Министерство образования и науки Российской Федерации

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Т.И. Бухарова, В.Е. Волков, С.А. Гришин, Н.В. Мирошин,
С.Е. Муравьев, О.В. Нагорнов, Д.Г. Орловский, Е.Х. Садекова,
Е.Б. Сандаков, В.М. Простокишин

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом»

В помощь школьникам 7–11 классов

Учебно-методическое пособие

Под редакцией О.В. Нагорнова

Москва 2016

УДК 371.2(075)
ББК 74.200.587
О-86

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом». В помощь школьникам 7–11 классов: *Учебно-методическое пособие* / Т.И. Бухарова, В.Е. Волков, С.А. Гришин, Н.В. Мирошин, С.Е. Муравьев, О.В. Нагорнов, Д.Г. Орловский, Е.Х. Садекова, Е.Б. Сандаков, В.М. Простокишин; под ред. О.В. Нагорнова. – М.: НИЯУ МИФИ, 2016. – 252 с.

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» по математике и физике в течение многих лет проводится Национальным исследовательским ядерным университетом «МИФИ» для школьников 7–11 классов в Москве, городах расположения объектов атомной отрасли, крупных образовательных центрах РФ. Ежегодно в олимпиаде участвуют около 20000 школьников, обычно около 500 из них становятся победителями и призерами олимпиады. В пособии, написанном составителями заданий олимпиады «Росатом», приведены задания всех туров олимпиады 2013–2014 учебного года. К большинству задач даны подробные комментарии, ответы или решения.

Предназначено участникам олимпиады «Росатом» будущих лет для подготовки к олимпиаде.

ISBN 978-5-7262-2264-6

© Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Обращение председателя оргкомитета олимпиады «Росатом», ректора НИЯУ МИФИ М.Н. Стриханова к участникам олимпиад НИЯУ МИФИ 4

1. Структура и формат олимпиады «Росатом» 6

2. Общие методические рекомендации по подготовке к олимпиаде «Росатом» 9

3. Физика 11

3.1. Отборочные туры 11

3.1.1. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 7 класс 11
3.1.2. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 8 класс 13
3.1.3. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 9 класс 17
3.1.4. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 10 класс 21
3.1.5. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 11 класс 25
3.1.6. Олимпиада имени академика И.В. Курчатова, 10 класс 30
3.1.7. Олимпиада имени академика И.В. Курчатова, 11 класс 33
3.1.8. Очные отборочные туры в регионах, 11 класс, комплект 1 39
3.1.9. Очные отборочные туры в регионах, 11 класс, комплект 2 44

3.2. Заключительные туры 49

3.2.1. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 7 класс 49
3.2.2. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 8 класс 51
3.2.3. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 9 класс 54
3.2.4. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс 57
3.2.5. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 1 .. 61
3.2.6. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 2 .. 66
3.2.7. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 3 .. 71
3.2.8. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 4 .. 75

4. Математика 81

4.1. Отборочные туры 81

4.1.1. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 7 класс 81
4.1.2. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 8 класс 85
4.1.3. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 9 класс 92
4.1.4. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 10 класс 99
4.1.5. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 11 класс 109
4.1.6. Олимпиада имени академика И.В. Курчатова, 10 класс 121
4.1.7. Олимпиада имени академика И.В. Курчатова, 11 класс 129
4.1.8. Очные отборочные туры в регионах, 11 класс, комплект 1 142
4.1.9. Очные отборочные туры в регионах, 11 класс, комплект 2 153
4.1.10. Очные отборочные туры в регионах, 11 класс, комплект 3 164

4.2. Заключительные туры 176

4.2.1. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 7 класс 176
4.2.2. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 8 класс 184
4.2.3. Заключительный тур олимпиада «Росатом», 9 класс 189
4.2.4. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс 197
4.2.5. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 1 ... 203
4.2.6. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 2 ... 216
4.2.7. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 3 ... 226
4.2.8. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 4 ... 238

Обращение председателя оргкомитета олимпиады «Росатом», ректора НИЯУ МИФИ М.Н. Стриханова к участникам олимпиад НИЯУ МИФИ

Дорогие участники олимпиады «Росатом» – и уже состоявшиеся, и потенциальные!

Приглашаю всех вас на олимпиады НИЯУ МИФИ, во-первых, потому, что это интересно, во-вторых, потому, что полезно, а в-третьих, потому, что победа в олимпиаде дает особые права при поступлении в вузы.

Олимпиада «Росатом» проводится уже много лет. Сначала – просто как олимпиада МИФИ по математике и физике, потом – как физико-математические олимпиады имени профессора И.В. Савельева и академика И.В. Курчатова, потом как олимпиада Минатома РФ, а после создания Государственной корпорации по атомной энергии «Росатом» она стала называться олимпиадой «Росатом». За эти годы менялись принципы организации олимпиады, формат заданий. Но сложность олимпиады, ее массовость, интерес к ней лучших школьников страны оставались всегда.

Олимпиада «Росатом» проходит не только в Москве. В очном формате она проходит во многих регионах России и за рубежом, давая возможность школьникам-немосквичам принять участие в одной из лучших школьных олимпиад страны. Поэтому немосквичей среди участников – больше половины. И еще. Среди участников олимпиады «Росатом» более половины – ученики невыпускных классов. Так что наша олимпиада – не средство поступления в вузы. А хорошая и сложная олимпиада, позволяющая выявить, поддержать и мотивировать лучших школьников к учебе, к математике и физике.

Но о льготах победителям и призерам забывать тоже не нужно. Многие годы олимпиада «Росатом» входит в Перечень олимпиад школьников, помогая лучшим школьникам страны поступать в ве-

дущие технические вузы. Так что используйте те возможности, которые дает вам наша олимпиада. Мы со своей стороны всегда готовы оказать вам методическую помощь. НИЯУ МИФИ проводит очные и дистанционные занятия для школьников, мастер-классы, издает методическую литературу, помогающую лучше подготовиться к нашим олимпиадам. Ждем вас на олимпиаде «Росатом». Ждем вас в НИЯУ МИФИ!

М.Н. Стриханов

1. Структура и формат олимпиады «Росатом»

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом» проводится Национальным исследовательским ядерным университетом «МИФИ» (НИЯУ МИФИ). Олимпиада проводится более 30 лет[1]. Основная цель олимпиады «Росатом» – выявление одаренных школьников, которые интересуются инженерно-техническими специальностями, способны к техническому творчеству и инновационному мышлению и проявляют интерес к вопросам ядерной энергетики и высоких технологий, и ориентирование их на выбор инженерно-технических направлений обучения.

В состав оргкомитета, методической комиссии и жюри олимпиады входят члены Российской академии наук, государственные и общественные деятели РФ, ректоры ряда ведущих инженерных университетов, главные редакторы образовательных журналов для школьников. Председатель оргкомитета – ректор НИЯУ МИФИ.

Олимпиада «Росатом» проводится по математике и физике для школьников 7–11 классов. Школьники невыпускных классов составляют около половины участников олимпиады. Олимпиада проводится в два этапа – отборочный и заключительный (для всех классов).

Отборочный этап состоит из нескольких независимых туров и проходит в октябре-январе. Один из отборочных туров проходит дистанционно (с использованием сети Интернет). До заключительного этапа олимпиады допускаются лучшие участники отборочного этапа (до 45 %, но обычно несколько меньше). Пройти на заключительный этап можно из любого отборочного тура, количество участий в отборочных турах никак не ограничивается.

Заключительный этап олимпиады проходит в феврале-марте в очной форме. Из-за огромной географии олимпиады «Росатом» заключительные туры в разных городах не могут проходить одновременно. Поэтому для их проведения методическая комиссия по еди-

[1] До 2006 г. олимпиада называлась Олимпиадой Минатома России, до 1999 – Физико-математической олимпиадой МИФИ.

ным методическим принципам готовит несколько комплектов равноценных заданий (одинаковой структуры и сложности), по которым заключительный тур в разных городах проводится в разные сроки. Однако каждый участник может участвовать в заключительном туре олимпиады только один раз по физике и один раз по математике.

Для широкого продвижения олимпиады «Росатом» в регионы РФ и отборочный, и заключительный этапы олимпиады «Росатом» проходят в очной форме во многих регионах РФ с обязательным выездом представителей оргкомитета. В 2015–2016 учебном году олимпиада проводилась на следующих региональных площадках: Алматы (Казахстан), Байконур, Балаково (Саратовская область), Владимир, Волгодонск (Ростовская область), Глазов (Удмуртская республика), Димитровград (Ульяновская область), Екатеринбург, Железногорск (Красноярский край), Заречный (Пензенская область), Зеленогорск (Красноярский край), Калининград, Калуга, Курчатов (Курская область), Лесной (Свердловская область), Липецк, Нижний Новгород, Нововоронеж (Воронежская область), Новоуральск (Свердловская область), Обнинск (Калужская область), Озерск (Челябинская область), Рязань, Санкт-Петербург, Саров (Нижегородская область), Северск (Томская область), Сергиев Посад (Московская область), Смоленск, Снежинск (Челябинская область), Тамбов, Ярославль. И здесь мы хотим поблагодарить наших друзей и коллег – региональных соорганизаторов олимпиады «Росатом», благодаря которым тысячи лучших школьников страны могут участвовать в олимпиаде.

В течение учебного года в олимпиаде «Росатом» принимают участие 15–17 тысяч школьников из 60–65 субъектов Российской Федерации и всех федеральных округов (в сумме по математике и физике и по всем классам). Несколько тысяч участвуют в заключительном этапе, победителями и призерами становятся около 400–450 участников.

Задания олимпиады составляются так, чтобы максимально точно проранжировать участников, и содержат как более простые, так и более сложные задания. Простые задачи соответствуют задачам раздела С ЕГЭ, уровень наиболее сложных задач соответствует уровню заданий заключительного тура Всероссийской олимпиады школьников.

Олимпиада «Росатом» по математике и физике много лет входит в Перечень олимпиад школьников, утверждаемый Министром образования и науки РФ, и потому ее победители и призеры (одиннадца-

тиклассники) могут получить особые права при зачислении в вузы, причем в любые – не только в НИЯУ МИФИ, – в которых в качестве вступительных испытаний есть математика или физика. По закону эти особые права могут быть такими (какую выбрать определяется вузом): либо зачисление без вступительных испытаний; либо участие в конкурсе с оценкой 100 баллов по ЕГЭ по предмету, соответствующему профилю олимпиады; либо оценка 100 баллов по внутреннему вступительному испытанию в данном вузе (если оно есть). Многие технические вузы РФ зачисляют победителей и призеров олимпиады «Росатом» без вступительных испытаний. В 2015–2016 учебном году в Перечень олимпиад школьников, утвержденном Минобрнауки России, олимпиада «Росатом» по физике входит под первым уровнем (олимпиад первого уровня по физике всего пять на всю нашу страну), по математике – под вторым (от уровня олимпиады и степени диплома зависят права победителей и призеров). Ежегодно в НИЯУ МИФИ поступает около 40–50 % победителей и призеров олимпиады «Росатом», еще столько же в НИЯУ МИФИ поступает победителей и призеров других олимпиад школьников, обеспечивая около 35 % бюджетного набора в университет.

Оргкомитет олимпиады «Росатом» помогает будущим участникам подготовиться к олимпиаде. На сайте НИЯУ МИФИ размещены задания прошлых лет, в том числе и в формате видеолекций (http://mephi.ru/entrant/olimpiads/rosatom/Pobediteli/podgotovka.php). Олимпиадные задания с подробным разбором ежегодно публикуются в образовательных журналах для школьников (Квант, Потенциал, Математика – 1-е сентября, Физика – 1-е сентября). Это дает возможность подготовиться к олимпиаде школьникам из самых отдаленных окраин нашей страны. Лучшие задания олимпиады «Росатом» неоднократно публиковались в рубрике «Задачник Кванта» журнала «Квант». Опубликован и размещен в открытом доступе на сайте олимпиады ряд учебных пособий с разбором олимпиадных задач. Дважды в год (в конце мая – начале июня и в январе) оргкомитет олимпиады «Росатом» проводит школы для 8–10-классников, показавших высокие результаты в олимпиаде текущего года. На школы приглашаются известные деятели олимпиадного движения, которые работают со школьниками. Такие мероприятия оказываются очень полезными для подготовки школьников к олимпиадам будущих лет. Участие в таких школах абсолютно бесплатно для участников.

2. Общие методические рекомендации по подготовке к олимпиаде «Росатом»

Так как же решают олимпиадные задачи по математике и физике и как лучше готовиться к олимпиадам? Чтобы научиться решать задачи, их нужно … решать. Пробовать, сомневаться, еще раз пробовать. Еще и еще пытаться «прочувствовать» логику физических законов и математических теорем, и снова пробовать решать задачи. Все же остальные советы по решениям являются конкретными и касаются тех разделов математики и физики, которые рассматриваются в данной задаче. Тем не менее, несколько общих рекомендаций по решению задач (и, соответственно, подготовке к участию в олимпиадах) можно сформулировать. При решении задач полезно придерживаться определенного порядка действий.

1. Прочтите условие. Внимательно прочтите условие. Перескажите его себе «своими словами» и «своими же словами» сформулируйте вопрос задачи. Если вам это поможет, выпишите все данные задачи (слева, справа, снизу или сверху – не важно).

2. Начертите чертеж, причем постарайтесь сделать это в правильном масштабе: на чертеже кубы должны быть похожи на кубы, круги на круги, наклонные плоскости на наклонные плоскости. «Функционально» хороший чертеж поможет решить задачу, плохой – помешает. На чертеже приведите все данные условия, чтобы они были у вас «перед глазами».

3. Постарайтесь использовать численные значения физических величин в Международной системе единиц (СИ), хотя это и необязательно, особенно если ответ выражается через отношение однородных величин.

4. И теперь главное. Вспомните те определения, теоремы и законы, которые «управляют» рассматриваемой задачей или явлением, вспомните их логику, принципы, идеи, похожие случаи.

5. И ничего не выдумывайте. Все выдумали до нас! Поэтому если вы пытаетесь «выдумать» решение, то, скорее всего, вы действуете неправильно. Ваша задача не выдумать, а вспомнить! Вспом-

нить логику математических теорем и физических законов и точно «приспособить» их к рассматриваемому случаю. Но приспособить нужно будет не формулу, а ту логику, которая в теоремах и законах содержится, и точно ей следовать.

6. Постарайтесь решить полученные на основе математических теорем и физических законов уравнения в общем («буквенном») виде, поскольку в этом случае проще проверить ответ, проверить размерность, частные случаи и т.д.

7. Проверьте размерность ответа. Единицы его измерения должны совпадать с единицей измерения искомой величины. Это означает, что если вы должны вычислить скорость, то ответ должен иметь размерность м/с, км/с, км/ч, но никак не метры, килограммы и т.д. Помните, что складывать или сравнивать величины разной размерности нельзя, и если в ответ у вас входит комбинация $a+m$, где a – ускорение тела, а m – его масса, то этот ответ неправильный.

8. Проверьте свой ответ на здравый смысл: если масса получилась отрицательной, скорость – больше скорости света, а ответ при каких-то возможных значениях параметров содержит нуль в знаменателе – ваш ответ неверен.

9. Попробуйте проверить ответ на частные случаи, т.е. рассмотрите такие модификации задачи, когда ответ понятен и без решения, и убедитесь, что полученный вами ответ в него переходит.

Конечно, умение решать задачи приходит с опытом и изученными книгами. Используйте для подготовки книги из списка литературы в конце настоящего пособия. Используйте и эту книгу, ведь именно для этого мы ее и писали.

