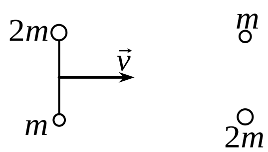
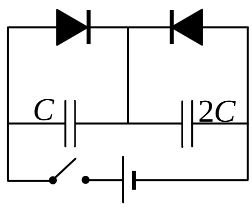
**Решения**
**Задач заключительного тура олимпиады «Росатом» 2016-2017 учебного года**
**Физика, 11 класс, комплект 4**

**1.** С двумя молями гелия проводят процесс, в котором его молярная теплоемкость не меняется и равна $C$. Известно, что гелий совершил в этом процессе работу $A$. Найти изменение температуры гелия в этом процессе.

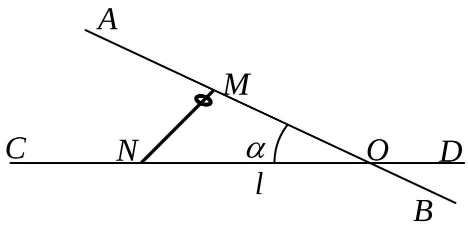
**2.** К концам невесомого стержня длиной $l$ прикреплены два маленьких шарика с массами $m$ и $2m$. Стержень, двигаясь поступательно в направлении перпендикулярном ему самому со скоростью $v$, налетает на два точно таких же покоящихся тела, находящихся на расстоянии $l$ друг от друга (см. рисунок). Одновременно происходят два центральных абсолютно неупругих столкновения. Найти силу натяжения стержня сразу после этого. Силу тяжести не учитывать.



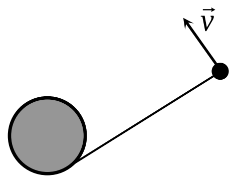

**3.** Электрическая цепь составлена из источника ЭДС $\varepsilon$, двух диодов и двух первоначально незаряженных конденсаторов с емкостью $C$ и $2C$ (см. рисунок). Ключ замыкают. Найти заряды конденсаторов $q_C$ и $q_{2C}$ после установления равновесия. Затем ключ размыкают, меняют полярность источника и снова замыкают ключ. Найти новые заряды конденсаторов $q'_C$ и $q'_{2C}$. Диоды идеальны: их сопротивление электрическому току в направлении стрелки в обозначении диода на схеме равно нулю, в обратном направлении – бесконечности.




**4.** (Г.Галилей «Беседы и математические доказательства двух новых наук», 1637 г.). Маленькое колечко движется по гладкой спице MN. Начало движения колечка – точка M - лежит на прямой AB, наклоненной под углом $\alpha$ к горизонту, конец – точка N – на горизонтали CD, на расстоянии $l$ от точки O пересечения горизонтали CD с наклонной прямой AB. На каком расстоянии от точки O должна быть расположена точка M, чтобы время движения колечка от точки M до точки N было минимальным?




**5.** На поверхности стола расположен вертикальный цилиндр радиуса $R$, на который намотана длинная невесомая нерастяжимая нить. К концу свободного куска нити, длина которого равна $l_0$, привязано тело. Телу сообщают скорость $v$, направленную перпендикулярно нити так, что нить начинает наматываться на цилиндр (см. рисунок, вид сверху). Найти время, за которое на цилиндр намотается одна пятая часть нити. Трение отсутствует.




**Решения**

**1.** Применяем к рассматриваемому процессу первый закон термодинамики

$$Q = \Delta U + A$$

С другой стороны, для гелия (одноатомный газ)

