Задания первого очного отборочного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»
(олимпиада им.проф. И.В.Савельева)
Математика, 7 класс
Октябрь-ноябрь 2016 г.

1 вариант

1. Найти наибольшее пятизначное число a, не делящееся на 10, для которого его сумма с числом b, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 65856.

Решение. Пусть $a=\overline{xyzuv},\ b=\overline{vuzyx}$, где $x,y,z,u,v-$ цифры, причем $x\neq 0,\ v\neq 0$. По условию, $x+v=6$ или $x+v=16$. Последнее невозможно, поскольку в этом случае число $a+b$ шестизначное.

По условию, $y+u=5$ или $y+u=15$. Последнее невозможно, поскольку в этом случае третья цифра числа $a+b$ будет нечетной. Наконец, $2z=8.$ Следовательно, $z=4.$Среди чисел, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} x+v=6 \\ y+u=5 \\ z=4 \end{cases},$$

наибольшим является $a_{\max}=55401.$

2. В семье четверо: папа, мама, старший сын Володя и младший – Дима. Когда родился Володя, папе было 24 года, а при рождении Димы – маме было 26. Мама моложе папы на 3 года. Сумма возрастов всех членов семьи не более 68 лет. Сколько лет было Диме, когда Володя пошел в школу.

Решение. Когда родился Володя, папе было 24 года, а маме на 3 года меньше, т.е. 21 год. Дима родился, когда маме стало 26 лет, т.е. через 5лет, поэтому папе в это время было 29 лет. Вычислим сумму возрастов: $29+26+5+0=60.$ Через год все члены семьи стали старше на год, поэтому сумма возрастов увеличилась на 4 и стала $30+27+6+1=64,$ а еще через год – снова на 4 и стала $31+28+7+2=68.$ Таким образом, если Володя пошел в школу в 5 лет, то Диме было 0 лет, если Володя пошел в школу в 6 лет, то Диме был 1 год, а если Володя пошел в школу с 7 лет, то Диме было 2 года.

3. В десятичной записи шестизначного числа a нет нулей и сумма его цифр равна 18. Найти сумму всех различных чисел, полученных из числа a циклическими перестановками его цифр. При циклической перестановке все цифры числа, кроме последней, сдвигаются на разряд вправо, а последняя – перемещается на первое место.

Решение.

Случай 1. Число $a=333333.$ Это число не меняется при циклических перестановках, поэтому оно единственное и сумма чисел равна самому этому числу, то есть 333333.

Случай 2. Число a состоит из трех одинаковых циклов по две цифры, например, $a = 242424.$ У таких чисел имеется две различных циклических перестановки: 242424 и 424242, сумма которых равна $666666 = 2 \cdot 333333.$ Для любого другого такого числа получим ту же сумму его циклических перестановок: $151515 + 515151 = 666666$ и т.д.

Случай 3. Число a состоит из двух одинаковых циклов по три цифры, например, $a = 423423.$ У таких чисел имеется три различных циклических перестановок: 423423, 342342 и 234234, сумма которых равна $999999 = 3 \cdot 333333.$ Для любого другого такого числа получим ту же сумму его циклических перестановок: $513513 + 351351 + 135135 = 999999$ и т.д.

Случай 4. Все шесть циклических перестановок различны. Пусть

$$a = a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Если выписать все его циклические перестановки в таком же виде, результаты сложить, перегруппировав слагаемые, получим

$$a_5\left(10^5 + 10^4 + \ldots + 1\right) + a_4\left(10^5 + 10^4 + \ldots + 1\right) + \ldots + a_0\left(10^5 + 10^4 + \ldots + 1\right) =$$
$$= \left(a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0\right)\left(10^5 + 10^4 + \ldots + 1\right) = 18 \cdot 111111 = 1999998$$

4. Через r_n обозначим остаток от деления натурального числа n на 6. Для каких n справедливо равенство $r_{2n+3} = r_{5n+6}$?

Решение. Числа $2n+3$ и $5n+6$ имеют одинаковые остатки, если их разность $5n+6-(2n+3) = 3n+3$ кратна 6, т.е. $3n+3 = 6k.$ Отсюда получаем $n = 2k-1,\ \ k \in \mathbb{N}.$

5. На листе бумаги нарисованы 14 параллельных прямых L и 15 прямых P, им перпендикулярных. Расстояния между соседними прямыми из L от первой до последней заданы: $2; 4; 6; 2; 4; 6; 2; 4; 6; 2; 4; 6; 2.$ Расстояния между соседними прямыми из P также известны: $3; 1; 2; 6; 3; 1; 2; 6; 3; 1; 2; 6; 3; 1$ Найти наибольшую длину стороны квадрата, границы которого лежат на прямых L и P.

Решение. Докажем, что наибольшая длина стороны квадрата равна 40. Вычислим расстояние от первой до последней прямой из P: $3+1+2+6+3+1+2+6+3+1+2+6+3+1 = 40.$ Следовательно, больше чем 40 длина стороны квадрата быть не может. С другой стороны, в L расстояние от второй прямой до третьей прямой с конца равно $4+6+2+4+6+2+4+6+2+4 = 40.$ Это означает, что квадрат со стороной 40 существует.