3. Физика

3.1. Отборочные туры

3.1.1. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 7 класс

1. Размеры ртутных «уличного» и «медицинского» термометров почти одинаковы – 10–15 см. Почему уличным термометром можно измерить температуру с точностью 0,5 градуса, а медицинским – с точностью 0,05 градуса? Почему уличным термометром можно измерить температуру от –50 до +50 градусов, а медицинским от 35 до 42 градусов? От чего зависит точность термометра и пределы его шкалы?

2. На динамометре висит ведерко, заполненное до краев водой, при этом показание динамометра равно $F_1 = 20$ Н. В ведерко кладут камень, который полностью погружается в воду и плотность которого вдвое больше плотности воды. В этом случае динамометр показывает $F_2 = 24$ Н. Каким будет показание динамометра, если в ведерко, не вытаскивая из него первый камень, опустить еще один камень с плотностью, втрое большей плотности воды, и объемом, втрое меньшим объема первого камня? Второй камень полностью погружается в воду.

3. Один человек проплывает бассейн (в одну сторону) за время $t_1 = 60$ с, второй – за время $t_2 = 80$ с. Они начинают плыть одновременно с одной стороны бассейна и, достигнув противоположной стенки, разворачиваются и продолжают плыть дальше, затем снова разворачиваются и т.д. Через какое время после старта первый человек догонит второго, обогнав его на «круг»?

4. Вовочка, который бегает со скоростью $v = 10$ км/ч, ездит в школу на метро. Чтобы прийти без опозданий, он всегда бежит по эскалаторам. Однажды он перепутал эскалаторы и поднимался по эскалатору, движущемуся вниз. В результате он опоздал на

$\Delta t_1 = 12$ мин. Когда этот эскалатор не работал, Вовочка опоздал на $\Delta t_2 = 3$ мин. Найти скорость эскалатора.

Ответы и решения

1. Ртуть и в «уличном», и в медицинском термометре одинаково расширяется при нагревании. Однако в зависимости от количества ртути и от диаметра трубочки, в которую расширяется ртуть, она может подниматься на разную высоту. В медицинском термометре диаметр трубочки гораздо меньше, чем в уличном, поэтому ртуть при нагревании на ту же величину, что и в уличном, поднимется на гораздо большую высоту. Поэтому пределы измерения медицинского термометра при том же его размере, что и уличного – меньше, а точность измерений – выше.

2. Очевидно, разница показаний динамометра определяется разностью плотностей камня и воды

$$(\rho_к - \rho_в)Vg = F_2 - F_1,$$

где $\rho_к$ и $\rho_в$ – плотности камня и воды; V – объем камня. Поскольку плотность камня вдвое превосходит плотность воды, имеем

$$\rho_в Vg = F_2 - F_1.$$

Когда в ведерко кладут второй камень, динамометр будет показывать

$$F_3 = F_2 + (3\rho_в - \rho_в)(V/3)g = F_2 + (2/3)\rho_в Vg =$$
$$= F_2 + (2/3)(F_2 - F_1) = 26,7 \text{ Н}.$$

3. Пусть длина бассейна – l, скорость первого человека – v_1, второго – v_2. Тогда очевидно

$$v_1 = \frac{l}{t_1}; \qquad v_2 = \frac{l}{t_2}.$$

Поскольку при обгоне второго пловца «на круг» первый пловец проплывает на $2l$ большее расстояние, для искомого времени t_x справедливо уравнение

$$(v_1 - v_2)t_x = 2l$$

Откуда находим

$$t_x = \frac{2t_1 t_2}{t_2 - t_1} = 480 \text{ с} = 8 \text{ мин}.$$

4. Пусть скорость эскалатора – u, его длина – L. Тогда в первом случае Вовочка движется со скоростью $v - u$, во втором – со скоростью v и проходит расстояние L. Поэтому для первого и второго случаев получаем

$$\frac{L}{v+u} + \Delta t_1 = \frac{L}{v-u};$$

$$\frac{L}{v+u} + \Delta t_2 = \frac{L}{v}.$$

Или

$$\frac{\Delta t_1}{L} = \frac{2u}{(v+u)(v-u)};$$

$$\frac{\Delta t_2}{L} = \frac{u}{(v+u)v}.$$

Деля уравнения друг на друга, получим

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{2v}{v-u}.$$

Откуда найдем

$$u = \frac{v(\Delta t_1 - 2\Delta t_2)}{\Delta t_1} = 5 \text{ км/ч}.$$

3.1.2. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 8 класс

1. В воду плотностью $\rho_в$ наливают концентрированную кислоту плотности $\rho_к = 1{,}3\rho_в$ и получают раствор плотности $\rho_р = 1{,}1\rho_в$. Найти массу кислоты, если масса всего раствора $m = 240$ г, а объем раствора равен сумме объемов воды и кислоты.

2. При экспериментальном исследовании нескольких тел одинакового объема было обнаружено, что удержать тела в толще воды

можно было либо с помощью силы $F_1 = 1$ Н, либо $F_2 = 2$ Н. Плотность самого тяжелого из тел – $\rho = 1,4$ г/см^3. Найдите все возможные значения плотности остальных тел, $g = 10$ м/с^2. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

3. Один человек проплывает бассейн (в одну сторону) за время $t_1 = 60$ с, второй – за время $t_2 = 80$ с. Они начинают плыть одновременно с одной стороны бассейна и, достигнув противоположной стенки, разворачиваются и продолжают плыть дальше, затем снова разворачиваются и т.д. Через какое время после старта первый человек догонит второго, обогнав его на «круг»?

4. Вовочка, который бегает со скоростью $v = 10$ км/ч, ездит в школу на метро. Чтобы прийти без опозданий, он всегда бежит по эскалаторам. Однажды он перепутал эскалаторы и поднимался по эскалатору, движущемуся вниз. В результате он опоздал на $\Delta t_1 = 12$ мин. Когда этот эскалатор не работал, Вовочка опоздал на $\Delta t_2 = 3$ мин. Найти скорость эскалатора.

5. По результатам измерений коэффициент полезного действия (КПД) нагревателя оказался равным $\eta_1 = 80$ %. В дальнейшем выяснилось, что $\delta = 5$ % топлива вытекало через течь в топливном шланге. Каким будет КПД нагревателя после устранения течи? Ответ обосновать.

Ответы и решения

1. Плотность раствора определяется очевидным соотношением

$$\rho_р = \frac{m}{V_в + V_к} = \frac{m}{\dfrac{m - m_к}{\rho_в} + \dfrac{m_к}{\rho_к}} = \frac{m\rho_в\rho_к}{m\rho_к + m_к(\rho_в - \rho_к)}, \qquad (*)$$

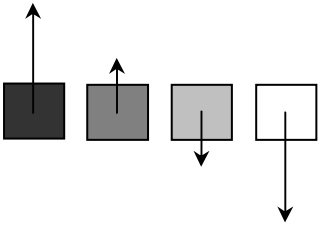
где $V_в$ и $V_к$ – объемы воды и кислоты; $m_к$ – масса кислоты. Выражая из уравнения (*) массу кислоты, получим

$$m_к = \frac{m\rho_к(\rho_р - \rho_в)}{\rho_р(\rho_к - \rho_в)}.$$

Используя далее данные в условии соотношения плотностей, получим

$$m_к = 96 \text{ г}.$$

2. Поскольку в условии не сказано, как направлены силы, то, очевидно, существует четыре варианта удерживания тел под водой и, соответственно, четыре тела с разными плотностями (см. рисунок). Для самого тяжелого тела (которое нужно удерживать силой $\vec{F}_2$, направленной вверх) условие равновесия дает



$$mg = F_2 + F_A \quad \Rightarrow \quad \rho Vg = F_2 + \rho_в Vg \quad \Rightarrow \quad (\rho - \rho_в)Vg = F_2,$$

где m – масса самого тяжелого тела; F_A – действующая на него в толще воды выталкивающая сила Архимеда; V – объем тел; $\rho_в$ – плотность воды. Отсюда находим объем тел

$$V = \frac{F_2}{(\rho - \rho_в)g} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Записывая теперь условия равновесия для остальных тел, найдем

$$\rho_1 gV = F_1 + \rho_в gV \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{F_1}{gV} + \rho_в = 1200 \text{ кг/м}^3;$$

$$\rho_2 gV = \rho_в gV - F_1 \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = \rho_в - \frac{F_1}{gV} = 800 \text{ кг/м}^3;$$

$$\rho_3 gV = \rho_в gV - F_3 \quad \Rightarrow \quad \rho_3 = \rho_в - \frac{F_2}{gV} = 600 \text{ кг/м}^3.$$

Итак, всего тел – четыре, их плотности

$\rho = 1400$ кг/м^3, $\rho_1 = 1200$ кг/м^3, $\rho_2 = 800$ кг/м^3, $\rho_3 = 600$ кг/м^3.

3. Пусть длина бассейна – l, скорость первого человека – v_1, второго – v_2. Тогда очевидно

$$v_1 = \frac{l}{t_1}; \qquad v_2 = \frac{l}{t_2}.$$

Поскольку при обгоне второго пловца «на круг» первый пловец проплывает на $2l$ большее расстояние, для искомого времени t_x справедливо уравнение

$$(v_1 - v_2)t_x = 2l\,.$$

Откуда находим

$$t_x = \frac{2t_1t_2}{t_2 - t_1} = 480\text{ с} = 8\text{ мин}\,.$$

4. Пусть скорость эскалатора – u, его длина – L. Тогда в первом случае Вовочка движется со скоростью $v-u$, во втором – со скоростью v и проходит расстояние L. Поэтому для первого и второго случаев получаем

$$\frac{L}{v+u} + \Delta t_1 = \frac{L}{v-u};$$

$$\frac{L}{v+u} + \Delta t_2 = \frac{L}{v}.$$

Или

$$\frac{\Delta t_1}{L} = \frac{2u}{(v+u)(v-u)};$$

$$\frac{\Delta t_2}{L} = \frac{u}{(v+u)v}.$$

Деля уравнения друг на друга, получим

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{2v}{v-u}\,.$$

Откуда найдем

$$u = \frac{v(\Delta t_1 - 2\Delta t_2)}{\Delta t_1} = 5\ \text{км/ч}.$$

5. Пусть за какое-то время израсходовано топливо массой m с удельной теплотой сгорания λ, а использовано количество теплоты Q ($Q < \lambda m$). Тогда результаты измерения КПД нагревателя дадут

$$\eta_1 = \frac{Q}{\lambda m}\,. \qquad (*)$$

С другой стороны, поскольку часть топлива терялась, использованная теплота составляет долю η_2 от той части топлива, которая осталась после потерь, где η_2 – настоящий КПД нагревателя

$$Q = \eta_2 \lambda (1-\delta) m . \qquad (**)$$

Подставляя (*) в (**), найдем

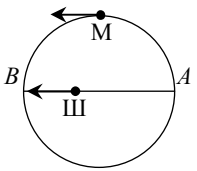
$$\eta_2 = \frac{\eta_1}{1-\eta} = \frac{\eta_1}{0,95} = 84\ \% .$$

3.1.3. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 9 класс

1. При экспериментальном исследовании нескольких тел одинакового объема было обнаружено, что удержать тела в толще воды можно было с помощью силы либо $F_1 = 1$ Н, либо $F_2 = 2$ Н. Плотность самого тяжелого из тел – $\rho = 1,4$ г/см^3. Найдите все возможные значения плотности остальных тел, $g = 10$ м/с^2. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

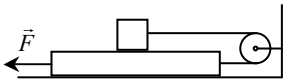
2. По результатам измерений коэффициент полезного действия (КПД) нагревателя оказался равным $\eta_1 = 80$ %. В дальнейшем выяснилось, что $\delta = 5$ % топлива вытекало через течь в топливном шланге. Каким будет КПД нагревателя после устранения течи? Ответ обосновать.

3. Кот Матроскин и пес Шарик играли в такую игру. Они одновременно начинали бежать из точки A: Матроскин – равномерно по окружности, Шарик – по диаметру с постоянным ускорением. Начальная скорость Шарика вдвое больше скорости Матроскина. Пробежав полкруга, Матроскин попал в точку B, куда в тот же момент прибежал и Шарик. Найти отношение модулей ускорений Матроскина и Шарика.



4. Вовочка, который бегает со скоростью $v = 10$ км/ч, ездит в школу на метро. Чтобы прийти без опозданий, он всегда бежит по эскалаторам. Однажды он перепутал эскалаторы и поднимался по эскалатору, движущемуся вниз. В результате он опоздал на

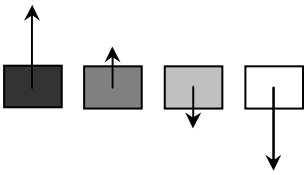
$\Delta t_1 = 12$ мин. Когда этот эскалатор не работал, Вовочка опоздал на $\Delta t_2 = 3$ мин. Найти скорость эскалатора.



5. Тело массой m кладут на доску массой $4m$ и связывают с доской невесомой и нерастяжимой нитью, переброшенной через блок (см. рисунок), прикрепленный к стене. Какую минимальную силу, направленную от стены, нужно приложить к доске, чтобы она начала двигаться? Коэффициент трения между всеми поверхностями равен k.

Ответы и решения

1. Поскольку в условии не сказано, как направлены силы, то, очевидно, существует четыре варианта удерживания тел под водой и, соответственно, четыре тела с разными плотностями (см. рисунок). Для самого тяжелого тела (которое нужно удерживать силой $\vec{F}_2$, направленной вверх) условие равновесия дает



$$mg = F_2 + F_\text{A} \quad \Rightarrow \quad \rho V g = F_2 + \rho_\text{в} V g \quad \Rightarrow \quad (\rho - \rho_\text{в}) V g = F_2,$$

где m – масса самого тяжелого тела; F_A – действующая на него в толще воды выталкивающая сила Архимеда; V – объем тел; $\rho_\text{в}$ – плотность воды. Отсюда находим объем тел

$$V = \frac{F_2}{(\rho - \rho_\text{в}) g} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Записывая теперь условия равновесия для остальных тел, найдем

$$\rho_1 g V = F_1 + \rho_\text{в} g V \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{F_1}{gV} + \rho_\text{в} = 1200 \text{ кг/м}^3;$$

$$\rho_2 g V = \rho_\text{в} g V - F_1 \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = \rho_\text{в} - \frac{F_1}{gV} = 800 \text{ кг/м}^3;$$

$$\rho_3 g V = \rho_\text{в} g V - F_3 \quad \Rightarrow \quad \rho_3 = \rho_\text{в} - \frac{F_2}{gV} = 600 \text{ кг/м}^3.$$

Итак, всего тел – четыре, их плотности

$\rho = 1400$ кг/м^3, $\rho_1 = 1200$ кг/м^3, $\rho_2 = 800$ кг/м^3, $\rho_3 = 600$ кг/м^3.

2. Пусть за какое-то время израсходовано топливо массой m с удельной теплотой сгорания λ, а использовано количество теплоты Q ($Q < \lambda m$). Тогда результаты измерения КПД нагревателя дадут

$$\eta_1 = \frac{Q}{\lambda m}. \qquad (*)$$

С другой стороны, поскольку часть топлива терялась, использованная теплота составляет долю η_2 от той части топлива, которая осталась после потерь, где η_2 – настоящий КПД нагревателя

$$Q = \eta_2 \lambda (1 - \delta) m. \qquad (**)$$

Подставляя (*) в (**), найдем

$$\eta_2 = \frac{\eta_1}{1 - \eta} = \frac{\eta_1}{0{,}95} = 84\,\%.$$

3. Интересно, что в условии задачи вообще не заданы никакие величины. Это значит, что отношение ускорений должно определяться числами порядка единицы: может быть единицами, двойками (или ее степенями), числом π или их комбинациями.