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$$

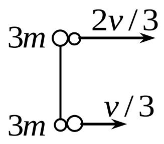
И

$$Q = C\nu\Delta T$$

Отсюда

$$\Delta T = \frac{A}{\nu\left(C - 3R/2\right)}, \quad C > \frac{3R}{2}$$

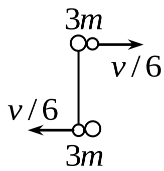
**2.** Поскольку столкновения шариков абсолютно неупругие, после удара они будут двигаться вместе. Скорости шариков найдем по закону сохранения импульса: два верхних (см. рисунок) шарика будут иметь скорость $2v/3$, два нижних (см. рисунок) - $v/3$. А поскольку скорости шариков будут разными, движение гантельки будет уже не поступательным. В системе отсчета, связанной с центром масс гантельки, ее движение есть вращение вокруг центра. Найдем скорости шариков в этой системе отсчета. Скорость центра масс равна




$$v_c = \frac{1}{2}\left(\frac{2v}{3} + \frac{v}{3}\right) = \frac{v}{2}$$

Поэтому скорость шариков в этой системе отсчета равна

$$v_{верх} = \frac{2v}{3} - \frac{v}{2} = \frac{v}{6}, \qquad v_{нижн} = \frac{v}{2} - \frac{v}{3} = \frac{v}{6},$$




(см. рисунок). Другими словами, каждая пара шариков массой $3m$ движется со скоростью $v/6$ по окружности радиуса $l/2$ и, следовательно, сила натяжения стержня равна

$$T = \frac{3m\left(v/6\right)^2}{l/2} = \frac{mv^2}{6l}$$

**3.** При замыкании ключа ток пойдет через левый диод, а правый диод будет «закрыт» - на месте правого диода будет фактически разрыв цепи. Поскольку сопротивление диода в прямом направлении равно нулю, потенциалы обкладок левого конденсатора одинаковы – левый конденсатор не будет заряжен $q_{лев} = 0$, а все напряжение источника оказывается приложенным к правому конденсатору. Поэтому

$$q_{прав} = 2\varepsilon C$$

После изменения полярности источника открывается правый диод, но закрывается левый. Поэтому будет заряжаться левый конденсатор, и разряжаться правый. Но правый конденсатор может разрядиться только так, что положительный заряд его левой обкладки может перетечь только на правую обкладку левого конденсатора, а вытечь через диоды не может (диоды не пропустят положительный заряд от точки соединения конденсаторов). Если бы емкость левого конденсатора была больше емкости правого, он «взял» бы себе весь заряд правого и какая-то часть заряда протекла через правый диод. Но у нас емкость правого конденсатора больше емкости левого, поэтому правый конденсатор разрядится не до конца. Найдем заряды конденсаторов после установления равновесия. Пусть на левой обкладке левого конденсатора будет заряд $q'_{лев} = -x$ (на правой - $x$). Тогда на левой обкладке правого конденсатора будет заряд $q'_{прав} = 2\varepsilon C - x$ (на правой - $-\left(2\varepsilon C - x\right)$). Условие равновесия зарядов дает

$$-\frac{2\varepsilon C - x}{2C} + \frac{x}{C} = \varepsilon$$

Отсюда

$$-2\varepsilon C + x + 2x = 2C\varepsilon \qquad x = \frac{4\varepsilon C}{3}$$

Следовательно, заряды левого и правого конденсатора после изменения полярности источника равны

$$q'_{лев} = \frac{4\varepsilon C}{3}$$ (у левой обкладки отрицательный, у правой – положительный)

$$q'_{прав} = \frac{2\varepsilon C}{3}$$ (у левой обкладки положительный, у правой – положительный)

**4.** Пусть длина отрезка MO равна $x$. Длину отрезка MN находим по теореме косинусов

$$MN = \sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha}$$

А угол MNO (обозначим его $\beta$) – по теореме синусов

$$\frac{x}{\sin\beta} = \frac{\sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha}}{\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \sin\beta = \frac{x\sin\alpha}{\sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha}}$$

Поскольку ускорение колечка при его движении по спице MN равно $g\sin\beta$, то время его спуска можно найти из соотношения

$$\sqrt{l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha} = \frac{g\sin\beta t^2}{2}$$

Используя далее соотношение для $\sin\beta$, получим

$$t^2 = \frac{2\left(l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha\right)}{gx\sin\alpha}$$

