3. На столе лежит $1+2+3+...+17 = \dfrac{18 \cdot 17}{2} = 9 \cdot 17 = 153$ тугрика. Число кучек должно быть делителем числа 153, меньшим 17 (одна из кучек всегда содержит не менее 17 тугриков и тогда общее число тугриков больше 153). Наибольшим таким делителем является 9. Разложить на 9 кучек возможно

$$(17),(16+1),(15+2),(14+3),(13+4),(12+5),(11+6),(10+7),(9+8)$$

После пропажи монеты в 3 тугрика, на столе осталось 150 тугриков и их можно разложить ,например, на 2 кучки по 75 тугриков следующим образом:

13+14+15+16+17=75 и 1+2+4+5+6+7+8+9+10+11+12=75.

Ответ: 1) 9 кучек, 2) можно .

4. Пусть x – натуральное число. Тогда $f(x+1) = f(1) \cdot f(x)$ и последовательность $f(x), x = 1, 2, ...,$ является геометрической прогрессией со знаменателем $q = f(1)$. Таким образом, для натуральных x значение $f(x) = f(1)^x$. Полагая $y = 0$, получим $f(x) = f(x) \cdot f(0)$. Если $f(\tilde{x}) = 0$ для некоторого $\tilde{x}$, то $f(x) \equiv 0$, что противоречит условию. Тогда $f(0) = 1$. По условию,

$$1 = f(x-x) = f(x)\cdot f(-x) \to f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

Это свойство указывает на то, что $f(x) = f(1)^x$ для всех целых x. Тогда

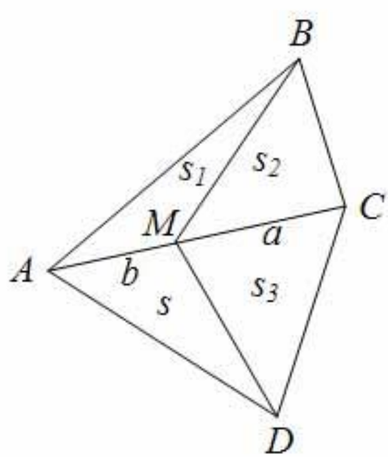
$$f(2019)\cdot f(-2020) = f(-1) = \frac{1}{f(1)} = 2 \to f(1) = \frac{1}{2}$$

и $f(2021) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2021} = 2^{-2021}$.

Ответ: $f(2021) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2021} = 2^{-2021}$.

5. Пусть x_1, x_2, x_3 – корни уравнения, расположенные в порядке возрастания. Тогда $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (теорема Виета), $x_1 + x_3 = 2x_2$ (арифметическая прогрессия) и $x_2 = 0$. Отсюда $a \geq 0$ и $b = a^2$. Корни x_1, x_3 удовлетворяют уравнению $x^2 = b = a^2$. Тогда $x_1 = -a, x_3 = a$. С учетом $x_3 - x_1 = 8$ находим $a = 4, b = 16$.

Ответ: $a = 4, b = 16$.



6. Пусть s – площадь треугольника MAD, $CM = a$, $AM = b$. Тогда треугольники MAB и MBC имеют равные высоты, опущенные из вершины B, и их площади относятся, как длины оснований:

$$s_1 : s_2 = b : a.$$

Аналогично, $s : s_3 = b : a$. Получим пропорцию

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{s}{s_3} \to s = \frac{s_1 \cdot s_3}{s_2}.$$

Ответ: $s = 32/5$.

Вариант № 2

1. Два положительных числа x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 2020x = 2020y - y^3 \\ x^2 + y^2 = 3012 \end{cases}.$$

Найти $x \cdot y$.

Ответ: $xy = 992$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 16x^2 - 24\pi x + 5\pi^2 \cos^2 y = 0 \\ \sin 2x - 4\sin^2 y = 1 \end{cases}$

Ответ: 1) $x = \dfrac{\pi}{4}, y = \pi k, k \in Z$; 2) $x = \dfrac{5\pi}{4}, y = \pi k, k \in Z$.

3. На столе лежат двадцать монет достоинством $1, 2, ..., 19, 20$ тугриков. На какое наибольшее число кучек, содержащих одинаковое число тугриков, их можно разложить? Кто-то утащил со стола монету в 1 тугрик. Можно ли разложить оставшиеся монеты по кучкам, содержащим равное число тугриков?

Ответ: 1) 10 кучек; $(20+1), (19+2), ..., (11+10)$ 2) невозможно.