Пусть радиус окружности – R, скорость Матроскина – v, ускорение Шарика – a. Тогда из условия одновременного прихода Матроскина и Шарика в точку B имеем

$$\pi R = vt;$$

$$2R = 2vt - \frac{at^2}{2} \qquad (*)$$

(ускорение Шарика, очевидно, должно быть направлено противоположно его движению). Выражая время из первого уравнения и подставляя его во второе, получим

$$2(\pi - 1) = \frac{a}{2}\frac{\pi^2 R}{v^2}.$$

Поскольку ускорение Матроскина есть v^2 / R, то из этой формулы находим отношение ускорений Матроскина и Шарика

$$\frac{a_{\text{М}}}{a_{\text{Ш}}} = \frac{v^2}{Ra} = \frac{\pi^2}{4(\pi - 1)} = 1{,}15\,.$$

4. Пусть скорость эскалатора – u, его длина – L. Тогда в первом случае Вовочка движется со скоростью $v - u$, во втором – со скоростью v и проходит расстояние L. Поэтому для первого и второго случаев получаем

$$\frac{L}{v+u} + \Delta t_1 = \frac{L}{v-u},$$
$$\frac{L}{v+u} + \Delta t_2 = \frac{L}{v};$$

или

$$\frac{\Delta t_1}{L} = \frac{2u}{(v+u)(v-u)},$$
$$\frac{\Delta t_2}{L} = \frac{u}{(v+u)v}.$$

Деля уравнения друг на друга, получим

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{2v}{v-u}\,.$$

Откуда найдем

$$u = \frac{v(\Delta t_1 - 2\Delta t_2)}{\Delta t_1} = 5 \text{ км/ч}.$$

5. Чтобы доска начала двигаться, сила F должна превысить максимальную силу трения между доской и полом $F_{\text{тр},1}$, максимальную силу трения между доской и телом $F_{\text{тр},2}$ и силу натяжения нити T:

$$F \geq F_{\text{тр},1} + F_{\text{тр},2} + T\,. \qquad (*)$$

Чтобы тело начало двигаться, сила натяжения нити должна превысить максимальную силу трения между телом и доской $F_{\text{тр},2}$:

$$T \geq F_{\text{тр},2}\,. \qquad (**)$$

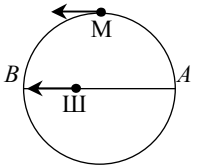
Подставляя силу натяжения из (**) в (*) и используя закон Кулона-Амонтона для максимальных сил трения, получим

$$F \geq F_{\text{тр},1} + 2F_{\text{тр},2} = 5kmg + 2kmg = 7kmg\,.$$

3.1.4. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 10 класс

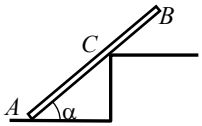
1. При экспериментальном исследовании нескольких тел одинакового объема было обнаружено, что удержать тела в толще воды можно было с помощью силы либо $F_1 = 1$ Н, либо $F_2 = 2$ Н. Плотность самого тяжелого из тел – $\rho = 1{,}4$ г/см^3. Найдите все возможные значения плотности остальных тел, $g = 10$ м/с^2 . Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

2. Кот Матроскин и пес Шарик играли в такую игру. Они одновременно начинали бежать из точки A: Матроскин – равномерно по окружности, Шарик – по диаметру с постоянным ускорением. Начальная скорость Шарика вдвое больше скорости Матроскина. Пробежав полкруга, Матроскин попал в точку B, куда в тот же момент прибежал и Шарик. Найти отношение модулей ускорений Матроскина и Шарика.



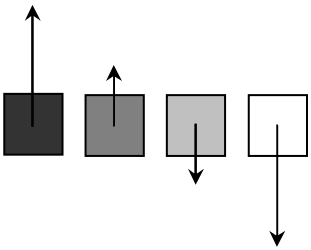
3. Вовочка, который бегает со скоростью $v = 10$ км/ч, ездит в школу на метро. Чтобы прийти без опозданий, он всегда бежит по эскалаторам. Однажды он перепутал эскалаторы и поднимался по эскалатору, движущемуся вниз. В результате он опоздал на $\Delta t_1 = 12$ мин. Когда этот эскалатор не работал, Вовочка опоздал на $\Delta t_2 = 3$ мин. Найти скорость эскалатора.

4. Горизонтальный цилиндрический сосуд, содержащий идеальный газ, разделен на 100 частей закрепленными теплонепроницаемыми поршнями. Объемы этих частей одинаковы и равны V, давления газа в них равны p, $2p$, …, $100p$. Поршни убирают. Найти давление газа в сосуде после установления равновесия. Теплопотерями и теплоемкостью сосуда пренебречь.



5. Однородный стержень AB опирается на шероховатый пол и гладкий выступ C. Угол между стержнем и полом α, $AC = (2/3)AB$. При каком коэффициенте трения между стержнем и полом стержень будет находиться в равновесии?

Ответы и решения



1. Поскольку в условии не сказано, как направлены силы, то, очевидно, существует четыре варианта удерживания тел под водой и, соответственно, четыре тела с разными плотностями (см. рисунок). Для самого тяжелого тела (которое нужно удерживать силой $\vec{F}_2$, направленной вверх) условие равновесия дает

$$mg = F_2 + F_\text{A} \quad \Rightarrow \quad \rho V g = F_2 + \rho_\text{в} V g \quad \Rightarrow \quad (\rho - \rho_\text{в}) V g = F_2,$$

где m – масса самого тяжелого тела; F_A – действующая на него в толще воды выталкивающая сила Архимеда; V – объем тел;, $\rho_\text{в}$ – плотность воды. Отсюда находим объем тел

$$V = \frac{F_2}{(\rho - \rho_\text{в}) g} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Записывая теперь условия равновесия для остальных тел, найдем

$$\rho_1 g V = F_1 + \rho_\text{в} g V \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{F_1}{gV} + \rho_\text{в} = 1200 \text{ кг/м}^3;$$

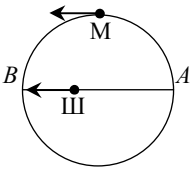
$$\rho_2 g V = \rho_\text{в} g V - F_1 \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = \rho_\text{в} - \frac{F_1}{gV} = 800 \text{ кг/м}^3;$$

$$\rho_3 g V = \rho_\text{в} g V - F_3 \quad \Rightarrow \quad \rho_3 = \rho_\text{в} - \frac{F_2}{gV} = 600 \text{ кг/м}^3.$$

Итак, всего тел – четыре, их плотности

$\rho = 1400$ кг/м^3, $\rho_1 = 1200$ кг/м^3, $\rho_2 = 800$ кг/м^3, $\rho_3 = 600$ кг/м^3.

2. Интересно, что в условии задачи вообще не заданы никакие величины. Это значит, что отношение ускорений должно определяться числами порядка единицы: может быть единицами, двойками (или ее степенями), числом π или их комбинациями.



Пусть радиус окружности – R, скорость Матроскина – v, ускорение Шарика – a. Тогда из условия одновременного прихода Матроскина и Шарика в точку B имеем

$$\pi R = vt;$$

$$2R = 2vt - \frac{at^2}{2} \qquad (*)$$

(ускорение Шарика, очевидно, должно быть направлено противоположно его движению). Выражая время из первого уравнения и подставляя его во второе, получим

$$2(\pi - 1) = \frac{a}{2}\frac{\pi^2 R}{v^2}.$$

Поскольку ускорение Матроскина есть v^2 / R, то из этой формулы находим отношение ускорений Матроскина и Шарика

$$\frac{a_{\text{М}}}{a_{\text{Ш}}} = \frac{v^2}{Ra} = \frac{\pi^2}{4(\pi - 1)} \approx 1{,}15.$$

3. Пусть скорость эскалатора – u, его длина – L. Тогда в первом случае Вовочка движется со скоростью $v - u$, во втором – со скоростью v и проходит расстояние L. Поэтому для первого и второго случаев получаем

$$\frac{L}{v+u} + \Delta t_1 = \frac{L}{v-u},$$

$$\frac{L}{v+u} + \Delta t_2 = \frac{L}{v};$$

или

$$\frac{\Delta t_1}{L} = \frac{2u}{(v+u)(v-u)};$$

$$\frac{\Delta t_2}{L} = \frac{u}{(v+u)v}.$$

Деля уравнения друг на друга, получим

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{2v}{v-u}.$$

Откуда найдем

$$u = \frac{v(\Delta t_1 - 2\Delta t_2)}{\Delta t_1} = 5 \text{ км/ч}.$$

4. Внутренняя энергия газа в i-м отсеке в начальный момент времени равна

$$U_i = \alpha \nu_i R T_i = \alpha p_i V_i = \alpha i p V, \qquad (*)$$

где α – числовой коэффициент, зависящий от атомности молекул газа (для одноатомного газа – 3/2 и т.д.). После удаления поршней и установления равновесия давление и температура газа во всех отсеках выровняются, и внутренняя энергия газа будет равна

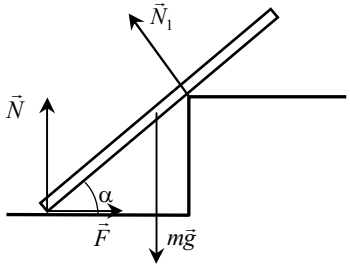
$$U = \alpha p_x N V, \qquad (**)$$

где p_x – искомое давление. Приравнивая энергию (**) и суммы внутренних энергий (*), получим

$$\alpha p V \sum_{i=1}^{N} i = \alpha p_x N V.$$

Отсюда находим

$$p_x = \frac{(N+1)}{2} p = 50{,}5p.$$



5. На стержень действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции пола $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}$, сила реакции уступа $\vec{N}_1$, направленная перпендикулярно стержню. Из условия равенства нулю суммы

моментов всех сил относительно нижней точки стержня имеем

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha = N_1\frac{2}{3}l\,.$$

Отсюда

$$N_1 = \frac{3}{4}mg\cos\alpha\,.$$

Силу реакции N найдем из условия равенства нулю суммы вертикальных проекций всех сил, действующих на тело:

$$N = mg - N_1\cos\alpha = mg\left(1-\frac{3}{4}\cos^2\alpha\right).$$

Чтобы стержень покоился, горизонтальная проекция силы $\vec{N}_1$ не должна превосходить максимальной силы трения kN. Поэтому условие равновесия стержня имеет вид

$$\frac{3}{4}mg\cos\alpha\sin\alpha \le kmg\left(1-\frac{3}{4}\cos^2\alpha\right)$$

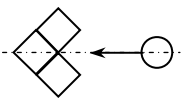
или

$$k \ge \frac{(3/4)\cos\alpha\sin\alpha}{1-(3/4)\cos^2\alpha}\,.$$

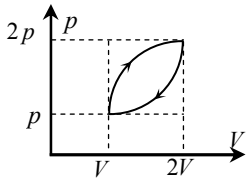
3.1.5. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 11 класс

1. Самолет, имея скорость $v_0 = 100$ км/ч, садится на палубу авианосца. Зацепившись за канат торможения, самолет проходит до остановки путь $S = 50$ м. Найти максимальный вес летчика. Масса летчика $m = 80$ кг. Для каната справедлив закон Гука, трением и силой сопротивления воздуха пренебречь.

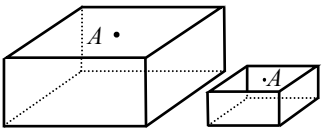
2. Шайба налетает на три одинаковых кубика, расположенных так, как показано на рисунке. Скорость шайбы – v, масса шайбы вдвое меньше массы каждого кубика, диаметр шайбы равен ребру кубика. Найти скорости всех тел после абсолютно упругого столкновения. Трение отсутствует.



3. Вокруг некоторой звезды вращается планета. Период обращения планеты вокруг своей оси – T, вокруг звезды – $10T$. Вокруг планеты вращается спутник с периодом обращения $4T$. Через какое минимальное время в данной точке на экваторе планеты повторяется затмение звезды? Планета и спутник вращаются в одной плоскости в одном направлении.



4. На рисунке в координатах $p - V$ показан график процесса, проходящего с одним молем идеального одноатомного газа. При некотором выборе масштабов график процесса представляет собой две «четвертинки» одинаковых окружностей. Найти КПД цикла.



5. Имеется тело в форме параллелепипеда с размерами $a \times a \times a/2$, равномерно заряженное зарядом с объемной плотностью ρ. Напряженность электрического поля параллелепипеда в центре грани с размерами $a \times a$ (точка A на левом рисунке) равна E. Найти напряженность поля тонкостенной коробки с размерами $(a/2) \times (a/2) \times (a/4)$ без верхней крышки (грани с размерами $(a/2) \times (a/2)$) в ее центре (точка A на правом рисунке). Поверхностная плотность заряда коробки – σ. Ответ обосновать.

Ответы и решения

1. По закону сохранения механической энергии находим

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{kS^2}{2},$$

где M – масса самолета; k – жесткость каната торможения. Отсюда

$$k = \frac{Mv_0^2}{S^2}.$$

Максимальным вес летчика будет при максимальном ускорении самолета, которое будет при максимальном удлинении каната. Используя закон Гука, находим максимальное ускорение самолета (и

летчика внутри него; для летчика это ускорение будет создаваться силами натяжения ремней безопасности)

$$a = \frac{v_0^2}{S}.$$

Учитывая действующую на летчика силу тяжести, находим его максимальный вес

$$P = \sqrt{m^2 g^2 + m^2 a^2} = m\sqrt{g^2 + (v_0^4 / S^2)} = 1440 \text{ Н}.$$

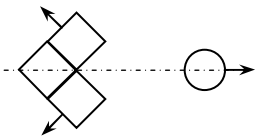
2. В момент удара шайба будет взаимодействовать с двумя крайними кубиками. Поскольку трение отсутствует, каждый кубик может «чувствовать» только составляющую скорости, перпендикулярную его поверхности. Вторая составляющая скорости будет меняться при взаимодействии шайбы с другим кубиком, а сам кубик может приобрести скорость, направленную перпендикулярно его поверхности. Чтобы найти скорости двух крайних кубиков и шайбы после удара, запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$(m/2)v_\perp = (m/2)v_{\perp,1} + mv_1;$$

$$\frac{(m/2)v_\perp^2}{2} = \frac{(m/2)v_{\perp,1}^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2},$$

где $v_\perp = v/\sqrt{2}$ и $v_{\perp,1}$ – составляющие скорости шайбы, перпендикулярные поверхности кубика до и после удара; v_1 – скорость кубика после удара. Из законов сохранения находим

$$v_{\perp,1} = -\frac{v_\perp}{3}, \quad v_1 = \frac{2v_\perp}{3}.$$



Таким образом, после удара составляющая скорости шайбы, перпендикулярная поверхности кубика, меняет направление и уменьшается втрое, кубик приобретает скорость, равную двум третям составляющей скорости шайбы до удара. Для второго крайнего кубика будут выполнены те же соотношения, поэтому он приобретет такую же скорость, как и первый кубик. Это означает, что после удара крайние кубики будут двигаться под углом $45°$ к направлению начальной скорости шайбы со скоростями

$$v_1 = \frac{2v_\perp}{3} = \frac{\sqrt{2}v}{3}.$$

Шайба будет двигаться назад со скоростью $v/3$, центральный кубик останется стоять на месте.

