

Задания первого очного отборочного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»
(олимпиада им.проф. И.В.Савельева)
Математика, 10 класс
Октябрь-ноябрь 2016 г.

1 вариант

1. Приведенные многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$ степени 2 и 3 таковы, что многочлен $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$ имеет три корня $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = -3$. Известно, что все корни многочлена $p_1(x)$ являются корнями многочлена $p_2(x)$. Найти многочлен произведения $p_1(x) \cdot p_2(x)$.

Решение. Пусть $p_1(x) = x^2 + ax + b$. Поскольку корни многочлена $p_1(x)$ содержатся среди корней многочлена $p_2(x)$, последний делится на $p_1(x)$ без остатка, то есть $p_2(x) = (x+c)(x^2 + ax + b)$. Тогда

$$p_1(x) + p_2(x) = (x+c+1)(x^2 + ax + b).$$

С другой стороны, по условию $p(x) = p_1(x) + p_2(x) = (x+1)(x-2)(x+3)$.

Возможны три случая.

Случай 1

$$\begin{cases} x+c+1 = x+1 \\ x^2 + ax + b = (x-2)(x+3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=1 \\ b=-6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1(x) = x^2 + x - 6 \\ p_2(x) = x(x^2 + x - 6) \end{cases} \rightarrow p_1 \cdot p_2 = x(x^2 + x - 6)^2.$$

Случай 2

$$\begin{cases} x+c+1 = x-2 \\ x^2 + ax + b = (x+1)(x+3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=-3 \\ a=4 \\ b=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1(x) = x^2 + 4x + 3 \\ p_2(x) = (x-3)(x^2 + 4x + 3) \end{cases} \rightarrow p_1 \cdot p_2 = (x-3)(x^2 + 4x + 3)^2.$$

Случай 3

$$\begin{cases} x+c+1 = x+3 \\ x^2 + ax + b = (x+1)(x-2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=2 \\ a=-1 \\ b=-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1(x) = x^2 - x - 2 \\ p_2(x) = (x+2)(x^2 - x - 2) \end{cases} \rightarrow p_1 \cdot p_2 = (x+2)(x^2 - x - 2)^2.$$

2. На числовой оси расположено множество целых, трехзначных, положительных чисел a , у которых сумма цифр в их записи равна 16. Найти наибольшее и наименьшее расстояние между двумя числами из этого множества.

Решение. Пусть x, y, z число сотен, десятков и единиц числа a . По условию $x + y + z = 16$. Наименьшее число, удовлетворяющее этим условиям это $a_{\min} = 169$, а наибольшее число — $a_{\max} = 970$. Наибольшее расстояние равно их разности $d_{\max} = a_{\max} - a_{\min} = 801$. Наименьшее расстояние между числами из этого множества равно наименьшему расстоянию между соседними числами. Пусть неко-

торое число из этого множества имеет вид $a = N + 10x + y$ ($N \geq 100$), тогда следующее число из этого множества $b = N + 10(x+1) + (y-1)$. Разность между ними $b - a = 9$, например, можно выбрать $a = 169$, а $b = 178$. Таким образом, $d_{\max} = 801$, а $d_{\min} = 9$.

3. Вычислить значение выражения $\sin \frac{b\pi}{36}$, где b - сумма всех различных чисел, полученных из числа $a = 987654321$ путем циклических перестановок его цифр (при циклической перестановке все цифры числа, кроме последней, сдвигаются на разряд вправо, а последняя - перемещается на первое место).

Решение. При суммировании всех различных чисел, полученных из числа $a = 987654321$, включая само число a , в каждом разряде получим сумму всех его цифр $9 + 8 + 7 + \dots + 3 + 2 + 1 = 45$. Следовательно, $b = 45(10^8 + 10^7 + 10^6 + \dots + 10^2 + 10 + 1) = 45 \cdot 111111111 = 4999999995$. Вычислим

$$\frac{\pi b}{36} = \frac{\pi \cdot 45 \cdot 111111111}{36} = \frac{\pi \cdot 555555555}{4} = 138888888\pi + \frac{3}{4}\pi. \text{ Отсюда следует, что}$$

$$\sin \frac{\pi b}{36} = \sin \left(138888888\pi + \frac{3}{4}\pi \right) = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Обозначим через r_n - остаток от деления n на 3. Найти последовательность чисел x_n , являющихся корнями уравнения $(n+1)x^{r_n} - n(n+2)x^{r_{n+1}} + n^2x^{r_{n+2}} = 0$ для любого натурального n , а ее предел равен 1.

Решение. Заметим, что, так как r_n - остаток от деления n на 3, то он может принимать три различных значения 0, 1 и 2.