4. Функция $f(u)$, не являющаяся постоянной, удовлетворяет равенству $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ для любых x, y. Найти значение $f(1947)$, если $f(1953) \cdot f(-1956) = 27$.

Ответ: $f(1947) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{1947} = 3^{-1947}$

5. При каких a и b уравнение $x^3 + (a+b)x + b^2 = 4a$ имеет три различных корня, являющихся тремя последовательными членами арифметической прогрессии с разностью 1?

Ответ: $a = 1, b = -2$.

6.Точка M, расположенная на диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$, соединена отрезками с его вершинами. Площади, образовавшихся треугольников MAB, MBC, MCD, равны $9, 5, 15,$ соответственно. Найти площадь четвертого треугольника MAD.

Ответ: $s = 27.$

Вариант № 3

1. Два различных числа x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 1947x = y^3 - 1947y \\ x \cdot y = 72 \end{cases}.$$

Найти $(x+y)^2$.

Ответ: $(x+y)^2 = 2019.$

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 18x^2 - 18\pi x + 5\pi^2 \sin^2 y = 0 \\ \sin 3x - 2\cos^2 y = 1 \end{cases}$

Ответ: Решений нет.

3. На столе лежат двадцать одна монета достоинством $1, 2, ..., 19, 20, 21$ тугриков. На какое наибольшее число кучек, содержащих одинаковое число тугриков, их можно разложить? Кто-то утащил со стола монету в 2 тугрика. Можно ли разложить оставшиеся монеты по кучкам, содержащим равное число тугриков?

Ответ: 1) 11кучек; $21, 20+1, 19+2, ..., 11+10$ 2) невозможно .

4. Функция $f(u)$, не являющаяся постоянной, удовлетворяет равенству $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ для любых x, y. Найти значение $f(2003)$, если $f(1998) \cdot f(-2001) = 8$.

Ответ: $f(2003) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2003} = 2^{-2003}.$

5. При каких a и b уравнение $4x^3+4(a-2b)x+9a^2=$ имеет три различных корня, являющихся тремя последовательными членами арифметической прогрессии с разностью 2?

Ответ: $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}, \begin{cases} a=-1 \\ b=3/2 \end{cases}.$

6. Точка M, расположенная на диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$, соединена отрезками с его вершинами. Площади, образовавшихся треугольников MAB, MBC, MCD, равны $8, 9, 6$ соответственно. Найти площадь четвертого треугольника MAD.

Ответ: 16/3.

Вариант № 4

1. Два положительных числа x и y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^3-1861x=1861y-y^3 \\ x^2+y^2=2019 \end{cases}.$$

Найти $(x-y)^2$.

Ответ: $(x-y)^2=1703$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2-3\pi x+\sin^2 2y=-2\pi^2 \\ \cos 2x-3\sin^2 y=1 \end{cases}$

Ответ: 1) $x=\pi,\ \ y=\pi k,\ k\in Z$; 2) $x=2\pi,\ \ y=\pi k,\ k\in Z.$

3. На столе лежат двадцать четыре монеты достоинством $1, 2, \ldots, 23, 24$ тугриков. На какое наибольшее число кучек, содержащих одинаковое число тугриков, их можно разложить? Кто-то утащил со стола монету в 4 тугрика. Можно ли разложить оставшиеся монеты по кучкам, содержащим равное число тугриков?

Ответ: 1) 12 кучек; $24+1, 23+2, ..., 13+12$;

2) возможно, например, на две кучки

$$1+18+19+...+24=148, \quad 2+3+5+6+7+...+17.$$

4. Функция $f(u)$, не являющаяся постоянной, удовлетворяет равенству $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ для любых x, y. Найти значение $f(1922)$, если $f(1916)\cdot f(-1921)=243$.

Ответ: $f(1922)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1922}=3^{-1922}$.

5. При каких a и b уравнение $x^3-(2a+b)x+a^2-2a=b$ имеет три различных корня, являющихся тремя последовательными членами арифметической прогрессии с разностью 3?

Ответ: $\begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases}, \begin{cases} a=-3 \\ b=15 \end{cases}.$

6. Точка M, расположенная на диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$, соединена отрезками с его вершинами. Площади, образовавшихся треугольников MAB, MBC, MCD, равны $4, 14, 7$ соответственно. Найти площадь четвертого треугольника MAD.

Ответ: 2.