3. Из данных условия находим угловые скорости вращения: планеты вокруг своей оси $\omega_П$, вокруг звезды $\omega_З$ и спутника вокруг планеты $\omega_С$:

$$\omega_П = \frac{2\pi}{T}, \qquad \omega_З = \frac{2\pi}{10T}, \qquad \omega_С = \frac{2\pi}{4T}.$$

В системе отсчета, вращающейся вместе с планетой, угловые скорости звезды и спутника равны:

$$\omega'_З = \omega_П - \omega_З = \frac{18\pi}{10T}, \qquad \omega'_С = \omega_П - \omega_С = \frac{6\pi}{4T}. \qquad (*)$$

Затмение будет повторяться в той же точке планеты через время t, если одновременно выполнены уравнения

$$2\pi k = \omega'_З t, \qquad 2\pi n = \omega'_С t, \qquad (**)$$

где k и n – целые числа. Подставляя в систему (**) относительные угловые скорости звезды и спутника, подбором находим целые решения k и n. Минимальными решениями (которые определяют ближайшее затмение) являются числа

$$k = 6, \quad n = 5.$$

Теперь из любого уравнения системы можно найти минимальное время между затмениями

$$t = \frac{10}{3}T.$$

4. Работу газа за цикл находим как площадь фигуры, ограниченной графиком процесса в координатах $p - V$. Очевидно, эту площадь можно найти как разность удвоенной площади сектора, опирающегося на четверть окружности радиуса p по одной оси и V по другой, и прямоугольника, в который вписан цикл (со сторонами p и V):

$$A = 2 \cdot \frac{\pi pV}{4} - pV = \frac{(\pi - 2)pV}{2}.$$

Чтобы найти количество теплоты, полученное газом от нагревателя, применяем к процессу расширения газа $1 \to 2$ (а именно в этом процессе газ получает тепло) первый закон термодинамики:

$$Q = \frac{3}{2} R \Delta T_{1\to 2} + A_{1\to 2},$$

где $\Delta T_{1\to 2}$ – изменение температуры газа в процессе $1 \to 2$; $A_{1\to 2}$ – работа газа в этом процессе. Используя далее закон Клапейрона–Менделеева и находя работу газа $A_{1\to 2}$ как площадь под графиком этого процесса, получим

$$Q = \frac{(22+\pi) pV}{4}.$$

Отсюда находим КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{2(\pi - 2)}{\pi + 22} = 0,091.$$

5. Мысленно разобьем сплошной заряженный параллелепипед на тонкие слои толщиной Δa без «верхней» грани (из-за того, что высота параллелепипеда вдвое меньше двух других размеров, это можно сделать, причем слои будут иметь всюду одинаковую толщину). Заряд такого слоя представляющего тонкостенный параллелепипед с размерами $x \times x \times x/2$ находится из очевидных соотношений (у такой коробки есть четыре боковых стенки с площадью $x^2/2$ и дно с площадью x^2)

$$\Delta q = \rho \Delta V = \rho\left(4x(x/2)\Delta a + x^2 \Delta a\right) = 3\rho x^2 \Delta a.$$

А поскольку площадь поверхности слоя равна $4x(x/2) + x^2 = 3x^2$, то поверхностная плотность заряда каждого слоя определяется соотношением

$$\sigma = \rho \Delta a. \qquad (*)$$

Очевидно, что поле каждого слоя в точке A одинаково и по величине и по направлению. Действительно, при изменении размеров слоя изменятся расстояния от каждого его элемента до точки A, но изменятся и их заряды из-за изменения площади элемента, что компенсирует согласно закону Кулона изменение расстояний. Поэтому поле E «целого» заряженного параллелепипеда в точке A так

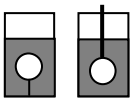
связано с полем одного тонкостенного параллелепипеда в этой точке ΔE: $E = N\Delta E$, где $N = a/2\Delta a$ – количество слоев, на который разбит «целый» параллелепипед. С другой стороны, из (*) имеем

$$N = \frac{a}{2\Delta a} = \frac{a\rho}{2\sigma}$$

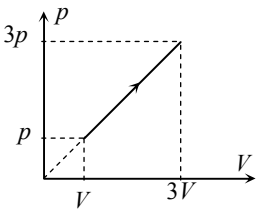
Отсюда находим поле любого (и, в частности, того, о котором говорится в условии) слоя

$$\Delta E = \frac{E}{N} = \frac{2\sigma}{\rho a} E .$$

3.1.6. Олимпиада имени академика И.В. Курчатова, 10 класс



1. В стакане с водой, стоящем на одной чаше весов, находится тело, масса которого в восемь раз меньше массы стакана с водой, а плотность в два раза меньше плотности воды. Найти отношение масс гирей, которыми уравновешивается стакан в случае, когда тело удерживается в толще воды нитью, прикрепленной ко дну сосуда, и когда тело удерживают в толще воды тонким стержнем, другой конец которого держат в руке.



2. На рисунке приведен график зависимости давления от объема для некоторого процесса, происходящего с идеальным газом. Построить график зависимости давления от температуры для этого процесса.

3. На двух эскалаторах, один из которых движется вниз, а другой вверх с одинаковой скоростью, стоят два пассажира. В тот момент, когда пассажиры поравнялись друг с другом (это произошло посередине эскалатора), они побежали с одинаковыми и постоянными ускорениями a, направленными вниз, и нулевыми начальными скоростями относительно эскалаторов. Первый спустился на Δt быстрее второго. Найти скорость эскалаторов.

4. Нагретое до температуры $t_0 = 100$ °C тело опустили в сосуд с водой, при этом температура воды повысилась от температуры

$t_1 = 20$ °C до температуры $t_2 = 30$ °C. Какой станет температура воды в сосуде, если в него опустить еще три таких же тела? Теплопотерями пренебречь.

5. На горизонтальном столе вдоль одной прямой лежат, не соприкасаясь друг с другом, n шаров, массы которых равны m, $m/2$, $m/4$, …, $m/2^{n-1}$. На первый шар налетает со скоростью v_0, параллельной той же прямой, шар массой $2m$. Найти скорость последнего шара. Все столкновения шаров упругие и «лобовые».

Ответы и решения

1. Очевидно, что в первом случае сила, с которой сосуд действует на чашу весов, равна сумме сил тяжести стакана, воды и груза. Действительно, поскольку все тела (стакан, вода и тело) находятся в покое, то сумма внешних сил, действующая на систему тел, должна быть равна нулю. Внешними являются сумма сил тяжести и сила реакции со стороны чаши весов, которая, следовательно, и равна сумме сил тяжести стакана, воды и груза

$$F_1 = (8m + m)g = 9mg\ ,$$

где $8m$ – масса стакана с водой; m – масса тела. Во втором случае возникает еще одна внешняя сила – сила реакции стержня, направленная вниз. Эта сила равна разности силы Архимеда и силы тяжести тела. Поскольку плотность тела вдвое меньше плотности жидкости, то сила Архимеда, действующая на тело при его полном погружении в жидкость, вдвое превосходит силу тяжести. Тогда

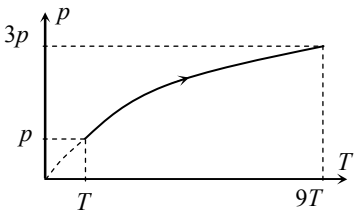
$$F_3 = 9mg + (2mg - mg) = 10mg\ .$$

Поэтому $F_1 : F_2 = 9:10$. Таким же будет и отношение масс грузов, которые нужно положить на вторую чашу весов в этих случаях.

2. Для рассматриваемого процесса имеем

$$p = \alpha V\ ,$$

где α – постоянная. Поэтому из закона Клапейрона–Менделеева имеем



$$p = \beta\sqrt{T}\ ,$$

где $\beta = \sqrt{\alpha\nu R}$ – постоянная. График этой зависимости приведен на рисунке. На графике учтено, что температура меняется в рассматриваемом процессе в 9 раз.

3. Первый пассажир сразу будет двигаться вниз, второй – начнет двигаться вверх (относительно земли), затем повернет и будет двигаться вниз. Очевидно, время задержки спуска второго пассажира по сравнению с первым равно тому времени, через которое второй окажется снова в той точке (в системе отсчета, связанной с землей), откуда они начали движение. Действительно, второй пассажир, находясь в ней, будет в этот момент иметь такую же скорость относительно земли и ускорение, что и первый, и, следовательно, в точности повторит движение первого. А время возвращения в ту же точку можно найти так же, как и время возвращения на землю тела, брошенного вертикально вверх:

$$\Delta t = \frac{2v_0}{a}\ .$$

Отсюда

$$v_0 = \frac{a\Delta t}{2}\ .$$

4. Пусть теплоемкость сосуда равна C_0, тела – C_1. Тогда закон теплового баланса для первого процесса дает

$$C_0(t_2 - t_1) = C_1(t_0 - t_2)\ .$$

Отсюда находим отношение теплоемкостей сосуда и тела

$$\frac{C_0}{C_1} = \frac{(t_0 - t_2)}{(t_2 - t_1)} = 7\ .$$

Теперь рассмотрим случай, когда в сосуд, температура которого равна t_2 и в котором уже лежит одно тело, опускают еще три таких же тела. Поскольку теплоемкость сосуда с телом равна $C_0 + C_1$, а трех тел – $3C_1$, то условие теплового баланса имеет вид

$$(C_0 + C_1)(t_x - t_2) = 3C_1(t_0 - t_x)\ ,$$

где t_x – искомая температура. Разделив эту формулу на C_1, получим

$$\frac{1}{3}\left(\frac{C_0}{C_1}+1\right)(t_x-t_2)=t_0-t_x. \qquad (*)$$

Подставляя в формулу (*) отношение теплоемкостей, находим (решать удобнее «в числах»; буквенный ответ будет очень громоздким)

$$t_x = 49\ ^\circ\mathrm{C}.$$

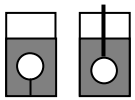
5. Из закона сохранения энергии импульса следует, что после упругого лобового столкновения шара массой m, движущегося со скоростью v_0, с покоящимся шаром массой $m/2$ скорость последнего будет равна

$$v_1=\frac{4}{3}v_0.$$

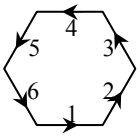
У нас столкновений будет n, причем в каждом масса налетающего шара вдвое больше массы покоящегося. Поэтому скорость последнего шара будет равна

$$v_n=\left(\frac{4}{3}\right)^n v_0.$$

3.1.7. Олимпиада имени академика И.В. Курчатова, 11 класс

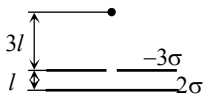


1. В стакане с водой, стоящем на одной чаше весов, находится тело, масса которого в восемь раз меньше массы стакана с водой, а плотность в два раза меньше плотности воды. Найти отношение масс гирей, которыми уравновешивается стакан в случае, когда тело удерживается в толще воды нитью, прикрепленной ко дну сосуда, и когда тело удерживают в толще воды тонким стержнем, другой конец которого держат в руке.



2. Шестиугольник с током находится в однородном магнитном поле, индукция которого лежит в плоскости шестиугольника. Известно, что силы, действующие со стороны поля на стороны 1 и 2, одинаковы по величине (и равны F). Найти силу, действующую со стороны поля на сторону 3.

3. На двух эскалаторах, один из которых движется вниз, а другой вверх с одинаковой скоростью, стоят два пассажира. В тот момент, когда пассажиры поравнялись друг с другом (это произошло посередине эскалатора), они побежали с одинаковыми и постоянными ускорениями a, направленными вниз, и нулевыми начальными скоростями относительно эскалаторов. Первый спустился на Δt быстрее второго. Найти скорость эскалаторов.



4. Имеются две параллельные заряженные пластины с поверхностной плотностью зарядов -3σ и 2σ ($\sigma > 0$), расстояние между которыми l. В одной пластине сделано малое отверстие. На расстоянии $3l$ от пластин напротив отверстия удерживают точечное тело с зарядом q и массой m ($q > 0$). Тело отпускают. Достигнет ли тело пластины с зарядом 2σ и если да, то какую скорость оно будет иметь около этой пластины? А если нет, то на каком расстоянии от нее остановится? Краевыми эффектами пренебречь.

5. Если привести жидкость A с температурой $t_1 = 100$ °C в тепловой контакт с жидкостью B той же массы и той же теплоемкости с температурой $t_2 = 20$ °C, то жидкость B можно нагреть до температуры 60 °C. А можно ли всю жидкость B нагреть до большей температуры за счет внутренней энергии жидкости A, если теплообмен осуществлять между частями жидкостей? Предложить стратегию нагревания, которая позволила бы максимально нагреть всю жидкость B. До какой максимальной температуры ее можно нагреть?

Указание. При больших N справедливо равенство:

$$(1+1/N)^N = e, \text{ где } e \approx 2,71.$$

Ответы и решения

1. Очевидно, что в первом случае сила, с которой сосуд действует на чашу весов, равна сумме сил тяжести стакана, воды и груза. Действительно, поскольку все тела (стакан, вода и тело) находятся в покое, то сумма внешних сил, действующая на систему тел, должна быть равна нулю. Внешними являются сумма сил тяжести

и сила реакции со стороны чаши весов, которая, следовательно, и равна сумме сил тяжести стакана, воды и груза

$$F_1 = (8m + m)g = 9mg ,$$

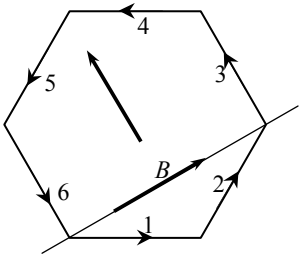
где $8m$ – масса стакана с водой; m – масса тела. Во втором случае возникает еще одна внешняя сила – сила реакции стержня, направленная вниз. Эта сила равна разности силы Архимеда и силы тяжести тела. Поскольку плотность тела вдвое меньше плотности жидкости, то сила Архимеда, действующая на тело при его полном погружении в жидкость, вдвое превосходит силу тяжести. Тогда

$$F_3 = 9mg + (2mg - mg) = 10mg .$$

Поэтому $F_1 : F_2 = 9:10$. Таким же будет и отношение масс грузов, которые нужно положить на вторую чашу весов в этих случаях.

2. Со стороны однородного магнитного поля на проводник с током действует сила Ампера, равная

$$F = BIl\sin\alpha ,$$



где B – индукция магнитного поля; I – ток в проводнике; l – его длина; α – угол между проводником и индукцией. Чтобы силы, действующие со стороны поля на стороны 1 и 2, были равны по величине, возможны два варианта направления индукции магнитного поля (см. рисунок). При этом в одном случае угол между индукцией и сторонами 1 и 2 равен $30°$, а между индукцией и стороной 3 – $90°$. Поэтому сила Ампера, действующая на сторону 3, равна

$$F_3 = BIl\sin 30° \frac{\sin 90°}{\sin 30°} = 2F .$$

Во втором случае $F_3 = 0$. Итак, возможны два ответа: $F_3 = 2F$ и $F_3 = 0$.

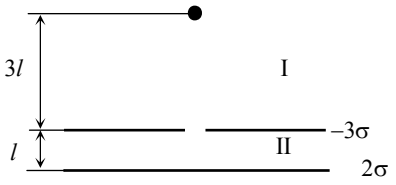
3. Первый пассажир сразу будет двигаться вниз, второй – начнет двигаться вверх (относительно земли), затем повернет и будет двигаться вниз. Очевидно, время задержки спуска второго пассажира по сравнению с первым равно тому времени, через которое второй окажется снова в той точке (в системе отсчета, связанной с землей),

откуда они начали движение. Действительно, второй пассажир, находясь в ней, будет в этот момент иметь такую же скорость относительно земли и ускорение, что и первый, и, следовательно, в точности повторит движение первого. А время возвращения в ту же точку можно найти так же, как и время возвращения на землю тела, брошенного вертикально вверх

$$\Delta t = \frac{2v_0}{a}.$$

Отсюда

$$v_0 = \frac{a\Delta t}{2}.$$



4. Электрическое поле в любой точке пространства создается зарядами обеих пластин. По принципу суперпозиции находим напряженность поля в областях I и II.

