Задания первого очного отборочного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»
(олимпиада им.проф. И.В.Савельева)
Математика, 8 класс
Октябрь-ноябрь 2016 г.

1 вариант

1. Найти дробь p/q, $q\in[6;14]$, $p,q\in Z$ наименее удаленную от дроби $8/17$.

Решение. Расстояние от дроби p/q до $8/17$ равно $d=\left|\frac{p}{q}-\frac{8}{17}\right|=\frac{1}{q}\left|p-\frac{8q}{17}\right|$. При фиксированном $q\in[6;14]$ подбираем целое p, ближайшее к $8/17$ и вычисляем d.

1) $q=6$: $d=\frac{1}{6}\left|p-\frac{48}{17}\right| \Rightarrow p=3,\ d=\frac{1}{34}$; 2) $q=7$: $d=\frac{1}{7}\left|p-\frac{56}{17}\right| \Rightarrow p=3,\ d=\frac{5}{119}$;

3) $q=8$: $d=\frac{1}{8}\left|p-\frac{64}{17}\right| \Rightarrow p=4,\ d=\frac{1}{34}$; 4) $q=9$: $d=\frac{1}{9}\left|p-\frac{72}{17}\right| \Rightarrow p=4,\ d=\frac{4}{153}$;

5) $q=10$: $d=\frac{1}{10}\left|p-\frac{80}{17}\right| \Rightarrow p=5,\ d=\frac{1}{34}$; 6) $q=11$: $d=\frac{1}{11}\left|p-\frac{88}{17}\right| \Rightarrow p=5,\ d=\frac{3}{187}$;

7) $q=12$: $d=\frac{1}{12}\left|p-\frac{96}{17}\right| \Rightarrow p=6,\ d=\frac{1}{34}$; 8) $q=13$: $d=\frac{1}{13}\left|p-\frac{104}{17}\right| \Rightarrow p=6,\ d=\frac{2}{221}$;

9) $q=14$: $d=\frac{1}{14}\left|p-\frac{112}{17}\right| \Rightarrow p=7,\ d=\frac{1}{34}$.

Наименьшее значение $d=\frac{2}{221}$ достигается при $p=6,\ q=13$. Искомая дробь равна $6/13$.

2. Число A в десятичной форме записи имеет вид $A=\overline{7a631b}$, где a,b не равные нулю цифры. Число B получено суммированием всех, включая A, шестизначных, различных чисел, полученных из A циклическими перестановками его цифр (первая цифра переходит на второе место, вторая – на третье и т.д., последняя цифра переходит на первое место). Сколько существует чисел A, при которых B делится на 121? Найти наибольшее такое A.

Решение. Сумма цифр числа A и чисел, полученных из A циклическими перестановками его цифр, равна $a+b+17$. После суммирования этих чисел (их всего 6) в каждом разряде числа B получается $a+b+17$, поэтому $B=(a+b+17)(10^5+10^4+10^3+10^2+10+1)=(a+b+17)\cdot 111111$. Так как $111111=3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$, то B делится на 121 тогда и только тогда, когда $a+b+17$ делится на 11. Поскольку a и b цифры, то возможно всего два варианта: $a+b=5$ и $a+b=16$. Отсюда находим возможные наборы a и b: a=1, b =4; a=2, b =3; a=3, b =2; a=4, b =1; a=7, b =9; a=8, b =8; a=9, b =7. Таким образом, 7 чисел удовлетворяют условию задачи. Наибольшее число получим при a=9, b =7. Оно равно 796317.

3. Для многочлена $p(x)=2x+1$ найти многочлен $q(x)$ первой степени, для которого $p^2(q(x))=q(p^2(x))$ для любого x.