Случай 1. $n = 3k, k \in \mathbb{N}$, тогда $r_n = 0, r_{n+1} = 1, r_{n+2} = 2$. Уравнение имеет вид:

$$n^2x^2 - n(n+2)x + n + 1 = 0.$$

Его корни равны

$$x_{1,n} = \frac{1}{n}, \quad x_{2,n} = \frac{n+1}{n}.$$

Условию задачи ($x_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$) удовлетворяет только $x_{2,n}$.

Случай 2. $n = 3k + 1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тогда $r_n = 1, r_{n+1} = 2, r_{n+2} = 0$. Уравнение имеет вид:

$$-n(n+2)x^2 + (n+1)x + n^2 = 0.$$

Его корни равны

$$x_{1,n} = \frac{n+1 - \sqrt{4n^4 + 8n^3 + n^2 + 2n+1}}{2n(n+2)}, \quad x_{2,n} = \frac{n+1 + \sqrt{4n^4 + 8n^3 + n^2 + 2n+1}}{2n(n+2)}.$$

Условию задачи ($x_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$) удовлетворяет только $x_{2,n}$.

Случай 3. $n = 3k + 2, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, тогда $r_n = 2, r_{n+1} = 0, r_{n+2} = 1$. Уравнение имеет вид:

$$(n+1)x^2 + n^2x - n(n+2) = 0.$$

Его корни равны

$$x_{1,n} = \frac{-n^2 - \sqrt{n^4 + 4n^3 + 12n^2 + 8n}}{2(n+1)},$$

$$x_{2,n} = \frac{-n^2 + \sqrt{n^4 + 4n^3 + 12n^2 + 8n}}{2(n+1)} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 8n}{2(n+1)(\sqrt{n^4 + 4n^3 + 12n^2 + 8n} + n^2)}.$$

Условию задачи ($x_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$) удовлетворяет только $x_{2,n}$.

Таким образом, искомая последовательность

$$x_n = x_{2,n} = \begin{cases} \frac{n+1}{n}, & n = 3k, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{n+1 + \sqrt{4n^4 + 8n^3 + n^2 + 2n+1}}{2n(n+2)}, & n = 3k+1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \frac{-n^2 + \sqrt{n^4 + 4n^3 + 12n^2 + 8n}}{2(n+1)}, & n = 3k+2, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

5. Окружности K_1 и K_2 с центрами в точках O_1 и O_2 одинакового радиуса r касаются внутренним образом окружности K радиуса R с центром в точке O . Угол O_1OO_2 равен 120° . Найти радиус q окружности, касающейся K_1 и K_2 внешним образом и окружности K - внутренним.

Решение. Пусть Q – центр искомой окружности, а q – ее радиус.

Случай 1. Центр O не лежит внутри искомой окружности (рис.1).

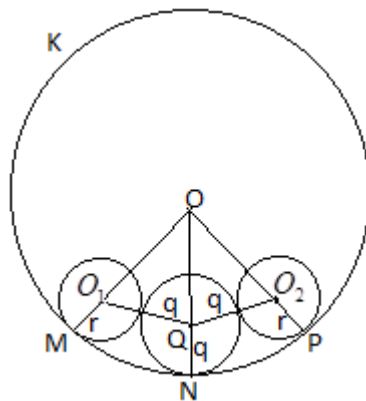


Рис 1

Из равенства треугольников O_1OQ и QO_2O и условия задачи следует, что $\angle O_1OQ = \angle O_2OQ = 60^\circ$.

Рассмотрим треугольник OO_1Q . Запишем теорему косинусов:

$$(r+q)^2 = (R-r)^2 + (R-q)^2 - 2(R-r)(R-q)\cos 60^\circ.$$

Отсюда находим: $q = \frac{R(R-r)}{R+3r}$.

Случай 2. Центр O лежит внутри искомой окружности (рис. 2).

Из равенства треугольников O_1OQ и QO_2O и условия задачи следует, что $\angle O_1OQ = \angle O_2OQ = 120^\circ$.

Рассмотрим треугольник OO_1Q . Запишем теорему косинусов:

$$(r+q)^2 = (R-r)^2 + (R-q)^2 - 2(R-r)(R-q)\cos 120^\circ.$$

Отсюда находим: $q = \frac{3R(R-r)}{3R+r}$.

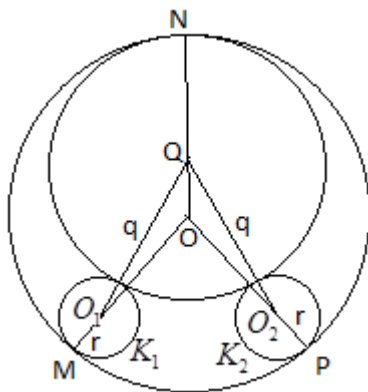


Рис 2