Решения
Задач заключительного тура олимпиады «Росатом» 2016-2017 учебного года
Математика, 9 класс

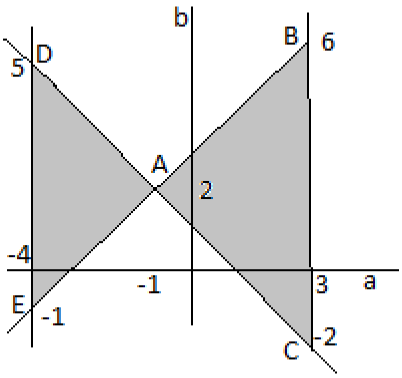
1. Числа $a, b,\ a \in [-4;3]$ такие, что парабола $y = x^2 + ax + b$ пересекает отрезок с концами в точках $P(1;2)$ и $Q(-1;4)$. Нарисовать на координатной плоскости область D, содержащую все точки $M(a;b)$ и найти ее площадь.

1. Ответ: $S_D = 25$

Решение

Условие пересечения: $(a+b-1)(b-a-3) \le 0$

На рис изображена область D



Уравнение прямой $BE: b = a + 3$, уравнение прямой $DC: b = 1 - a$. Координаты точки $A(-1;2)$.

Длины сторон $BC = 8,\ DE = 6$. Высота треугольника ADE равна $h_A = 3$, высота треугольника ABC равна $H_A = 4$. Площадь области $S_D = \frac{1}{2}(6 \cdot 3 + 8 \cdot 4) = 25$

2. Найти целые, положительные n, при которых уравнение $x^2 - a_n x - a_{n+1} = 0$ имеет рациональные корни, где $a_n = \text{НОД}(6, n)$.

2. Ответ: $n = 6k+1,\ n = 2+6k,\ n = 5+6k,\ k \ge 0, k \in Z$

Решение

Заметим, что $a_{n+6} = a_n$ для всех n. В таблице указаны значения a_n и a_{n+1} для $n = 1, 2, ..., 6$.

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	2	3	2	1	6
a_{n+1}	2	3	2	1	6	1

Случай 1. $n = 1$

Уравнение $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -2$

Случай 2. $n=2$

Уравнение $x^2-2x-3=0 \to x_1=-1,\ x_2=3$

Случай 3. $n=3$

Уравнение $x^2-3x-2=0 \to D=17 \to$ целых корней нет

Случай 4. $n=4$

Уравнение $x^2-2x-1=0 \to D=8 \to$ целых корней нет

Случай 5. $n=5$

Уравнение $x^2-x-6=0 \to x_1=-2,\ x_2=3$

Случай 6. $n=6$

Уравнение $x^2-6x-1=0 \to D=40 \to$ целых корней нет

3. Найти a,b и c, для которых $ar_n+br_{n+1}+cr_{n+2}=6$ для всех натуральных n, где r_k - остаток от деления k на 3.

3. Ответ: $a=b=c=2$

Решение

Коэффициенты $\left(r_n; r_{n+1}, r_{n+2}\right)$ при неизвестных a,b,c при любых n принимают только 3 различных значения $(0;1;2)$, $(1;2;0)$, $(2;0;1)$ - циклические перестановки. Тогда a,b,c являются решениями системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Циклическая перестановка решений a,b,c приводит к той же системе, поэтому $a=b=c$. Подставляя их в первое уравнение, получим $a=b=c=2$.

4. Найти сумму всех целых положительных делителей числа $a=2^8\cdot 3^3\cdot 5^6$.

4. Ответ: $S=\left(2^9-1\right)\cdot\dfrac{(3^4-1)}{2}\cdot\dfrac{(5^7-1)}{4}$

Решение

Сумма делителей вида $2^0\cdot 3^0\cdot 5^p$, $p=1,..6$ равна $1+5+5^2+\ldots+5^6=\dfrac{5^7-1}{4}=s_1$.

