Решения
Задач заключительного тура олимпиады «Росатом» 2016-2017 учебного года
Математика, 10 класс

1. $a_n -$ арифметическая прогрессия, $p_n(x) = a_n x^3 - (a_n+1)x^2 - (6a_n - 1)x + 6 -$ многочлен, для которого $p_n(2) = -16n - 4$ для всех натуральных n. Найти сумму корней уравнения $p_5(x) \cdot p_6(x) \cdot p_7(x) = 0$.

1. Ответ: $1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} = \frac{2648}{2145}$

Решение

Определение прогрессии:
$p_n(2) = 8a_n - 4(a_n+1) - 2(6a_n - 1) + 6 = -8a_n + 4 = -4 - 16n \to a_n = 1 + 2n$

Разложение многочлена $p_n(x)$ на множители:

Проверка делителей свободного члена:

$p_n(-2) = -8a_n - 4(a_n+1) + 2(6a_n - 1) + 6 = 0$, т.е. $x = -2$ является корнем многочлена при всех n.

$p_n(3) = 27a_n - 9(a_n+1) + 3(1 - 6a_n) + 6 = 0$, т.е. $x = 3$ является корнем многочлена при всех n.

Тогда $p_n(x) = (a_n x - 1)(x+2)(x-3)$.

Многочлены $p_5(x), p_6(x)$ и $p_7(x)$, помимо корней $x = -2$, $x = 3$, имеют корни $x = \frac{1}{a_5} = \frac{1}{11}$, $x = \frac{1}{a_6} = \frac{1}{13}$, $x = \frac{1}{a_7} = \frac{1}{15}$ соответственно. Тогда искомая сумма корней равна $1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} = \frac{2648}{2145}$

2. Члены последовательности x_n являются решениями уравнения $F_n(x) = \underbrace{f(f(f...(f(x))...)}_{n} = 0$ для всех $n \ge 1$. Написать формулу общего члена последовательности и найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $f(x) = 2x - 3$.

2. Ответ: 1) $x_n = \frac{3(2^n - 1)}{2^n}$ б 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$

Вариант 0

Для каждого натурального числа n написать формулу для решения x_n уравнения $F_n(x) = \underbrace{f(f(f...(f(x))...)}_{n} = 0$, где функция $F_n(x)$ является $n-$ кратной композицией функции $f(x) = ax + b, |a| > 1$. Например, $F_2(x) = f(f(x))$ и т.д. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Ответ: 1) $x_n = -\frac{b(a^n - 1)}{a^n(a-1)}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\frac{b}{a-1}$

Решение.

$$F_1(x)=ax+b,\ F_2(x)=a(ax+b)+b=a^2x+b(a+1),$$
$$F_3(x)=a\left(a^2x+b(a+1)\right)+b=a^3x+b(a^2+a+1),\ldots,$$
$$F_n(x)=a^nx+b\left(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+1\right)=a^nx+b\cdot\frac{a^n-1}{a-1}$$

Уравнение $F_n(x)=0$ имеет решение $x_n=-\frac{b(a^n-1)}{a^n(a-1)}$. При $|a|>1$ существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}x_n=-\frac{b}{a-1}$$

3. Найти координаты точки M, наименее удаленной от начала координат и лежащей на параболе $y=x^2-4x+3,5$.

3. Ответ $M(1;0,5)$

Решение. Квадрат расстояния точки $M(x;y)$ до начала координат равен $x^2+y^2=x^2+\left(x^2-4x+3,5\right)^2$. Найдем критические точки этой функции

$$2x+4\left(x^2-4x+3,5\right)(x-2)=0\to x^3-6x^2+12x-7=0\to(x-1)(x^2-5x+7)=0.$$

Функция имеет минимум в точке $x=1$. Соответствующая ордината равна $y(1)=0,5$.

4. При каких целых n выражение $6\sin\frac{5\pi n}{12}+\sin\frac{5\pi n}{4}$ принимает наибольшее возможное значение?

