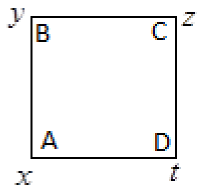
Решения
Задач заключительного тура олимпиады «Росатом» 2016-2017 учебного года
Математика, 8 класс

1. В вершинах четырехугольника размещены четыре целых, положительных числа таких, что их произведение не превосходит 144, при этом сумма чисел, принадлежащих каждой стороне четырехугольника, одинаковая. Найти максимально возможное значение суммы чисел, расположенных в вершинах четырехугольника.

1. Ответ: 26

Решение.



Если сумма чисел на сторонах BC и CD одинаковая, то $z+t=z+y \to t=y$. Аналогично $z+t=x+t \to z=x$, т.е. числа, находящиеся на концах диагонали, должны быть равными.

Обозначение $t=y=a,\ \ z=x=b$.

По условию, $xyzt=a^2\cdot b^2\le 144 \to ab\le 12$

Возможные значения для $x+y+z+t=2(a+b)$ равны 26, 16, 14 и наибольшая сумма 26.

2. Найти сумму всех делителей числа $a=540$.

2. Ответ: $\Sigma_a=1680$

Решение

Обозначение $a=p_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{r_m},\ \ b=p_2^{r_2}\cdot\ldots\cdot p_m^{r_m}$. Здесь p_k- простые делители, r_k- их кратности.

Пусть q_i - любой делитель числа b. Тогда $q_i, p_1q_i, p_1^2q_i, \ldots, p_1^{r_1}q_i -$ делители числа a. Их сумма $\sigma_i=q_i\left(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{r_1}\right)$. Тогда сумма всех делителей числа a равна

$$\Sigma_a=\sum_i\sigma_i=\left(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{r_1}\right)\sum_i q_i=\left(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{r_1}\right)\Sigma_b$$

Повторяя то же для Σ_b, получим формулу для суммы всех делителей числа a:

$$\Sigma_a=\left(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{r_1}\right)\cdot\left(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{r_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+p_m+p_m^2+\ldots+p_m^{r_m}\right)$$

Для варианта 1 $a=540=2^2\cdot 3^3\cdot 5$ и $\Sigma_a=(1+2+2^2)\cdot(1+3+3^2+3^3)\cdot(1+5)=7\cdot 40\cdot 6=1680$

3. Сколько натуральных чисел $x\le 1000$ удовлетворяют уравнению $\text{НОД}\left(6,5x\right)=3$?

Найти наибольшее такое x кратное 5.

3. Ответ: 1) 167 чисел; 2) $x_{\max} = 975$

Решение

По условию 1) $5x = 6k + 3 \to \begin{cases} x = 6t - 3 \\ k = 5t - 3 \end{cases} \to 1 \le 6t - 3 \le 1000 \to t = 1, 2, \dots, 167$, т.е. 167 решений.

По условию 2)

$$x = 5m,\ m > 0, m \in Z \to НОД(6; 25m) = 3 \to 25m = 6k + 3 \to \begin{cases} m = 3s \\ 25s - 2k = 1 \end{cases} \to \begin{cases} m = 6t + 3 \\ \begin{cases} s = 1 + 2t \\ k = 12 + 25t, \end{cases} \end{cases}$$

Тогда $x = 30t + 15,\ t \ge 0,\ t \in Z$.

Ограничение:

$1 \le 30t + 15 \le 1000 \to t = 0, 1, 2, \dots 32$. Всего 33 решения, $x_{\max} = 30 \cdot 32 + 15 = 975$

4. На границе шахматной доски отмечены четыре клетки такие, что их центры A, B, C, D являются вершинами квадрата. Найти наименьшее возможное значение площади квадрата $ABCD$, если площадь одной клетки шахматной доски равна 16.

4. Ответ: 400 см^2

Решение

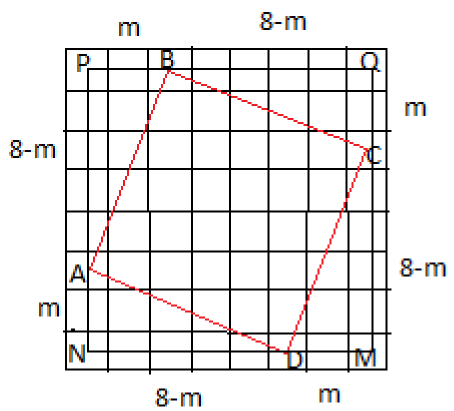
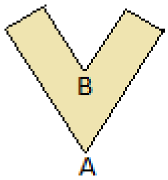


Рис 1

Вершины A, B, C, D расположены в серединах клеток с номером m , считая от вершин доски, на сторонах квадрата $PQMN$. Длина $PB = 4(m-1)$, длина $BQ = PA = 4(8-m)$. Площадь квадрата $ABCD$ равна $S(m) = 16\left((m-1)^2 + (8-m)^2\right) = 16\left(2m^2 - 18m + 65\right)$. Ее минимальное значение 400 см^2 достигается при $m = 4$ или $m = 5$.

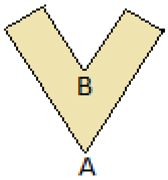
5. Лист бумаги имеет форму, изображенную на рис. Расстояние между параллельными краями листа равно 2, расстояние между вершинами A и B равно 3. Найти наибольший радиус круга, который можно вырезать из такого листа.



5. Ответ: $R_{\max} = \frac{hH}{h+H} = \frac{6}{5}$

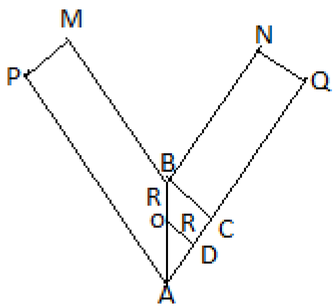
Вариант 0

Лист бумаги имеет форму, изображенную на рис. Расстояние между параллельными краями листа равно h, расстояние между вершинами A и B равно H. Найти наибольший радиус круга, который можно вырезать из такого листа.



Ответ: $R_{\max} = \frac{hH}{h+H}$

Решение



Прямые BN и AQ параллельны, прямые BM и AP параллельны, BC и OD перпендикулярны AQ, $OB = OD = R$. Из подобия треугольников AOD и ABC:

$$\frac{H-R}{R} = \frac{H}{h} \rightarrow R_1 = \frac{Hh}{H+h}$$

Если искомый круг касается параллельных краев листа, то максимальный радиус равен $R_2 = \frac{h}{2}$.

При $H > h \rightarrow R_1 > R_2$ и наоборот.