Задания первого очного отборочного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»
(олимпиада им.проф. И.В.Савельева)
Математика, 9 класс
Октябрь-ноябрь 2016 г.

1 вариант

1. Найти количество делителей числа $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, делящихся на 3. Найти сумму таких делителей.

Решение. В делителях числа $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, делящихся на 3, число 2 можно выбрать с показателями 0, 1, 2, 3 (4 варианта), число 3 − с показателями 1, 2 (2 варианта), число 5 − с показателями 0, 1, 2 (3 варианта). Поэтому общее количество делителей равно $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$ Сумма делителей числа $b = 2^3 \cdot 5^2$ равна $\left(1+2+4+8\right)(1+5+25) = 465.$ Тогда сумма делителей числа a, делящихся на 3, равна $(3+3^2) \cdot 465 = 12 \cdot 465 = 5580.$

2. Сколько существует целых b, при которых уравнение $x^2 + bx - 9600 = 0$ имеет целое решение кратное 10 и 12? Укажите наибольшее возможное b.

Решение. Так как искомое целое решение x кратно 10 и 12, то оно кратно 60, следовательно, его можно записать в виде $x = 60t, t \in Z.$ Подставим $x = 60t$ в исходное уравнение:

$3600t^2 + 60bt - 9600 = 0.$ Выразим b: $b = \dfrac{160}{t} - 60t.$ Для целочисленности b число t должно быть делителем числа 160. $160 = 2^5 \cdot 5$. Число $160 = 2^5 \cdot 5$ имеет 24 делителя:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 2^2, \pm 2^3, \pm 2^4, \pm 2^5, \pm 5, \pm 2 \cdot 5, \pm 2^2 \cdot 5, \pm 2^3 \cdot 5, \pm 2^4 \cdot 5, \pm 2^5 \cdot 5.$$

Вычислим отвечающие им значения b:

$$\pm 100, \mp 40, \mp 200, \mp 460, \mp 950, \mp 1915, \mp 268, \mp 584, \mp 1192, \mp 2396, \mp 4798, \mp 9599.$$

Мы получили 24 различных целых значений b. Выбирая из этих значений наибольшее, находим $b_{\max} = 9599.$

3. Сколько существует трехзначных положительных чисел x, делящихся на 3 и удовлетворяющих уравнению $НОД\left(15, НОД(x, 20)\right) = 5$? Найти наибольшее из них.

Решение. Так как 20 не делится на 3, то $НОД(x, 20)$ также не делится на 3. Поэтому уравнение $НОД\left(15, НОД(x, 20)\right) = 5$ эквивалентно условию $НОД(x, 20)$ делится на 5, что возможно тогда и только тогда, когда x делится на 5. Таким образом, условие задачи равносильно тому, что x делится на 5 и на 3, то есть x делится на 15. Следовательно, x можно записать в виде $x = 15\,m, m = 1, 2....$ Наименьшее трехзначное $x = 105$ получается при $m = 7,$ а наибольшее трехзначное $x = 990$ получается при $m = 66,$ всего 60 чисел.

4. Квадратный трехчлен $p(x) = ax^2 + bx + c,\ a > 0$ при делении на $(x-1)$ дает в остатке 4, при делении на $(x-2)$ - в остатке 15. Найти максимальное возможное при этих условиях значение ординаты вершины параболы $y = p(x)$. При каком значении x оно достигается?

Решение. По теореме Безу остаток от деления многочлена $p(x)$ на $x-a$ равен $p(a)$.

Поэтому условия задачи равносильны системе:

$$\begin{cases} 4a+2b+c=15 \\ a+b+c=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=11-3a \\ c=2a-7 \end{cases}.$$

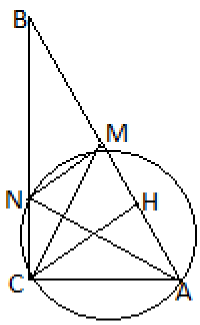
Таким образом, $p(x) = ax^2 + (11-3a)x + 2a - 7$. Минимальное значение квадратного трехчлена $p(x)$ (ордината вершины параболы) достигается в его вершине $x_в = \dfrac{3a-11}{2a}$. Оно равно

$$p_{\min}(x) = p(x_в) = p\left(\frac{3a-11}{2a}\right) = -\frac{a^2-38a+121}{4a} = \frac{19}{2} - \frac{1}{4}\left(a + \frac{121}{a}\right) = 4 - \left(\sqrt{a} - \frac{11}{\sqrt{a}}\right)^2.$$

Эта величина максимальна тогда и только тогда, когда $\sqrt{a} - \dfrac{11}{\sqrt{a}} = 0$, то есть $a = 11$. При $a = 11$ $x_в = 1$, а $p(x_в) = 4$.

5. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CH из вершины прямого угла. Из точки N катета BC, опущен на гипотенузу перпендикуляр NM, при этом прямая NA перпендикулярна CM и $MH : CH = 1 : \sqrt{3}$. Найти острые углы треугольника ABC.

Решение. Так как $\measuredangle ACB = 90^0$ и $\measuredangle NMA = 90^0$, то около четырехугольника $ACNM$ можно описать окружность.



Рассмотрим треугольник MCH. Он прямоугольный, поэтому по теореме Пифагора имеем:

$$MC^2 = MH^2 + CH^2 = MH^2 + 3MH^2 = 4MH^2.$$

Отсюда находим $MH : MC = 1 : 2,$ из чего следует, что $\measuredangle MCH = 30^0$. Так как $MN \| CH$, то $\measuredangle NMC = \measuredangle MCH = 30^0$. Углы NMC и NAC вписанные и опираются на одну дугу, поэтому $\measuredangle NAC = 30^0$. Вычислим $\measuredangle CMH$: $\measuredangle CMH = 90^0 - \measuredangle NMC = 60^0$. Из условия перпендикулярности MC и AN следует, что $\measuredangle NAM = 30^0$. Тогда $\measuredangle BAC = \measuredangle MAN + \measuredangle NAC = 60^0$, а $\measuredangle ABC = 30^0$.