В области I: $E_I = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, направлено к верхней пластине (вниз на рисунке).

В области II: $E_{II} = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{5\sigma}{2\varepsilon_0}$, направлено к верхней пластине (вверх на рисунке).

Поэтому работа поля над положительным зарядом q при его движении до нижней пластины равна

$$A = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} 3l - \frac{q5\sigma}{2\varepsilon_0} l = -\frac{q\sigma l}{\varepsilon_0} < 0. \qquad (*)$$

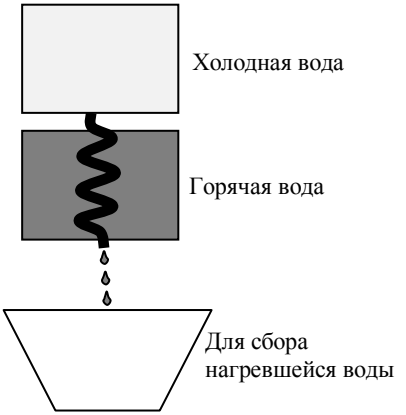
Поскольку работа (*) отрицательна, заряд q не достигнет нижней пластины. Точку его остановки найдем по теореме об изменении кинетической энергии – при нулевой начальной и конечной скорости заряда работа поля до точки остановки равна нулю:

$$0 = A = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} 3l - \frac{q5\sigma}{2\varepsilon_0}(l - x), \qquad (**)$$

где x – расстояние от точки остановки до нижней пластины. Из (**) находим

$$x = \frac{2l}{5}.$$

5. Если пропускать холодную жидкость небольшими порциями по трубке, проходящей через горячую жидкость (по «змеевику», см. рисунок), то горячая охладится сильнее, чем при контакте всей массы горячей и холодной жидкостей. Это связано с тем, что горячая жидкость будет всегда контактировать с холодной, а отдача тепла пропорциональна разности температур. Найдем температуру, до которой охладилась в этом случае горячая жидкость. Пусть каждая порция холодной жидкости, проходящая через змеевик, имеет массу Δm, масса и холодной и горячей воды m ($\Delta m / m = N$; максимальному нагреву холодной воды отвечает $N \to \infty$). Найдем, на сколько охладилась горячая жидкость.



Уравнение теплового баланса при пропускании первой порции жидкости имеет вид

$$c\Delta m(T_1 - T_\text{х}) = cm(T_\text{г} - T_1),$$

где $T_\text{х}$, $T_\text{г}$ и T_1 – исходные температуры горячей и холодной жидкости и температура, которую будет иметь первая порция холодной жидкости и горячая жидкость после теплового контакта; c – удельная теплоемкость жидкостей (по условию – одинаковая). Отсюда найдем

$$T_1 = \frac{N}{1+N}T_\text{г} + \frac{1}{1+N}T_\text{х}, \qquad (*)$$

где $N = \dfrac{\Delta m}{m}$ – количество порций холодной жидкости, которые пропускались по змеевику через горячую. Температуру горячей

жидкости после пропускания через нее второй порции холодной T_2 можно найти по формуле (*), если в ней сделать замену $T_г \to T_1$:

$$T_2 = \frac{N}{1+N}\left(\frac{N}{1+N}T_г + \frac{1}{1+N}T_х\right) + \frac{1}{1+N}T_х =$$

$$= \left(\frac{N}{1+N}\right)^2 T_г + \left(\frac{1}{1+N} + \frac{N}{(1+N)^2}\right)T_х . \qquad (*)$$

Очевидно, что после сообщения N-й порции температура горячей жидкости может быть найдена по формуле

$$T_N = \left(\frac{N}{1+N}\right)^N T_г + \left(\frac{1}{1+N} + \frac{N}{(1+N)^2} + \ldots + \frac{N^{N-1}}{(1+N)^N}\right)T_х . \qquad (**)$$

При $N \to \infty$ первое слагаемое даст

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^N}T_г = \frac{T_г}{e},$$

где $e \approx 2,71$ – основание натуральных логарифмов. Второе слагаемое (**) сводится к сумме конечной геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{N}{1+N}$:

$$\frac{1}{1+N}\left(1 + \frac{N}{N+1} + \left(\frac{N}{N+1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{N}{N+1}\right)^{N-1}\right)T_х$$

Используя формулу для суммы $N-1$ членов геометрической прогрессии, получим

$$\frac{1}{1+N}\frac{1-\left(\frac{N}{N+1}\right)^{N-1}}{1-\frac{N}{N+1}}T_х = \left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N-1}}\right)T_х \approx$$

$$\approx \left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{N}\right)^N}\right)T_{\text{х}} = \left(1-\frac{1}{e}\right)T_{\text{х}}. \qquad (***)$$

Из (**) и (***) получаем температуру горячей жидкости после пропускания через нее N порций ($N \to \infty$) холодной:

$$T_N = \frac{T_{\text{г}}}{e} + \left(1-\frac{1}{e}\right)T_{\text{х}} = \frac{T_{\text{г}} + (e-1)T_{\text{х}}}{e}.$$

Температуру холодной жидкости найдем теперь по уравнению теплового баланса, примененного ко всему процессу:

$$cm(T - T_{\text{х}}) = cm(T_{\text{г}} - T_N).$$

Отсюда

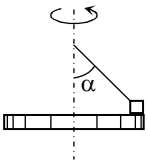
$$T = \frac{T_{\text{г}}(e-1) + T_{\text{х}}}{e}.$$

Для данных условия находим

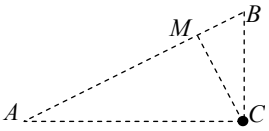
$$T = 70{,}5 \ ^\circ\text{C}.$$

3.1.8. Очные отборочные туры в регионах, 11 класс, комплект 1

1. На краю горизонтального диска находится тело массой m, привязанное нитью длиной l к оси диска. Нить составляет угол α с осью диска. Диск вращается вокруг своей оси, при этом тело вращается вместе с ним. При какой угловой скорости тело оторвется от диска?

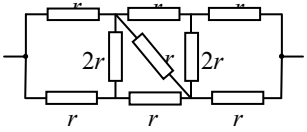


2. Точечный заряд, расположенный в точке C, создает в точках A и B поле с потенциалом φ_A и φ_B соответственно (см. рисунок; угол ACB – прямой). Найти потенциал электрического поля в точке M, являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB.



3. На тело, движущееся со скоростью v, начинает действовать постоянная сила. Через некоторое время после начала действия силы скорость тела становится перпендикулярной вектору начальной скорости тела и равной по величине $3v/2$. Какой будет величина скорости тела еще через такой же интервал времени?

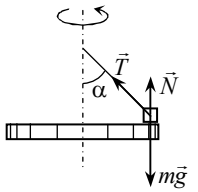
4. Некоторое количество сухого льда CO_2 положили в воздушный шарик (масса шарика $m = 10$ г). Лед нагрелся до комнатной температуры и испарился. После этого шарик взвесили, его вес оказался равным $10mg$. Найти массу льда. Молярная масса воздуха $\mu_в = 29$ г/моль, молярная масса сухого льда $\mu_{CO_2} = 44$ г/моль. Считать, что упругость оболочки шара равна нулю.



5. Найти сопротивление данной электрической цепи. Значения сопротивлений элементов цепи приведены на рисунке.

Ответы и решения

1. На тело, вращающееся вместе с диском, действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$ (см. рисунок). Проецируя второй закон Ньютона для тела



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}$$

на вертикальную и горизонтальную оси и используя тот факт, что ускорение тела направлено к центру окружности, по которой оно вращается, и равно $\omega^2 l \sin\alpha$, получим

$$m\omega^2 l \sin\alpha = T\sin\alpha;$$
$$0 = N + T\cos\alpha - mg.$$

Отсюда находим:

$$N = mg - m\omega^2 l\cos\alpha\,. \qquad (*)$$

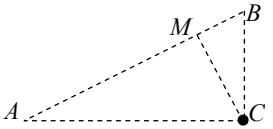
Тело отрывается от поверхности диска, когда сила реакции (*) становится равной нулю. Поэтому из (*) находим угловую скорость диска, при которой тело отрывается от его поверхности:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}\,.$$

2. Пусть $AC = a$, $BC = b$. Тогда

$$\varphi_A = \frac{kq}{a}, \qquad \varphi_B = \frac{kq}{b},$$

где q – величина заряда; k – постоянная закона Кулона. Из подобия треугольников ABC и MBC получаем



$$\frac{MC}{b} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

или

$$MC = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}\,.$$

Отсюда находим

$$\varphi_M = \frac{kq}{MC} = kq\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \sqrt{\varphi_A^2 + \varphi_B^2}\,.$$

3. По второму закону Ньютона вектор изменения импульса тела связан с импульсом силы

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t\,, \qquad (*)$$

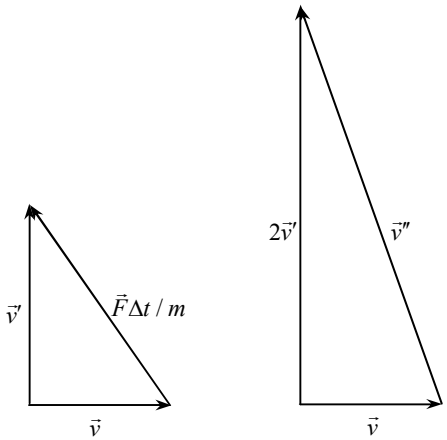
где $\vec{F}$ – действующая сила; Δt – время ее действия. Из закона (*) находим вектор $\vec{F}\Delta t / m$ (m – масса тела, см. левый рисунок)

$$\vec{F}\Delta t / m = \vec{v}' - \vec{v}\,, \qquad (**)$$

где $\vec{v}'$ – вектор скорости тела после действия силы в течение времени Δt ($\vec{v}'$ перпендикулярен $\vec{v}$, и $|\vec{v}'| = 3v/2$). Поскольку сила, действующая на тело, не изменяется, то скорость тела спустя еще интервал времени Δt можно найти из второго закона Ньютона

$$\vec{v}'' = \vec{v}' + \vec{F}\Delta t / m \qquad (***)$$

с $\vec{F}\Delta t / m$ из (**). Подставляя (**) в (***), находим $\vec{v}'' = 2\vec{v}' - \vec{v}$ (правый рисунок).



В результате по теореме Пифагора находим

$$v'' = \sqrt{4v'^2 + v^2} = \sqrt{10}v .$$

4. По закону Архимеда после испарения сухого льда весы показывают

$$10mg = (m + M)g - \rho_{\text{в}} gV ,$$

где M – масса льда; $\rho_{\text{в}}$ – плотность окружающего воздуха; V – объем шарика с испарившимся сухим льдом. А поскольку произведение $\rho_{\text{в}} V$ есть масса воздуха в объеме воздушного шара $m_{\text{в}}$, из последнего соотношения получим

$$m_{\text{в}} = M - 9m .$$

Из закона Клапейрона-Менделеева для воздуха в объеме шара и сухого льда при условии одинаковости их температур и давлений имеем

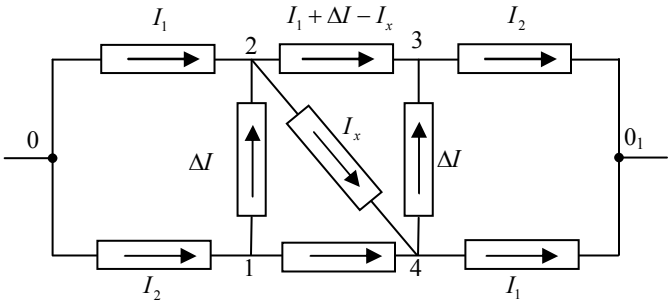
$$\frac{m_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}} = \frac{M}{\mu_{CO_2}} .$$

Отсюда находим

$$9m = M\left(1 - \frac{\mu_{\text{в}}}{\mu_{CO_2}}\right),$$

или

$$M = \frac{9m\mu_{CO_2}}{\mu_{CO_2} - \mu_в} = 264 \text{ г.}$$



5. Очевидно, что цепь обладает значительной симметрией – при изменении направлений всех токов мы, с одной стороны, должны получить ту же цепь, с другой, поменять местами верх и низ цепи. Это позволяет приписать токи каждому участку цепи так, как это показано на рисунке (пусть ток в цепи течет слева направо). Направление токов ΔI и I_x выбрано условно – если в результате расчетов окажется, что эти токи отрицательны, то их направление противоположно. При определении токов использовались правила токов в вершинах 1 и 2 (сумма втекающих токов равна сумме вытекающих). Используя теперь правило токов в вершине 3, получим очевидное соотношение

$$I_1 + 2\Delta I - I_x = I_2 . \qquad (1)$$

Используем теперь правило напряжений для замкнутых контуров 0-2-1-0 и 2-4-1-2 (сумма напряжений на всех элементах этих контуров должна равняться нулю; напряжение считается положительным, если обход идет по току, и отрицательным в противном случае). С учетом (1) получим

$$\begin{gathered} I_1 r - \Delta I 2r - I_2 r = 0; \\ (I_1 + 2\Delta I - I_2)r - (I_2 - \Delta I)r + \Delta I 2r = 0, \end{gathered} \qquad (2)$$

или

$$\begin{gathered} I_1 - 2\Delta I = I_2; \\ I_1 + 5\Delta I = 2I_2. \end{gathered} \qquad (3)$$

Вычитая первое уравнение из второго, получим

$$\Delta I = \frac{1}{7} I_2, \qquad I_1 = \frac{9}{7} I_2. \tag{4}$$

Пусть в цепи течет ток I. Поскольку в узле 0 он делится на I_1 и I_2 в пропорции (4), находим

$$I_1 = \frac{9}{16} I, \qquad I_2 = \frac{7}{16} I, \qquad \Delta I = \frac{1}{16} I.$$

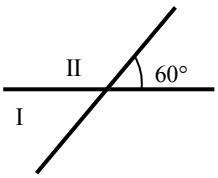
Теперь легко найти падение напряжение на цепи (используя, например, нижний ее участок 0-1-4-0_1)

$$U = I_2 r + (I_2 - \Delta I) r + I_1 r = \frac{7Ir}{16} + \frac{6Ir}{16} + \frac{9Ir}{16} = \frac{11}{8} Ir.$$

Отсюда находим общее сопротивление цепи

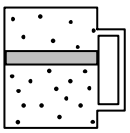
$$R = \frac{11r}{8}.$$

3.1.9. Очные отборочные туры в регионах, 11 класс, комплект 2



1. Две большие одинаковые плоскости, равномерно заряженные одинаковыми зарядами, расположены так, что угол между ними составляет $60°$. Найти отношение величин напряженности электрического поля в области I и II. Краевыми эффектами пренебречь.

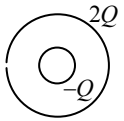
2. Тело, двигаясь с постоянным ускорением из состояния покоя, прошло путь S за время τ. Какую скорость имело тело в тот момент, когда оно прошло пятую часть этого расстояния?



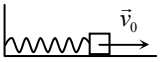
3. Вертикальный цилиндрический сосуд разделен подвижным поршнем массой m и площадью S на два отсека. Под действием силы тяжести поршень медленно опускается. При этом давления газа в сосуде остаются неизменными, что обеспечивается перетеканием

газа по трубке малого объема. Температуры газа в отсеках поддерживаются постоянными: T – в верхнем и $1{,}2T$ – в нижнем. Найти давление газа в отсеках.

