

Задания первого очного отборочного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»
(олимпиада им.проф. И.В.Савельева)
Математика, 11 класс
НИЯУ МИФИ, 16 октября 2016 г.

1 вариант

1. Решить уравнение $f(f(f(f(x)))) = x^2 - x$, где $f(x) = (3x+5)/(2x-3)$.

Решение. Докажем, что $f(f(x)) \equiv x$ для $x \neq \frac{3}{2}$. Действительно,

$$f(f(x)) = \frac{3f(x)+5}{2f(x)-3} = \frac{3\frac{3x+5}{2x-3}+5}{2\frac{3x+5}{2x-3}-3} = \frac{(9x+15)+(9x+15)}{(6x+10)-(6x-9)} = x.$$

Отсюда следует, что любое четное число композиций функции f равно x . В нашем случае в левой части уравнения f присутствует четыре раза, поэтому $f(f(f(f(x)))) \equiv x$ для $x \neq 3/2$. В результате исходное уравнение можно переписать в виде: $x = x^2 - 2$ или $x^2 - x - 2 = 0$. Оно имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

2. На промежутке $[\pi/6; \pi/2)$ найти x , для которых сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\sin x$ и знаменателем $\cos x$ является целым числом.

Решение. Запишем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\sin x$ и знаменателем $\cos x$: $\frac{\sin x}{1 - \cos x}$. Надо найти $x \in [\pi/6; \pi/2)$, для которого $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Преоб-

разум левую часть уравнения: $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$, тогда уравнение принимает вид

$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = n$. На промежутке $[\pi/6; \pi/2)$ $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \in \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}; \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} \right]$. Так как $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$, а

$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{1 - \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \approx 3,73$, то $2 \leq n \leq 3$. При $n=2$ получаем уравнение $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 2$, отсюда

да $x = 2 \operatorname{arccotg} 2$, а при $n=3$ получаем уравнение $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 3$, отсюда $x = 2 \operatorname{arccotg} 3$.

3. Шестизначное целое положительное число a удовлетворяет четырем условиям: 1) число, составленное из первых трех его цифр, записанных в том же порядке, при делении на 5 дает в остатке 2; 2) число, составленное из последних двух цифр, записанных в том же порядке, при делении на 4 дает в

остатке 3; 3) четвертая цифра числа a равна 3; 4) число a делится на 7 без остатка. Найти наибольшее возможное a .

Решение. Запишем шестизначное число в виде $a = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$. Наибольшее $\overline{a_1 a_2 a_3}$, которое при делении на 5 дает остаток 2 это $\overline{a_1 a_2 a_3} = 997$. По условию задачи $a_4 = 3$. Рассмотрим $\overline{a_5 a_6}$. Так как по условию $\overline{a_5 a_6}$ при делении на 4 дает в остатке 3, то это числа 99, 95, 92 и т.д. (мы расположили их в порядке убывания). Проверка делимости числа $a = \overline{9973 a_5 a_6}$ на 7 дает $\overline{a_5 a_6} = 95$. Следовательно, $997395 = 7 \cdot 142485$ – наибольшее возможное a .

4. На плоскости расположены 9 прямых, разделенных на три группы. Группу A составляют 3 прямых, имеющих одну общую точку. В группу B входят 3 прямые параллельных между собой. Группа C содержит оставшиеся 3 прямые, находящиеся в общем положении: каждая пара прямых пересекается, три прямые не имеют общих точек. Группы A, B, C не имеют пересечений. Случайным образом выбираются три прямые. Найти вероятность того, что они могут ограничить на плоскости треугольник.

Решение. По условию задачи на плоскости расположены 9 прямых, разделенных на три группы. Группу A составляют 3 прямые, имеющих одну общую точку. В группу B входят 3 прямые параллельных между собой. Группа C содержит оставшиеся 3 прямые, находящиеся в общем положении: каждая пара прямых пересекается, каждые три прямые не имеют общих точек. Группы A, B, C не имеют пересечений. Случайным образом выбираем три прямые и ищем вероятность того, что они могут ограничить на плоскости треугольник.

Случай 1. В выбранной тройке нет прямых из A . Тогда число благоприятных троек равно

$$C_3^0 \cdot C_3^3 + C_3^1 \cdot C_3^2 = 1 + 9 = 10.$$

Случай 2. В выбранной тройке одна прямая из A . Тогда число благоприятных троек равно

$$C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 + C_3^1 \cdot C_3^0 \cdot C_3^2 = 27 + 9 = 36.$$

Случай 3. В выбранной тройке две прямых из A . Тогда число благоприятных троек равно

$$C_3^2 \cdot C_3^1 + C_3^2 \cdot C_3^0 \cdot C_3^1 = 9 + 9 = 18.$$

Складывая эти числа, получим общее число благоприятных троек

$$l = 10 + 36 + 18 = 64.$$

Общее число троек равно $s = C_9^3 = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$, тогда вероятность $P(A) = \frac{64}{84} = \frac{16}{21}$.

5. Функция $f(x)$ определена на полуоси $[1; +\infty)$ так, что для $x \in [n; n+1), n = 1, 2, \dots$

$f(x) = a_n + (a_{n+1} - a_n)(x - n), n = 1, 2, \dots$, где $a_n = \text{НОД}(6; n)$. Для любого a решить уравнение $f(x) = a$.