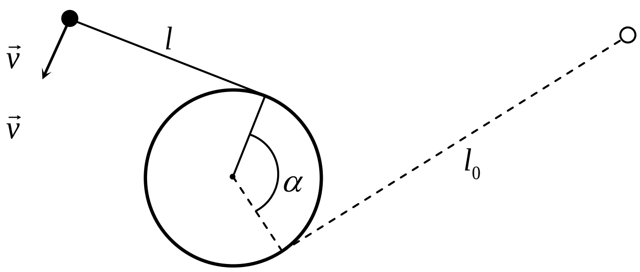
Найдем $x$, отвечающее минимуму этой функции. Дифференцируя и приравнивая производную к нулю, получим

$$\frac{2x - 2l\cos\alpha 2}{gx\sin\alpha} - \frac{\left(l^2 + x^2 - 2lx\cos\alpha\right)}{gx^2\sin\alpha} = \frac{2x^2 - 2lx\cos\alpha 2 - l^2 - x^2 + 2lx\cos\alpha}{gx^2\sin\alpha} = \frac{x^2 - l^2}{gx^2\sin\alpha} = 0$$

Откуда получаем

$$MO = l$$

**5.** Установим зависимость угла поворота нити от времени. Во-первых, заметим, что нить в процессе движения тела всегда перпендикулярна скорости тела (нить не «сминается» и не растягивается). Поэтому сила натяжения не совершает над телом работу, и, следовательно, тело движется с постоянной скоростью. Угловая же скорость тела изменяется, поскольку его движение в течение каждого малого интервала времени есть вращение вокруг той точки, где нить отходит от цилиндра, а длина нити изменяется.




Пусть к некоторому моменту времени $t$ нить повернулась на угол $\alpha$ по сравнению с первоначальным положением. Установим связь между $t$ и $\alpha$. Поскольку к этому моменту на цилиндр намоталась нить длиной $\alpha R$, то для длины нити справедливо соотношение

$$l = l_0 - \alpha R \tag{1}$$

Из формулы (1) следует, что угловая скорость нити в этот момент будет равна $\omega = v/(l_0 - \alpha R)$. Поэтому за бесконечно малый интервал времени $\Delta t$ около момента времени $t$ нить повернется на бесконечно малый угол

$$\Delta\alpha = \omega\Delta t = \frac{v\Delta t}{l_0 - \alpha R} \tag{2}$$

Из формулы (2) можно найти производную функции $t(\alpha)$:

$$t'(\alpha) = \frac{\Delta t}{\Delta\alpha} = \frac{l_0}{v} - \frac{R}{v}\alpha \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, что производная функции $t(\alpha)$ зависит от своего аргумента $\alpha$ так же, как скорость равноускоренно движущегося тела зависит от времени

$$x'(t) = v_0 + at \tag{4}$$

Поэтому зависимость $t(\alpha)$ - такая же, как и зависимость координаты равноускоренно движущегося тела от времени

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{5}$$

Причем, как это следует из сравнения (3) и (4), в качестве $v_0$ и $a$ в зависимости $t(\alpha)$ нужно использовать величины $l_0 / v$ и $-R / v$:

$$t(\alpha) = t_0 + \frac{l_0}{v}\alpha - \frac{R}{v}\frac{\alpha^2}{2} \tag{6}$$

Величина $t_0$ в выражении (5) имеет смысл «начального» значения времени, т.е. времени, отвечающего повороту на нулевой угол. Поэтому эту величину нужно положить равной нулю. В результате имеем окончательно

$$t(\alpha) = \frac{l_0}{v}\alpha - \frac{R}{v}\frac{\alpha^2}{2} \tag{7}$$

Из зависимости (7) легко найти время $\tau$, необходимое для полной намотки одной пятой части нити на цилиндр. Когда такая длина намотается на цилиндр, нить повернется на угол $\alpha = l_0 / 5R$. Поэтому для времени $\tau$ имеем из (7):

$$\tau = \frac{l_0}{v}\frac{l_0}{5R} - \frac{R}{v}\frac{l_0^2}{50R^2} = \frac{9l_0^2}{50vR}$$