4. Две закрепленные концентрические сферы радиусов R и $2R$ заряжены зарядами $-Q$ и $2Q$ соответственно (см. рисунок). В большой сфере сделано маленькое отверстие. На расстоянии $3R$ от центра сфер напротив отверстия удерживают точечный заряд $-Q$, имеющий массу m. Заряд $-Q$ отпускают. Долетит ли этот заряд до меньшей сферы и если да, то какую скорость будет иметь около нее? А если нет, то на каком расстоянии от центра он остановится?



5. К горизонтально расположенной пружине с жесткостью k привязано тело массой m, находящееся на шероховатой горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между телом и поверхностью – μ. Второй конец пружины прикреплен к вертикальной стенке. В начальный момент времени тело находится в положении, в котором пружина не деформирована. Телу толчком сообщают скорость v_0. Через какое время тело остановится во второй раз?



Ответы и решения

1. Поле внутри каждой области определяется суммой полей, созданных каждой пластиной. Векторы напряженности поля каждой пластины $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ показаны на рисунке (при условии, что заряды пластин положительны; если они отрицательны, направление всех векторов изменится на противоположное, величины полей при этом не изменятся). Величины полей равны

$$E_1 = E_2 = E = \frac{Q}{2S\varepsilon_0},$$

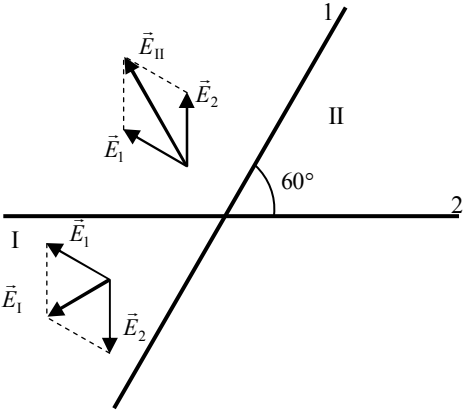
где Q – заряд пластин; S – площадь. Из рисунка заключаем, что в области I угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ равен $120°$, в области II – $60°$. Поэтому напряженность суммарного поля (векторы показаны на рисунке жирными стрелками) равна:

в области I

$$E_{\text{I}} = E\,;$$

в области II

$$E_{\text{II}} = 2E\cos 30^\circ = E\sqrt{3}\,.$$



Поэтому

$$\frac{E_{\text{I}}}{E_{\text{II}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

2. Из законов равноускоренного движения имеем

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{at^2}{2}; \\ v_x(t) = at. \end{cases} \qquad (*)$$

Подставляя в первую формулу время τ, находим ускорение тела

$$a = \frac{2S}{\tau^2}\,. \qquad (**)$$

Применяя теперь зависимости (*) к точке, лежащей на расстоянии $S/5$ от начальной, получим

$$\begin{cases} \dfrac{S}{5} = \dfrac{at_1^2}{2}; \\ v = at_1, \end{cases}$$

где t_1 – время движения до этой точки. Выражая теперь время из первого уравнения, подставляя его во второе и используя ускорение (**), найдем

$$v = \frac{2S}{\sqrt{5}\tau}.$$

3. Поскольку поршень движется медленно, то он в любой момент времени находится в равновесии. Поэтому

$$mg = \left(p_{\text{н}} - p_{\text{в}}\right)S, \qquad (*)$$

где $p_{\text{н}}$ и $p_{\text{в}}$ – давления газа снизу и сверху от поршня; S – площадь сосуда. Поскольку давления и температуры газов над и под поршнем не изменяются, то не изменяются и концентрации газов. А поскольку изменения объемов верхнего и нижнего отсеков одинаковы по величине, и все молекулы из нижнего отсека переходят в верхний, то концентрации газов над и под поршнем одинаковы. Используя далее основное уравнение молекулярно-кинетической теории – МКТ ($p = nkT$, где n – концентрация молекул газа; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура), получим из (*)

$$n = \frac{mg}{kS\left(T_{\text{н}} - T_{\text{в}}\right)} = \frac{mg}{0{,}2kST} = \frac{5mg}{kST}.$$

Теперь из основного уравнения МКТ находим давления:

$$p_{\text{н}} = nkT_{\text{н}} = \frac{5mgT_{\text{н}}}{ST} = \frac{6mg}{S}, \qquad p_{\text{в}} = nkT_{\text{в}} = \frac{5mgT_{\text{в}}}{ST} = \frac{5mg}{S}.$$

4. Находясь снаружи сфер, заряд $-Q$ будет притягиваться к ним и разгоняться. После влета в отверстие во внешней сфере заряд $-Q$ не будет взаимодействовать с ней, а будет отталкиваться от внутренней сферы и, следовательно, тормозиться. Чтобы понять, долетит ли заряд $-Q$ до поверхности внутренней сферы, найдем разность потенциальных энергий заряда $-Q$ в начальной точке П_1 и в точке на поверхности внутренней сферы П_2 – если она положительна, заряд $-Q$ долетит до внутренней сферы. Потенциалы начальной точки φ_1 и точки на поверхности внутренней сферы φ_2 найдем по принципу суперпозиции:

$$\varphi_1 = \frac{k2Q}{3R} + \frac{k(-Q)}{3R} = \frac{kQ}{3R}, \quad \varphi_2 = \frac{k2Q}{2R} + \frac{k(-Q)}{R} = 0.$$

Поэтому

$$\Pi_1 = (-Q)\varphi_1 = -\frac{kQ^2}{3R}, \quad \Pi_2 = (-Q)\varphi_2 = 0.$$

Отсюда $\Pi_1 - \Pi_2 < 0$, и, следовательно, заряд $-Q$ не долетит до поверхности внутренней сферы.

Точку, в которой заряд $-Q$ остановится, найдем из условия, что работа поля над зарядом при его перемещении до этой точки равна нулю. Имеем

$$0 = \varphi_1 - \varphi_0 = \frac{kQ}{3R} - \left(\frac{k2Q}{2R} + \frac{k(-Q)}{x} \right),$$

где x – расстояние от центра сфер до точки остановки заряда $-Q$, φ_0 – потенциал этой точки. Отсюда находим

$$x = \frac{3R}{2}.$$

5. Поскольку в процессе движения тела от одной точки остановки до другой на него действует постоянная сила трения, то такое движение аналогично колебаниям груза на пружине в поле силы тяжести. Другими словами, движение тела от одной точки остановки до другой представляет собой гармоническое колебание с той же частотой, с которой колеблется тело на этой же пружине в отсутствии силы тяжести, а положение равновесия сдвинуто на величину $\mu mg / k$ в направлении действия силы трения (но в течение нескольких полупериодов движение не является гармоническим колебанием из-за изменения направления силы трения). Поэтому зависимость координаты от времени от начального толчка до точки остановки имеет вид

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \qquad (*)$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$, а постоянные определяются начальными условиями $x(t=0) = \mu mg / k$, $v_x(t=0) = v_0$. Из начальных условий находим

$$A = \frac{\mu mg}{k}, \quad B = \frac{v_0}{\omega}. \qquad (**)$$

Из условия (*) с учетом (**) находим зависимость скорости тела от времени

$$v_x(t) = -\frac{\mu mg}{k}\omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t. \qquad (***)$$

Из (***) находим время от толчка до первой остановки

$$\operatorname{tg} \omega t_1 = \frac{v_0 k}{\mu mg \omega} = \frac{v_0 \omega}{\mu g}, \qquad t_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0 \omega}{\mu g}\right).$$

А поскольку время движения от одной точки остановки до другой равно полупериоду, то время движения от толчка до второй остановки определяется соотношением

$$\tau = t_1 + \frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0 \omega}{\mu g}\right) + \frac{\pi}{\omega}.$$

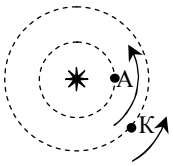
3.2. Заключительные туры

3.2.1. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 7 класс

1. Сосуд объемом $V = 1000$ см^3 на три четверти заполнен водой. Когда в сосуд погрузили кусок меди, уровень воды поднялся, и часть воды объемом $V_0 = 100$ см^3 вылилась через край. Найти массу куска меди. Плотность меди $\rho = 8,9$ г/см^3.

2. При измерении давления в озере были обнаружены следующие результаты. Давление на расстоянии $h = 5$ м от дна в $n = 3$ раза больше давления на глубине $h = 5$ м. Найти глубину озера. Атмосферным давлением пренебречь.

3. Две машины выехали одновременно навстречу друг другу из городов A и B. Машины встретились на расстоянии l от A, затем доехали до городов B и A, развернулись и поехали назад. Вторая встреча машин произошла на расстоянии $3l/4$ от города B. Найти расстояние AB. Скорости машин постоянны.



4. В планетной системе вокруг звезды в одной плоскости и в одну сторону вращаются планеты Атлант и Кариатида. Между двумя ближайшими моментами времени, когда звезда, Атлант и Кариатида находятся на одной прямой, проходит 2,2 кариатидных лет. Сколько атлантских лет проходит между этими моментами?

Указание. Период обращения (год) – время, за которое планета совершает полный оборот вокруг звезды.

5. Жук ползет по ребрам куба, поворачивая лишь в его вершинах. Возможна ли такая ситуация, когда в одной из вершин жук побывал 20 раз, а во всех остальных – по 22 раза. Ответ обосновать.

Ответы и решения

1. Объем куска меди равен объему вытесненной воды. А этот объем равен

$$\frac{1}{4}V + V_0 .$$

Поэтому масса меди равна

$$m = \rho\left(\frac{1}{4}V + V_0\right) = 3{,}12 \text{ кг}.$$

2. Глубину озера можно найти из следующей цепочки равенств:

$$\frac{\rho g\left(H - h\right)}{\rho g h} = n \quad \Rightarrow \quad H = (n+1)h = 20 \text{ м}.$$

3. Пусть расстояние AB равно x. Тогда, очевидно, что сумма расстояний, пройденных машинами до первой встречи, равно x, а до второй встречи – $3x$. Действительно, до второй встречи каждая машина доедет до второго города (в сумме $2x$), и проедет расстояние от него до места встречи другой машиной. Поэтому, с одной стороны, машина, выехавшая из города A, пройдет до второй встречи расстояние $3l$, с другой – это расстояние равно расстоянию между городами плюс расстоянию от города B до точки второй встречи. Отсюда

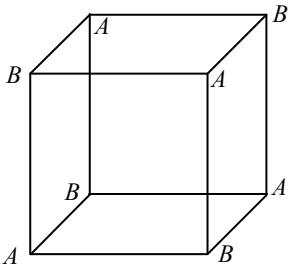
$$3l = x + \frac{3l}{4},$$

или

$$x = \frac{9l}{4}.$$

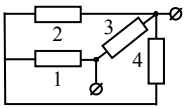
4. Очевидно, Атлант совершит один лишний оборот. Действительно, Кариатида совершит один оборот и еще 0,2 оборота, а Атлант, который вращается быстрее, должен сначала опередить Кариатиду, а затем догнать ее с другой стороны. Он может это сделать, совершив 0,2 дробных и 2 целых оборота. Поэтому он затратит на это 3,2 своих лет.

5. Обозначим все вершины куба буквами A или B (см. рисунок). Очевидно, что куда бы ни полз жук, после каждой вершины A он попадает в одну из вершин B. А это значит, что суммарное количество попаданий в вершины A и в вершины B может либо совпадать, либо отличаться на единицу. В данных условия задачи это количество отличается на 2, поэтому ситуация, указанная в условии, невозможна.



3.2.2. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 8 класс

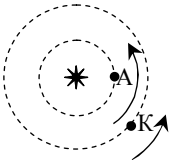
1. Из четырех одинаковых сопротивлений собрали электрическую цепь, приведенную на рисунке. Найти отношение мощности тока сопротивлении 2 и 3: $P_2 : P_3$.



2. Две машины выехали одновременно навстречу друг другу из городов A и B. Машины встретились на расстоянии l от A, затем доехали до городов B и A, развернулись и поехали назад. Вторая встреча машин произошла на расстоянии $3l/4$ от города B. Найти расстояние AB. Скорости машин постоянны.

3. В планетной системе вокруг звезды в одной плоскости и в одну сторону вращаются планеты Атлант и Кариатида. Между двумя

ближайшими моментами времени, когда звезда, Атлант и Кариатида находятся на одной прямой, проходит 2,2 кариатидных лет. Сколько атлантских лет проходит между этими моментами?



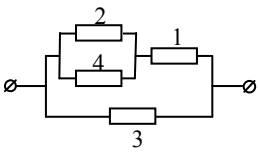
Указание. Период обращения (год) – время, за которое планета совершает полный оборот вокруг звезды.

4. На неравноплечих весах уравновешены два стакана. Расстояние между центрами стаканов равно l. Из одного стакана взяли массу воды m и перелили во второй. Если при этом опору весов передвинуть на $l/10$, то равновесие весов восстановится. Найти массу воды в обоих стаканах.

5. В сосуд с горячей водой массой $m = 0{,}5$ кг опустили работающий нагреватель. В результате температура воды повысилась на $\Delta T = 1$ °C за время $t_1 = 100$ с. Если бы воду не нагревали, то ее температура понизилась бы на ту же величину ΔT за время $t_2 = 200$ с. Какова мощность нагревателя? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг К), теплоемкостью сосуда пренебречь.

Ответы и решения

1. Очевидно, что данную цепь с помощью деформации проводов можно привести к виду



Сопротивление нижнего участка – r, верхнего – $3r/2$. Поэтому ток в верхнем участке (через сопротивление 1) будет составлять 2/3 от тока в нижнем. Между сопротивлениями 2 и 4 верхний ток поделится пополам. Поэтому ток через сопротивление 2 будет составлять 1/3 от тока через сопротивление 3. Поэтому по закону Джоуля–Ленца заключаем, что

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{1}{9} = 0{,}11.$$

2. Пусть расстояние AB равно x. Тогда, очевидно, что сумма расстояний, пройденных машинами до первой встречи, равно x, а до второй встречи – $3x$. Действительно, до второй встречи каждая машина доедет до второго города (в сумме $2x$) и проедет расстояние от него до места встречи другой машиной. Поэтому, с одной стороны, машина, выехавшая из города A, пройдет до второй встречи расстояние $3l$, с другой – это расстояние равно расстоянию между городами плюс расстоянию от города B до точки второй встречи. Отсюда

$$3l = x + \frac{3l}{4},$$

или

$$x = \frac{9l}{4}.$$

3. Очевидно, Атлант совершит один лишний оборот. Действительно, Кариатида совершит один оборот и еще 0,2 оборота, а Атлант, который вращается быстрее, должен сначала опередить Кариатиду, а затем догнать ее с другой стороны. Он может это сделать, совершив 0,2 дробных и 2 целых оборота. Поэтому он затратит на это 3,2 своих лет.

4. Пусть масса воды в одном стакане – m_1, в другом – m_2, плечи весов равны l_1 и l_2. Тогда выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 &= l; \\ m_1 l_1 &= m_2 l_2. \end{aligned} \qquad (*)$$

После переливания воды из одного стакана в другой и передвижения опоры условие равновесия весов дает

$$(m_1 - m)(l_1 + \Delta l) = (m_2 + m)(l_2 - \Delta l),$$

где $\Delta l = l/10$ – величина сдвига опоры весов. Раскрывая в этом выражении скобки, получим, используя (*)

$$m_1 + m_2 = \frac{ml}{\Delta l} = 10m.$$

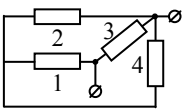
5. Поскольку при выключенном нагревателе вода остывает, нужно учитывать теплопотери. Пусть мощность нагревателя – P, а мощность теплопотерь (количество теплоты, теряемое в единицу времени) при рассматриваемой температуре – w. Тогда

$$\begin{aligned} Pt_1 &= cm\Delta T + wt_1; \\ cm\Delta T &= wt_2. \end{aligned} \qquad (*)$$

Решая систему уравнений (*), получим

$$P = \frac{cm\Delta T(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} = 31{,}5 \text{ Вт}.$$

3.2.3. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 9 класс



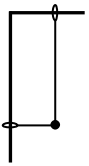
1. Из четырех одинаковых сопротивлений собрали электрическую цепь, приведенную на рисунке. Найти отношение мощности тока сопротивлении 1 и 3: $P_1 : P_3$.