Сумма делителей вида $2^0\cdot 3^1\cdot 5^p,\ p=1,2,...,6$ равна $3\cdot\dfrac{5^7-1}{4}=3s_1$, сумма делителей вида

$2^0\cdot 3^2\cdot 5^p,\ p=1,2,...,6$ равна $3^2\cdot\dfrac{5^7-1}{4}=3^2s_1$ и т.д., сумма делителей вида

$2^0\cdot 3^q\cdot 5^p,\ p=1,2,...,6;\ q=1,2,3$ равна

$$(3^1+3^2+3^3)\frac{5^7-1}{4}=(1+3^1+3^2+3^3)\frac{5^7-1}{4}-s_1=s_2\to s_1+s_2=\frac{3^4-1}{2}\cdot\frac{5^7-1}{4}$$

Наконец, сумма делителей вида $2^1\cdot 3^q\cdot 5^p,\ p=1,2,...,6;\ q=1,2,3$ равна $2(s_1+s_2)$, сумма делителей вида $2^2\cdot 3^q\cdot 5^p,\ p=1,2,...,6;\ q=1,2,3$ равна $2^2(s_1+s_2)$ и т.д., сумма делителей вида

$2^r\cdot 3^q\cdot 5^p,\ p=1,2,...,6;\ q=1,2,3;\ \ r=1,2,...,8$ равна

$(2+2^2+...+2^8)(s_1+s_2)=(1+2+2^2+...+2^8)(s_1+s_2)-(s_1+s_2)=s_3$.

Откуда сумма всех делителей $s_1+s_2+s_3=\left(2^9-1\right)(s_1+s_2)=\left(2^9-1\right)\cdot\dfrac{(3^4-1)}{2}\cdot\dfrac{(5^7-1)}{4}$

5. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D и делящая площадь треугольника в отношении $1:7$. Другая прямая, параллельная AD, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно и делит площадь треугольника ABC пополам. В каком отношении точки M и N делят стороны AB и BC?

5. Ответ: 1) $AM:MB=\dfrac{\sqrt{2n}-\sqrt{m+n}}{\sqrt{m+n}}=\left(\sqrt{7}-2\right):2$. 2) $BN:NC=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2(m+n)}-\sqrt{n}}=\sqrt{7}:\left(4-\sqrt{7}\right)$

Вариант 0

Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D и делящая площадь треугольника в отношении $m:n$. Другая прямая, параллельная AD, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно и делит площадь треугольника ABC пополам. В каком отношении точки M и N делят стороны AB и BC?

Ответ: 1) $AM:MB=\dfrac{\sqrt{2n}-\sqrt{m+n}}{\sqrt{m+n}}$. 2) $BN:NC=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2(m+n)}-\sqrt{n}}$

Решение

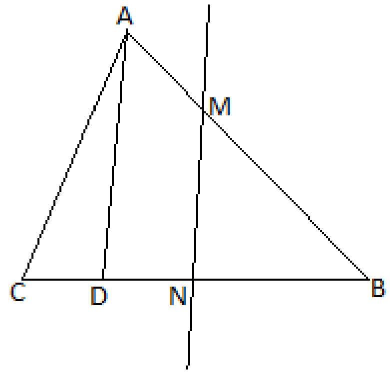


Рис 1

Обозначения:

$AM:MB=p:q, BN:NC=u:v$ (искомые величины)

$S_{ACD}:S_{ABD}=m:n,\ \ m<n$ (условие)

$$S_{ABD}=\frac{n}{m+n}S_{ABC},\ \ S_{ACD}=\frac{m}{m+n}S_{ABC},\ S_{MBN}=\frac{S_{ABC}}{2}$$

Треугольники MBN и ABD подобные с коэффициентом $k=\dfrac{q}{p+q}$, поэтому

$$S_{MBN}:S_{ABD}=k^2\rightarrow S_{MBN}:S_{ABD}=\frac{m+n}{2n}=\left(\frac{q}{p+q}\right)^2\rightarrow\frac{p+q}{q}=\sqrt{\frac{2n}{m+n}}\rightarrow p:q=\frac{\sqrt{2n}-\sqrt{m+n}}{\sqrt{m+n}}$$

$$BN:BD=\frac{q}{p+q},\ \ BD=\frac{n}{m+n}BC\rightarrow BN=\frac{qn}{(p+q)(m+n)}BC\rightarrow NC=BC-BN\rightarrow$$

$$\rightarrow NC=\left(1-\frac{qn}{(p+q)(m+n)}\right)BC=\left(\frac{pm+qm+pn}{(p+q)(m+n)}\right)BC$$

$$BN:NC=u:v=\frac{nq}{pm+qm+pn}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2(m+n)}-\sqrt{n}}$$