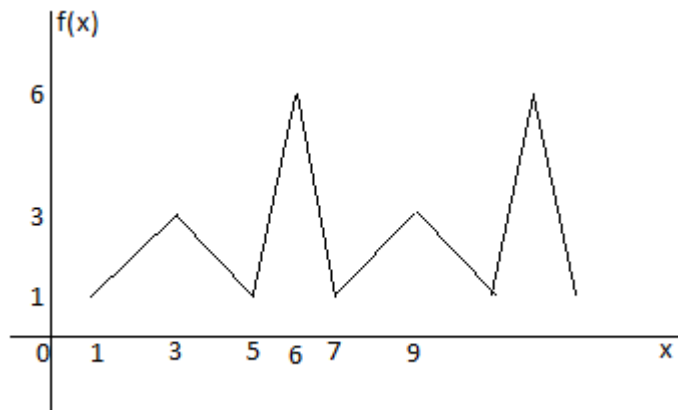
Решение. Последовательность a_n обладает свойством: $a_{n+6} = a_n$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Значения a_n для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ размещены в таблице:

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	2	3	2	1	6

Для $x \in [n; n+1)$ имеем $x+6 \in [n+6; n+7)$. Тогда для любого n

$$f(x+6) = (a_{n+7} - a_{n+6})(x+6 - (n+6)) = (a_{n+1} - a_n)(x-n) = f(x)$$

На рис изображен график функции $f(x)$



Как видно из графика для $a \in (-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$ уравнение не имеет решений, поскольку $a \notin E_f = [1; 6]$;

для $a \in (1; 3)$ уравнение имеет четыре серии решений $x_1 = a + 6k$, $x_2 = 6 - a + 6k$,

$x_3 = \frac{a+24}{5} + 6k$, $x_4 = \frac{36-a}{5} + 6k$; для $a = 1$ уравнение имеет три серии решений $x_1 = 1 + 6k$, $x_2 = 5 + 6k$, $x_3 = 7 + 6k$;

для $a = 3$ уравнение имеет три серии решений $x_1 = 3 + 6k$, $x_2 = \frac{27}{5} + 6k$, $x_3 = \frac{33}{5} + 6k$;

для $a \in (3; 6)$ уравнение имеет две серии решений $x_1 = \frac{a+24}{5} + 6k$, $x_2 = \frac{36-a}{5} + 6k$;

для $a = 6$ уравнение имеет одну серию решений $x_1 = 6 + 6k$, $k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$.

6. Фигура G на плоскости получена из квадрата со стороной $a = 10$, из которого вырезан прямоугольник с вершиной A , лежащей внутри квадрата, со сторонами $b = 6$ и $c = 5$ (см. рис). Найти наибольшую длину отрезка, содержащего точку A , который можно разместить в G .



Решение. Фигура G на плоскости, полученная из квадрата со стороной $a = 10$, из которого вырезан прямоугольник с вершиной A , лежащей внутри квадрата, со сторонами $b = 6$ и $c = 5$, изображена на

рис.1. Рассмотрим все возможные расположения отрезка с концами на сторонах фигуры G , содержащего точку A ,

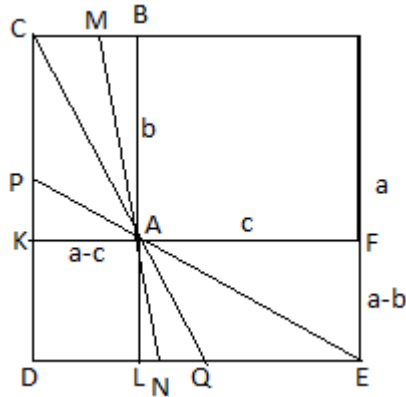


Рис 1

Случай 1. Концы отрезка $M \in BC$, а $N \in DE$, $\angle MAB = \alpha \in \left[0; \arctg \frac{5}{6}\right]$. Длина d отрезка MN , равная

$d = \frac{a}{\cos \alpha}$, возрастает на указанном отрезке, поскольку знаменатель уменьшается с ростом α . Поэтому

$$\text{максимальное значение равно } d\left(\arctg \frac{5}{6}\right) = CQ = \frac{CD}{\cos \angle DCQ} = \frac{5\sqrt{61}}{3}.$$

Случай 2. Концы отрезка $M \in CP$, $N \in DE$, $\angle MAB = \alpha \in \left[\arctg \frac{5}{6}; \arctg \frac{5}{4}\right]$. Длина d отрезка MN равна

на $d = \frac{5}{\sin \alpha} + \frac{4}{\cos \alpha}$. Исследуем эту функцию на экстремум на указанном отрезке.

$$d' = -5 \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + 4 \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = 0. \text{ Критическая точка } \alpha^* = \arctg \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \text{ принадлежит отрезку } \left[\arctg \frac{5}{6}; \arctg \frac{5}{4}\right].$$

Так как производная $d'\left(\arctg \frac{5}{6}\right) = -\frac{49\sqrt{61}}{45} < 0$, а производная $d'\left(\arctg \frac{5}{4}\right) = \frac{9\sqrt{41}}{20} > 0$, то α^* - точка

локального минимума, а точки $\arctg \frac{5}{6}$ и $\arctg \frac{5}{4}$ - точки локального максимума. Значение функции

d в точке $\arctg \frac{5}{6}$ мы уже вычисляли. Оно равно $\frac{5\sqrt{61}}{3}$. Вычислим

$$d\left(\arctg \frac{5}{4}\right) = PE = \frac{DE}{\sin \angle DPE} = 2\sqrt{41}.$$

Случай 3. Концы отрезка $M \in PK$, $N \in EF$, $\angle MAB = \alpha \in \left[\arctg \frac{5}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. Длина d отрезка MN , равная

$d = \frac{10}{\sin \alpha}$, убывает на указанном отрезке.

Таким образом, длина отрезка имеет два локальных максимума $\frac{5\sqrt{61}}{3}$ и $2\sqrt{41}$. Выбираем наибольшее из этих чисел. Это $\frac{5\sqrt{61}}{3}$.