2. Две машины выехали одновременно навстречу друг другу из городов A и B. Машины встретились на расстоянии l от A, затем доехали до городов B и A, развернулись и поехали назад. Вторая встреча машин произошла на расстоянии $3l/4$ от города B. Найти расстояние AB. Скорости машин постоянны.

3. Два тела, находятся в точках, расположенных на одной вертикали на некоторой высоте над поверхностью земли. Расстояние между этими точками $h = 100$ м. Тела одновременно бросают вертикально вверх: тело, которое находится ниже, – с начальной скоростью $2v_0$, второе – v_0 (v_0=10 м/с). В какой точке тела столкнутся? g =10 м/с^2.

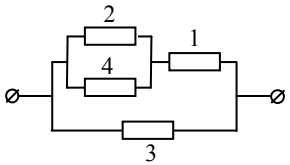
4. В сосуд с горячей водой массой $m = 0{,}5$ кг опустили работающий нагреватель. В результате температура воды повысилась на $\Delta T = 1$ °С за время $t_1 = 100$ с. Если бы воду не нагревали, то ее температура понизилась бы на ту же величину ΔT за время $t_2 = 200$ с. Какова мощность нагревателя? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг К), теплоемкостью сосуда пренебречь.

5. Два стержня соединены в форме буквы «Г». Один из стержней расположен горизонтально, другой – вертикально. На стержни надеты маленькие невесомые колечки, которые могут без трения перемещаться по стержням. К колечкам прикреплена невесомая нить. На нить надета массивная бусинка, которая может без трения перемещаться по нити. В начальный момент бусинку удерживают так, что нить натянута, длина ее горизонтального участка – l, вертикального – $2l$. Бусинку отпускают. Найти ее ускорение. Через какое время бусинка достигнет вертикального стержня?



Ответы и решения

1. Очевидно, что данную цепь с помощью деформации проводов можно привести к виду



Сопротивление нижнего участка – r, верхнего – $3r/2$. Поэтому ток в верхнем участке (через сопротивление 1) будет составлять 2/3 от тока в нижнем. Между сопротивлениями 2 и 4 верхний ток поделится пополам. Поэтому ток через сопротивление 2 будет составлять 1/3 от тока через сопротивление 3. Поэтому по закону Джоуля–Ленца заключаем, что

$$\frac{P_2}{P_3}=\frac{1}{9}=0{,}11.$$

2. Пусть расстояние AB равно x. Тогда, очевидно, что сумма расстояний, пройденных машинами до первой встречи, равна x, а до второй встречи – $3x$. Действительно, до второй встречи каждая машина доедет до второго города (в сумме $2x$) и проедет расстояние от него до места встречи другой машиной. Поэтому, с одной

стороны, машина, выехавшая из города A, пройдет до второй встречи расстояние $3l$, с другой – это расстояние равно расстоянию между городами плюс расстоянию от города B до точки второй встречи. Отсюда

$$3l = x + \frac{3l}{4},$$

или

$$x = \frac{9l}{4}.$$

3. Законы движения тел в системе координат, начало которой совпадает с начальным положением нижнего тела, ось x направлена вертикально вверх, дают

$$x_1(t) = 3v_0 t - \frac{gt^2}{2};$$

$$x_2(t) = l + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент столкновения тел τ их координаты совпадут, поэтому

$$3v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2} = l + v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2}.$$

Откуда находим время столкновения

$$\tau = \frac{l}{2v_0}$$

и координату точки столкновения

$$x = l - \frac{gl^2}{8v_0^2} = -25 \text{ м}.$$

Знак «–» означает, что встреча тел произойдет ниже начального положения нижнего тела.

4. Поскольку при выключенном нагревателе вода остывает, нужно учитывать теплопотери. Пусть мощность нагревателя – P, а мощность теплопотерь (количество теплоты, теряемое в единицу времени) при рассматриваемой температуре – w. Тогда

$$Pt_1 = cm\Delta T + wt_1;$$
$$cm\Delta T = wt_2. \qquad (*)$$

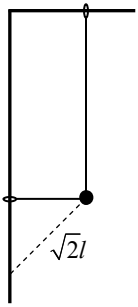
Решая систему уравнений (*), получим

$$P = \frac{cm\Delta T(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} = 31{,}5 \text{ Вт}.$$

5. Так как кольца невесомы и нет трения, то нить в процессе движения бусинки будет перпендикулярна стержням (достаточно бесконечно малой силы, чтобы их перемещать). Пусть длина вертикального участка нити – y, горизонтального – x. Тогда $x + y = 3l$. А это значит, что в системе координат, оси которой совпадают со спицами, траектория бусинки описывается функцией

$$y = -x + 3l,$$

т.е. направлена под углом $45°$ к горизонту и пересекает вертикальную спицу на расстоянии $3l$ от точки их соединения (см. рисунок; траектория бусинки показана пунктиром, ее длина $\sqrt{2}l$).



Найдем ускорение бусинки. На бусинку действуют две силы – натяжения и тяжести. Но поскольку сумма сил натяжения перпендикулярна траектории, то ускорение бусинки равно проекции ускорения свободного падения на направление траектории, т.е.

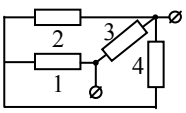
$$a = \frac{\sqrt{2}g}{2}.$$

Поэтому

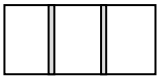
$$\sqrt{2}l = \frac{\sqrt{2}gt^2}{4} \quad \Rightarrow \quad t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

3.2.4. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс

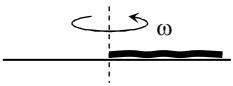
1. Из четырех одинаковых сопротивлений собрали электрическую цепь, приведенную на рисунке. Найти отношение мощности тока сопротивлении 1 и 3: $P_1 : P_3$.



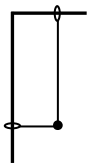
2. Два тела, находятся в точках, расположенных на одной вертикали на некоторой высоте над поверхностью земли. Расстояние между этими точками $h = 100$ м. Тела одновременно бросают вертикально вверх: тело, которое находится ниже, – с начальной скоростью $2v_0$, второе – v_0 ($v_0 = 10$ м/с). В какой точке тела столкнутся? $g = 10$ м/с^2.



3. Горизонтальный цилиндрический сосуд длины l разделен на три равные части двумя подвижными теплонепроницаемыми поршнями. Первоначально температура газа во всех частях сосуда равна T_0. На какое расстояние передвинутся поршни, если в левой части сосуда температуру повысить до значения $2T_0$, а в остальных частях поддерживать равной T_0?

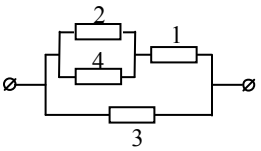


4. Веревка массой m и длиной l вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее концов (см. рисунок). Найти силу натяжения веревки на расстоянии $2l/3$ от оси вращения.



5. Два стержня соединены в форме буквы «Г». Один из стержней расположен горизонтально, другой – вертикально. На стержни надеты маленькие невесомые колечки, которые могут без трения перемещаться по стержням. К колечкам прикреплена невесомая нить. На нить надета массивная бусинка, которая может без трения перемещаться по нити. В начальный момент бусинку удерживают так, что нить натянута, длина ее горизонтального участка – l, вертикального – $2l$. Бусинку отпускают. Найти ее ускорение. Через какое время бусинка достигнет вертикального стержня?

Ответы и решения



1. Очевидно, что данную цепь с помощью деформации проводов можно привести к виду. Сопротивление нижнего участка – r, верхнего – $3r/2$. Поэтому ток в верхнем участке (через сопротивление 1) будет составлять 2/3 от тока в нижнем. Между со-

противлениями 2 и 4 верхний ток поделится пополам. Поэтому ток через сопротивление 2 будет составлять 1/3 от тока через сопротивление 3. Поэтому по закону Джоуля–Ленца заключаем, что

$$\frac{P_1}{P_3} = \frac{4}{9}.$$

2. Законы движения тел в системе координат, начало которой совпадает с начальным положением нижнего тела, ось x направлена вертикально вверх, дают

$$x_1(t) = 2v_0 t - \frac{gt^2}{2};$$

$$x_2(t) = l + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент столкновения тел τ их координаты совпадут, поэтому

$$2v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2} = l + v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2}.$$

Откуда находим время столкновения

$$\tau = \frac{l}{v_0}$$

и координату точки столкновения

$$x = 2l - \frac{gl^2}{2v_0^2} = -300 \text{ м}.$$

Знак «–» означает, что встреча тел произойдет ниже начального положения нижнего тела.

3. Так как температура и давление газа в среднем и правом отсеке будут одинаковы, то и их объемы должны быть одинаковы. Поэтому если левый поршень передвинется на Δx, то правый передвинется на $\Delta x / 2$. Закон Клапейрона–Менделеева для газа в левом и одном из других отсеков дает (при том, что давление во всех отсеках будет одинаково из-за равновесия поршней)

$$pS(l/3 + \Delta x) = \nu R 2T_0, \quad pS(l/3 - \Delta x/2) = \nu R T_0,$$

где p – давление газа; S – площадь сечения сосуда; ν – количество вещества газа в каждом отсеке. Деля уравнения друг на друга, получим

$$\frac{l/3+\Delta x}{l/3-\Delta x/2}=2.$$

Отсюда находим, что смещение левого поршня равно $l/6$, правого – $l/12$.

4. Разобьем кусок веревки, находящийся от расстояния $2l/3$ от оси вращения до конца, на малые элементы, и для каждого напишем второй закон Ньютона. Получим

$$T-T_1=\Delta m_1\omega^2 r_1;$$
$$T_1-T_2=\Delta m_2\omega^2 r_2;$$
$$T_2-T_3=\Delta m_3\omega^2 r_3;$$
$$\ldots.$$

Здесь T, T_1, … – силы натяжения веревки на краях каждого элемента веревки (T – искомая сила); Δm_i – массы элементов; r_i – расстояние от элементов до оси вращения. Складывая уравнения, получим

$$T=\Delta m_1\omega^2 r_1+\Delta m_2\omega^2 r_2+\Delta m_3\omega^2 r_3+\ldots=$$
$$=\omega^2\sum_i \Delta m_i r_i=\Delta m\omega^2\frac{\sum_i \Delta m_i r_i}{\Delta m}=\Delta m\omega^2 r_c,$$

где Δm – масса рассматриваемого куска веревки, которая составляет одну треть от массы всей веревки; r_c – расстояние от оси вращения до центра масс рассматриваемого участка веревки. Очевидно

$$r_c=\frac{2}{3}l+\frac{1}{6}l=\frac{5}{6}l.$$

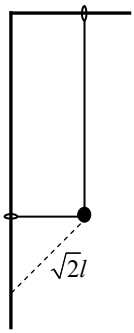
Отсюда находим

$$T=\frac{5}{18}m\omega^2 l.$$

5. Так как кольца невесомы и нет трения, то нить в процессе движения бусинки будет перпендикулярна стержням (достаточно бесконечно малой силы, чтобы их перемещать). Пусть длина вертикального участка нити – y, горизонтального – x. Тогда $x + y = 3l$. А это значит, что в системе координат, оси которой совпадают со спицами, траектория бусинки описывается функцией

$$y = -x + 3l,$$

т.е. направлена под углом $45°$ к горизонту и пересекает вертикальную спицу на расстоянии $3l$ от точки их соединения (см. рисунок; траектория бусинки показана пунктиром, ее длина $\sqrt{2}l$).



Найдем ускорение бусинки. На бусинку действуют две силы – натяжения и тяжести. Но поскольку сумма сил натяжения перпендикулярна траектории, то ускорение бусинки равно проекции ускорения свободного падения на направление траектории, т.е.

$$a = \frac{\sqrt{2}g}{2}.$$

Поэтому

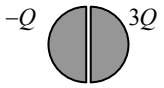
$$\sqrt{2}l = \frac{\sqrt{2}gt^2}{4} \quad \Rightarrow \quad t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

3.2.5. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 1

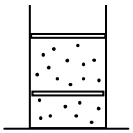
1. Две машины выехали одновременно навстречу друг другу из городов A и B. Машины встретились на расстоянии l от A, затем доехали до городов B и A, развернулись и поехали назад. Вторая встреча машин произошла на расстоянии $3l/4$ от города B. Найти расстояние AB. Скорости машин постоянны.

2. Тело движется вдоль оси x из точки с нулевой координатой так, что проекция его скорости на ось x зависит от координаты x по закону: $v_x = \alpha\sqrt{x}$, где α – известная постоянная. Через какое время после начала движения тело будет иметь координату x_0?

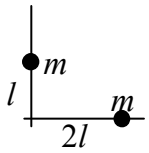
3. Два металлических одинаковых полушара радиуса R расположены так, что между ними имеется очень небольшой зазор. Полушары заряжают зарядами $-Q$ и $3Q$ $(Q>0)$. Найти напряженность электрического поля в зазоре между полушарами.



4. Цилиндрический сосуд закрыт двумя массивными одинаковыми подвижными поршнями. Газа между поршнями нет. Из-за неплотных контактов между стенками и нижним поршнем газ медленно просачивается в пространство между поршнями. Известно, что когда нижний поршень оказался на высоте h от дна сосуда, верхний был на расстоянии $2h$ от нижнего. На какой высоте от дна будет верхний поршень, когда нижний поршень окажется на дне? Температура постоянна. Контакты между верхним поршнем и стенками – плотные, трения нет. Атмосферным давлением пренебречь.



5. Два точечных тела с массами m могут скользить по жестким спицам, расположенным под прямым углом друг к другу. Тела притягиваются с силой F, величина которой не зависит от расстояния между ними. В начальный момент тела, которые удерживали на расстояниях l и $2l$ от точки пересечения спиц, отпускают. Какое из них первым окажется в точке пересечения спиц? Найти время его движения до этой точки. Силой тяжести и трением пренебречь.



Ответы и решения

1. Пусть расстояние AB равно x. Тогда, очевидно, что сумма расстояний, пройденных машинами до первой встречи, равно x, а до второй встречи – $3x$. Действительно, до второй встречи каждая машина доедет до второго города (в сумме $2x$), и проедет расстояние от него до места встречи другой машиной. Поэтому, с одной стороны, машина, выехавшая из города A, пройдет до второй встречи расстояние $3l$, с другой – это расстояние равно расстоянию между городами плюс расстоянию от города B до точки второй встречи. Отсюда

$$3l = x + \frac{3l}{4},$$

или

$$x = \frac{9l}{4}.$$

2. Найдем ускорение тела как функцию координаты. Для этого продифференцируем функцию $v_x = \alpha\sqrt{x}$ по времени:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}}\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}}v_x = \frac{\alpha^2}{2v_x}v_x = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Отсюда видим, что движение тела – равноускоренное, с нулевой начальной скоростью из точки с координатой $x = 0$ и с ускорением

$$a = \frac{\alpha^2}{2}.$$

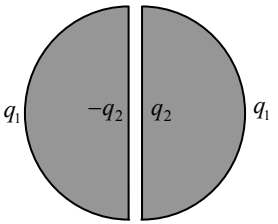
Поэтому зависимость координаты тела от времени имеет вид

$$x = \frac{\alpha^2 t^2}{4},$$

Откуда находим искомое время

$$t = \frac{2\sqrt{x_0}}{\alpha}.$$

3. Заряды распределятся по поверхности полушаров так, чтобы поле внутри них было равным нулю. Для этого: а) на сферических поверхностях должны разместиться одинаковые заряды; б) на плоских поверхностях разместиться одинаковые по величине и противоположные по знакам заряды (см. рисунок). Из закона сохранения заряда получаем для зарядов q_1 и q_2



$$\begin{cases} q_1 - q_2 = -Q; \\ q_1 + q_2 = 3Q. \end{cases}$$

Откуда находим

$$q_1 = Q, \quad q_2 = 2Q.$$

Поле в зазоре находим как поле двух плоскостей, заряженных равными по величине и противоположными по знаку зарядами

$$E = \frac{q_2}{S\varepsilon_0} = \frac{2Q}{\pi R^2 \varepsilon_0}.$$

Направлено поле в зазоре справа налево.