Решение. Пусть $q(x)=ax+b$. Тогда

$$p^2(q(x))=\left(2q(x)+1\right)^2=4\left(ax+b\right)^2+4\left(ax+b\right)+1=4q^2(x)+4q(x)+1=4a^2x^2+(8ab+4a)x+4b^2+4b+1,$$

а

$$q(p^2(x))=a\left(4x^2+4x+1\right)+b=4ax^2+4ax+a+b.$$

По условию задачи $p^2(q(x))=q(p^2(x))$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему:

$$\begin{cases} 4a^2=4a \\ 4ab+4a=4a \\ 4b^2+4b+1=a+b \end{cases} \quad или \quad \begin{cases} a^2=a \\ ab=0 \\ 4b^2+3b+1=a \end{cases}.$$

Из первого уравнения имеем a=1 или a=0. При a=0 получаем $4b^2+3b+1=0$. Последнее уравнение не имеет решений. При a=1 находим b =0. Следовательно, $q(x)=x$.

4. При каких натуральных n выполняется равенство $\text{НОД}(6,n)+\text{НОД}(8,2n)=10$?

Решение. Заметим, что возможные значения $НОД(6,n)$ это 1, 2, 3, 6, а возможные значения $НОД(8,n)$ − 1, 2, 4, 8. Их сумма, равная 10, возможна в двух случаях.

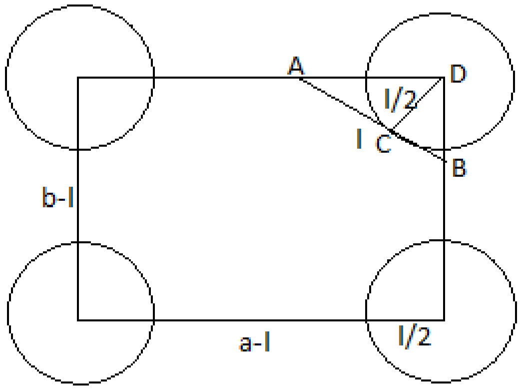
Случай 1. $\begin{cases} НОД(8,2n)=8 \\ НОД(6,n)=2 \end{cases}$. Из первого уравнения получаем $n=4k,$ а из второго − $n=2\left(3m+1\right)$ или $n=2\left(3m+2\right)$. Обоим условиям удовлетворяют числа вида $n=12t+4,\ \ n=12t+8,\ \ t\in Z.$

Случай 2. $\begin{cases} НОД(8,2n)=4 \\ НОД(6,n)=6 \end{cases}$. Из первого уравнения получаем $n=2(2k+1),$ а из второго − $n=6m.$ Обоим условиям удовлетворяют числа вида $n=12t+6,\quad t\in Z.$

Таким образом, равенство $\text{НОД}(6,n)+\text{НОД}(8,2n)=10$ выполняется при $n=12t+4, n=12t+6, n=12t+8, t\ge 0, t\in Z.$

5. В прямоугольнике расположен отрезок AB длины $l=4$, меньшей, чем длины его сторон, так, что концы отрезка лежат на сторонах прямоугольника. Точка A, совершая полный оборот вокруг прямоугольника, проходит путь равный его периметру. При этом точка C – середина отрезка AB, также проходит некоторый путь. Насколько этот путь короче периметра прямоугольника?

Решение. Обозначим длины сторон прямоугольника a и b. Из условий задачи (длина отрезка AB меньше длин сторон прямоугольника) следует, что точки A и B находятся либо на одной стороне прямоугольника, либо на соседних сторонах прямоугольника. Если точки A и B двигаются по одной стороне прямоугольника, точка C движется по прямолинейному отрезку. Если точки A и B находятся на соседних сторонах прямоугольника, то точка C движется по дуге окружности с центральным углом 90^0 и радиусом $l/2$, так как DC (см. рис.) является медианой прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе (она равна половине гипотенузы).



При одном полном обороте точка C проходит четыре четверти окружности радиуса $l/2$ и дважды прямолинейные отрезки длины $a-l$ и $b-l$, соответственно. Следовательно за один полный оборот точка C проходит путь $s = 2\pi \cdot l/2 + 2(a-l) + 2(b-l) = 2(a+b) - l(4-\pi)$. Так как периметр прямоугольника равен $2(a+b)$, то $\Delta s = l(4-\pi)$. Подставляя $l = 4$, находим $\Delta s = 16 - 4\pi$.