Решения
Задач заключительного тура олимпиады «Росатом» 2016-2017 учебного года
Математика, 7 класс

1. Половина учеников класса отличники и хорошисты, одна четверть – троечники, одна седьмая -двоечники. Помимо них в классе учатся еще и второгодники, но их не более 5. Сколько учеников в классе?

1. Ответ: 28 учеников

Решение

Обозначение: $x-$число учеников в классе, $p-$ число второгодников, $0<p\le 5$

Уравнение: $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}+p=x\to x=28\cdot\frac{p}{3}$. Для того, чтобы число x было целым необходимо, чтобы $p=3$ и тогда $x=28$

2. Сколько существует у числа $a=441000=2^3\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^2$ различных делителей, не кратных 15? Найти наибольший такой делитель.

2. Ответ: 1) 72 делителя; 2) $d_{\max}=49000$

Решение

Разложение на множители: $a=2^3\cdot 3^2\cdot 5^3\cdot 7^2$. Делители чисел $a_1=2^3\cdot 3^2\cdot 7^2$ и $a_2=2^3\cdot 5^3\cdot 7^2$ являются делителями a, не делящимися на 15. Число a_1 имеет $4\times 3\times 3=36$ различных делителей, а число a_2 имеет $4\times 4\times 3=48$ различных делителей. $\text{НОД}(a_1,a_2)=2^3\cdot 7^2$, поэтому все делители $\text{НОД}(a_1,a_2)$ являются общими делителями a_1 и a_2. Их число $4\times 3=12$. Тогда искомое число делителей равно $36+48-12=72$. Наибольший из них $a_2=49000$

3. Сколько существует различных несократимых дробей вида p/q: $p>0, 0<q\le 5, p\ne q, p,q\in Z$, для которых $\frac{p-1}{q}<\frac{p}{q+1}$? Указать наименьшую такую дробь.

3. Ответ: 1) 9 дробей; 2) $\left(\frac{p}{q}\right)_{\min}=\frac{1}{5}$

Решение

Преобразование:

$$\frac{p-1}{q}<\frac{p}{q+1}\to(p-1)(q+1)<pq\to p-q<1$$

Для $q=1\to 0<p<2\to p=1$, т.е. существует единственная дробь $\frac{p}{q}=\frac{1}{1}=1$, не удовлетворяющая условию задачи.

Для $q=2 \to 0<p<3 \to p=1;2$, т.е. существуют одна дробь $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$, удовлетворяющая условию задачи.

Для $q=3 \to 0<p<4 \to p=1;2;3$, т.е. существует две дроби $\frac{p}{q}=\frac{1}{3};\frac{2}{3}$, удовлетворяющие условию.

Для $q=4 \to 0<p<5 \to p=1;2;3;4$, т.е. существует три дроби $\frac{p}{q}=\frac{1}{4};\frac{3}{4}$, удовлетворяющие условию.

Для $q=5 \to 0<p<6 \to p=1;2;3;4;5$, т.е. существует четыре дроби $\frac{p}{q}=\frac{1}{5};\frac{2}{5};\frac{3}{5};\frac{4}{5}$, удовлетворяющие условию.

Общее число дробей равно $1+2+2+4=9$. Наименьшая дробь $\left(\frac{p}{q}\right)_{\min}=\frac{1}{5}$.

4. Обозначим через $[a]$ - целую часть числа a, т.е. наибольшее целое число не превосходящее a. Область D на плоскости содержит точки $M(x;y)$, для которых координаты x, y удовлетворяют уравнению $2[x+1]+3[y+2]=13$ и условию $x\in[-2;3]$. Нарисовать область D на координатной плоскости и найти ее площадь.

4. Ответ: $s=2$

Решение

Преобразование:

$$2[x+1]+3[y+2]=2[x]+2+3[y]+6=13 \to 2[x]+3[y]=5$$

В полосе $-2\le x\le 3$ целая часть x принимает значения $[x]=-2,-1,0,1,2,3$

Случай 1. $[x]=-2 \to [y]=3 \to x\in[-2;3), y\in[3;4)$

Случай 2. $[x]=-1 \to 3[y]=7$ - решений нет

Случай 3. $[x]=0 \to 3[y]=5$ - решений нет

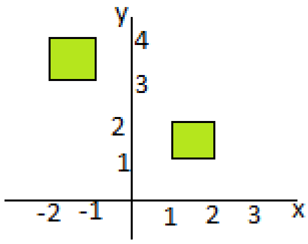
Случай 4. $[x]=1 \to [y]=1 \to x\in[1;2), y\in[1;2)$

Случай 5. $[x]=2 \to 3[y]=1$ - решений нет

Случай 6. $[x]=3 \to 3[y]=-1$ - решений нет

Область D представляет объединение двух квадратов со стороной 1 с неполной границей (там, где строгие неравенства)

Ее площадь равна 2.



5. На плоскости расположены 10 прямых так, что никакие две из них не параллельные. Три из них проходят через одну точку. Сколько различных треугольников можно нарисовать на плоскости так, чтобы их стороны лежали на заданных прямых?

5. Ответ: $n = 119$

Решение

Пусть $A-$ точка пересечения трех выделенных прямых. Треугольников с вершиной в точке A 21 штука, поскольку любая пара прямых из выделенной тройки (3 варианта) вместе с любой прямой из невыделенных 7 (7 вариантов) порождает треугольник ($3\times 7 = 21$). Любая тройка из невыделенных 7 прямых ($7\times 6\times 5 = 210$ вариантов) порождает треугольник, не все из которых различные. Если прямые, образовавшие треугольник, поменять местами (6 вариантов), то треугольник останется прежним, т.е. в 210 треугольниках такой треугольник учитывался 6 раз.

Таким образом, в этом случае число различных треугольников со сторонами на невыделенных прямых равно $210 : 6 = 35$.

Наконец, число треугольников, одна из сторон которых лежит на выделенной прямой, а две других лежат на двух невыделенных прямых равно $3\cdot\frac{7\cdot 6}{2} = 63$

Искомое число различных треугольников $n = 21 + 35 + 63 = 119$