4. Ответ: 1) $n=-4+24t$ 2) $n=-8+24t$, $t\in Z$

Решение.

Обозначение: $t=\sin\frac{5\pi n}{12}$

Исследование функции $f(t)=6t+(3t-4t^3)=9t-4t^3,\ t\in[-1;1]$

Критические точки:

$f'(t)=9-12t^2=0\to\left[\begin{array}{l}t_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ t_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$. В точке $t=t_1$ локальный максимум, в точке $t=t_2$ - локальный минимум, $f(-1)=-5,\quad f(1)=5,\quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}>5$

Условия на n: $t = \sin\frac{5\pi n}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{5\pi n}{12} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \rightarrow 5n - 24k = 4 \ \ (*) \\ \frac{5\pi n}{12} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \rightarrow 5n - 24k = 8 \ \ (**) \end{array} \right.$

Решение диафантового уравнения (*):

$$\begin{cases} n = -4 + 24t \\ k = -1 + 5t, t \in Z \end{cases}$$

Решение диафантового уравнения (**):

$$\begin{cases} n = -8 + 24t \\ k = -2 + 5t, t \in Z \end{cases}$$

5. Точки M, N, P и Q расположены на сторонах квадрата со стороной $a > 5$ так, что отрезки MN и PQ не пересекаются и имеют длины 3 и 5 соответственно. Найти наименьшее возможное значение расстояния между серединами этих отрезков.

5. Ответ: $d_{\min} = \frac{r - l}{2} = 1$

Решение

Траектории середин отрезков MN и PQ при обходе его концов границы квадрата изображены на рис.1 и 2:

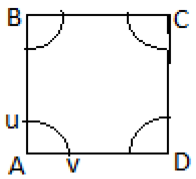

Рис 1

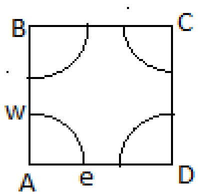

Рис 2

Они представляют собой объединение четвертей окружностей, радиусов $l/2$ и $r/2$ соответственно и отрезков на сторонах квадрата.

Если середины обоих отрезков находятся на окружностях с центром в одной вершине, например, в A, то минимум расстояния между их серединами равен $d_{\min} = \frac{r - l}{2}$ (параллельные отрезки)

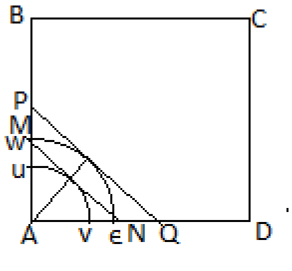

Рис 3

Если середины отрезков находятся на окружностях с центрами в смежных вершинах квадрата,

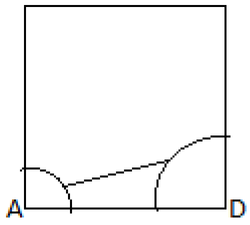

Рис 4

то расстояние d между серединами отрезков $d \geq a - \frac{r+l}{2} > \frac{r-l}{2} = d_{\min}$.

Если середина одного отрезка находится на стороне AD, а середина другого – на окружности,

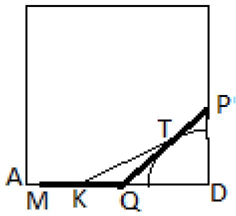

Рис 5

то по неравенству треугольника $KT \geq \left| KQ - QT \right| = \frac{r-l}{2} = d_{\min}$

Наконец, если середины отрезков принадлежат окружностям с центрами в противоположных вершинах

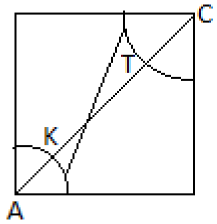

Рис 6

Расстояние между центрами отрезков $KT \geq a\sqrt{2} - \frac{r+l}{2} \geq \frac{r-l}{2} = d_{\min}$