4. Пусть масса каждого поршня – m, площадь сечения сосуда – S. Тогда условия равновесия поршней в любой момент времени дают

$$p_{\text{в}} = \frac{mg}{S};$$

$$p_{\text{н}} - p_{\text{в}} = \frac{mg}{S} \quad \Rightarrow \quad p_{\text{н}} = \frac{2mg}{S}.$$

Поэтому закон Клапейрона–Менделеева для газов между поршнями и под нижним поршнем имеет вид

$$p_{\text{в}} 2hS = \nu_1 RT \quad \Rightarrow \quad 2mgh = \nu_1 RT;$$
$$p_{\text{н}} hS = \nu_2 RT \quad \Rightarrow \quad 2mgh = \nu_2 RT$$

где ν_1 и ν_2 – количество вещества газа между поршнями и под нижним поршнем соответственно. Складывая эти уравнения, получим

$$4mgh = \nu RT,$$

где ν – количество вещества газа в сосуде. С другой стороны, когда нижний поршень будет лежать на дне, условие равновесия верхнего поршня даст

$$mgH = \nu RT,$$

где H – высота верхнего поршня над дном сосуда (толщиной поршня пренебрегаем). Отсюда получаем

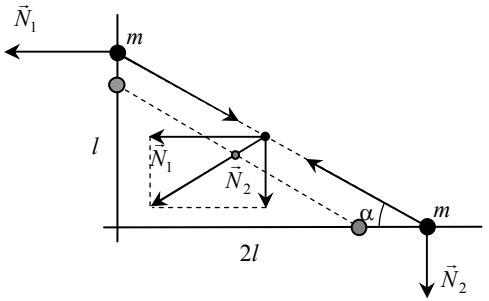
$$H = 4h.$$

5. Внешними для системы двух шариков силами являются силы реакции стержней – $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, которые находятся из условия нулевых проекций ускорения шариков на направления, перпендикулярные стержням. В начальный момент, когда отрезок, соединяющий

шарики, составляет угол $\alpha = \operatorname{arctg}(1/2)$ с горизонтальным стержнем, эти силы равны

$$N_1 = F\cos\alpha, \quad N_2 = F\sin\alpha .$$

Центр масс системы (находится посередине между шариками) движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса системы ($2m$), и на него действует суммарная внешняя сила ($\vec{N}_1 + \vec{N}_2$). Геометрически очевидно, что в начальный момент эта сила направлена в точку пересечения стержней. Это значит, что за некоторый малый интервал времени шарики переместятся так, что их центр масс переместится точно в направлении точки пересечения стержней. А это значит, что перемещения шариков за этот интервал будут такими, что соединяющий их отрезок будет все время оставаться параллельным самому себе, и центр масс все время будет двигаться вдоль прямой, соединяющей его начальное положение и точку пересечения стержней. Следовательно, шарики попадут в это точку одновременно. Время движения шариков можно найти так.



Так как отрезок, соединяющий шарики, все время остается параллельным самому себе, то проекция силы взаимодействия шариков на направление стержней не меняется. Поэтому движение шариков – равноускоренное. Применяя закон равноускоренного движения, например, к нижнему шарику, получим

$$2l = \frac{at^2}{2},$$

где

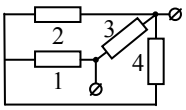
$$a = \frac{F\cos\alpha}{m} = \frac{2F}{\sqrt{5}m} -$$

ускорение нижнего шарика. Отсюда находим

$$t = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}lm}{F}}$$

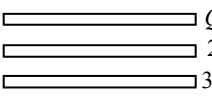
(если бы исследовали время движения верхнего шарика, ответ для времени получился таким же).

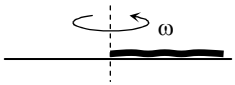
3.2.6. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 2



1. Из четырех одинаковых сопротивлений собрали электрическую цепь, приведенную на рисунке. Найти отношение мощности тока сопротивлении 2 и 3: $P_2 : P_3$.

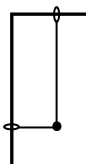
2. Три очень большие параллельные металлические пластины заряжены зарядами Q, $2Q$ и $3Q$ (см. рисунок снизу слева). Найти заряды верхней и нижней поверхности средней пластины. Краевыми эффектами пренебречь.





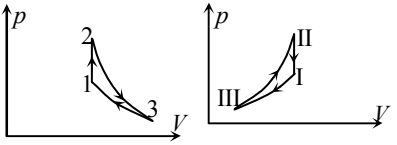
3. Веревка массой m и длиной l вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее концов (см. рисунок сверху справа). Найти силу натяжения веревки на расстоянии $2l/3$ от оси вращения.

4. Два стержня соединены в форме буквы «Г». Один из стержней расположен горизонтально, другой – вертикально. На стержни надеты маленькие невесомые колечки, которые могут без трения перемещаться по стержням. К колечкам прикреплена невесомая нить. На нить надета массивная бусинка, которая может без трения перемещаться по нити. В начальный момент бусинку удерживают так, что нить натя-



нута, длина ее горизонтального участка – l, вертикального – $2l$. Бусинку отпускают. Найти ее ускорение. Через какое время бусинка достигнет вертикального стержня?

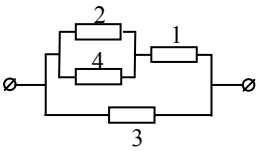
5. КПД процесса 1-2-3-1, состоящего из изохоры, адиабаты и изотермы (левый рисунок) равен η, объем газа возрастает в течение цикла в 1,5 раза. Найти КПД процесса III-II-I-III, состоящего из той же изохоры и двух процессов, графики которых получены из графиков процессов 2-3 и 3-1 отражением от вертикали (правый рисунок). Рабочее тело процесса – одноатомный идеальный газ.



Указание. Считать, что давление и объем воздуха связаны в адиабатическом процессе соотношением $pV^k = \text{const}$, где $k > 1$ – известное число.

Ответы и решения

1. Очевидно, что данную цепь с помощью деформации проводов можно привести к виду, показанному на рисунке. Сопротивление нижнего участка – r, верхнего – $3r/2$. Поэтому ток в верхнем участке (через сопротивление 1) будет составлять 2/3 от тока в нижнем. Между сопротивлениями 2 и 4 верхний ток поделится пополам. Поэтому ток через сопротивление 2 будет составлять 1/3 от тока через сопротивление 3. Поэтому по закону Джоуля–Ленца заключаем, что



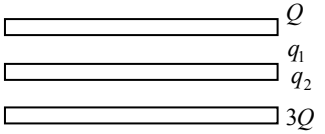
$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{1}{9}.$$

2. Пусть на верхней и нижней поверхностях средней пластины распределены заряды q_1 и q_2 (см. рисунок). Из закона сохранения электрического заряда имеем

$$q_1 + q_2 = 2Q.$$

Поле внутри средней пластины будет равно нулю. Поэтому

$$E = -\frac{Q}{2S\varepsilon_0} - \frac{q_1}{2S\varepsilon_0} + \frac{q_2}{2S\varepsilon_0} + \frac{3Q}{2S\varepsilon_0} = 0 \qquad (*)$$



(формула (*) имеет алгебраический смысл – все заряды со своим знаком – для проекции поля внутри второй пластинки на ось, направленную вертикально вверх). Решая систему уравнений (*), получим

$$q_1 = 2Q\,, \quad q_2 = 0\,.$$

3. Разобьем кусок веревки, находящийся от расстояния $2l/3$ от оси вращения до конца, на малые элементы, и для каждого напишем второй закон Ньютона. Получим

$$T - T_1 = \Delta m_1 \omega^2 r_1;$$
$$T_1 - T_2 = \Delta m_2 \omega^2 r_2;$$
$$T_2 - T_3 = \Delta m_3 \omega^2 r_3;$$
$$\ldots.$$

Здесь T, T_1, … – силы натяжения веревки на краях каждого элемента веревки (T – искомая сила); Δm_i – массы элементов; r_i – расстояние от элементов до оси вращения. Складывая уравнения, получим

$$T = \Delta m_1 \omega^2 r_1 + \Delta m_2 \omega^2 r_2 + \Delta m_3 \omega^2 r_3 + \ldots =$$
$$= \omega^2 \sum_i \Delta m_i r_i = \Delta m \omega^2 \frac{\sum_i \Delta m_i r_i}{\Delta m} = \Delta m \omega^2 r_c\,,$$

где Δm – масса рассматриваемого куска веревки, которая составляет одну треть от массы всей веревки; r_c – расстояние от оси вращения до центра масс рассматриваемого участка веревки. Очевидно

$$r_c = \frac{2}{3}l + \frac{1}{6}l = \frac{5}{6}l\,.$$

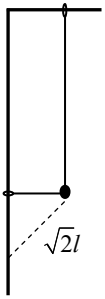
Отсюда находим

$$T = \frac{5}{18} m\omega^2 l \,.$$

4. Так как кольца невесомы и нет трения, то нить в процессе движения бусинки будет перпендикулярна стержням (достаточно бесконечно малой силы, чтобы их перемещать). Пусть длина вертикального участка нити – y, горизонтального – x. Тогда $x + y = 3l$. А это значит, что в системе координат, оси которой совпадают со спицами, траектория бусинки описывается функцией

$$y = -x + 3l \,,$$

т.е. направлена под углом $45°$ к горизонту и пересекает вертикальную спицу на расстоянии $3l$ от точки их соединения (см. рисунок; траектория бусинки показана пунктиром, ее длина $\sqrt{2}l$).



Найдем ускорение бусинки. На бусинку действуют две силы – натяжения и тяжести. Но поскольку сумма сил натяжения перпендикулярна траектории, то ускорение бусинки равно проекции ускорения свободного падения на направление траектории, т.е.

$$a = \frac{\sqrt{2}g}{2} \,.$$

Поэтому

$$\sqrt{2}l = \frac{\sqrt{2}gt^2}{4} \quad \Rightarrow \quad t = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \,.$$

5. Пусть объем газа в состоянии 1 (и 2, и I, и II) равен V_1, давление в состояниях 1 и I составляет p_1. Тогда объем в состоянии 3 будет $1{,}5V_1$, в состоянии III – $0{,}5V_1$ (см. далее рисунки). Так как 1–3 – изотерма, то

$$p_3 = \frac{2}{3} p_1 \,.$$

Из уравнения адиабаты находим:

$$p_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} p_1 \,.$$

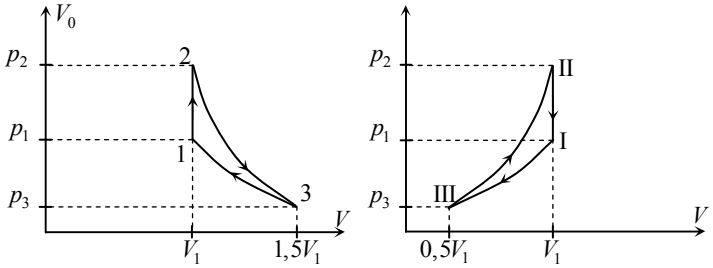
Из этих уравнений получаем

$$Q_{1-2} = \Delta U_{1-2} = \frac{3}{2}(p_2 - p_1)V_1 = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - 1\right)p_1V_1 .$$

Поэтому КПД процесса 1–2–3–1 равен

$$\eta = \frac{A}{\frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - 1\right)p_1V_1},$$

где A – работа газа в течение цикла.



В процессе III–II–I–III газ совершает ту же работу, тепло от нагревателя получает в процессе III–II. Найдем это тепло. По первому закону термодинамики имеем

$$Q_{\text{III–II}} = \Delta U_{\text{III–II}} + A_{\text{III–II}} .$$

Но работа газа в этом процессе такая же, как работа в процессе 2–3 (та же площадь под графиком). Поэтому

$$A_{\text{III–II}} = A_{2-3} = -\Delta U_{2-3} = \Delta U_{1-2} = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - 1\right)p_1V_1 ;$$

$$\Delta U_{\text{III–II}} = \frac{3}{2}\left(p_2V_1 - \frac{1}{2}p_3V_1\right) = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} p_1V_1 - \frac{1}{3}p_1V_1\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{3}\right)p_1V_1 .$$

Отсюда

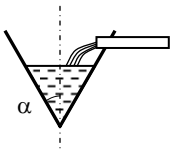
$$Q_{\text{III}-\text{II}} = \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - 1\right)p_1V_1 + \frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{3}\right)p_1V_1 = \frac{6}{2}p_1V_1\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - \frac{2}{3}\right).$$

Поэтому

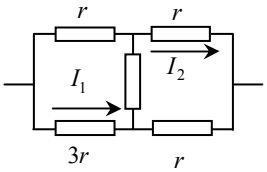
$$\eta_1 = \frac{A}{\frac{6}{2}p_1V_1\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - \frac{2}{3}\right)} = \frac{\eta\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - 1\right)}{2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} - \frac{2}{3}\right)}.$$

3.2.7. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 3

1. Сосуд имеет форму конуса с углом при вершине $\alpha = \operatorname{arcctg}(3/2)$. В сосуд из трубки с площадью *S* поступает вода так, что уровень воды в сосуде поднимается с постоянной скоростью v_0. Как скорость вытекания воды из трубки зависит от времени? В начальный момент времени сосуд пуст.

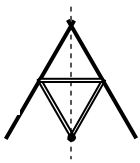


2. В цепи, изображенной на рисунке, $I_1 = 1$ А. Найти I_2. Величины сопротивлений приведены на схеме.

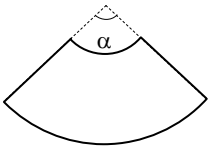


3. В вертикальном цилиндрическом сосуде под подвижным поршнем находится одноатомный идеальный газ при температуре T_0. Поршень удерживается в равновесии расположенными на нем тремя одинаковыми грузами. Найти температуру газа после снятия с поршня одного груза и установления равновесия. Теплоемкость сосуда и поршня малы, массой поршня, атмосферным давлением и теплопотерями можно пренебречь.

4. На две спицы, соединенные под углом $\alpha = 60°$, надето резиновое кольцо длиной *l*. К кольцу прикреплен груз массой *m*, который в положении равновесия находится на посередине между спицами (см. рису-



нок). Коэффициент жесткости резины, из которой изготовлено кольцо, равен k. Найти расстояние от груза до точки соединения спиц. Трения между спицами и кольцом нет.



5. Имеется очень тонкая пластинка в форме части кольца с внутренним и внешним радиусами r и $3r$, опирающаяся на угол α. Пластинка равномерно заряжена зарядом Q. Найти потенциал электрического поля в центре кольца.

Ответы и решения

1. Пусть скорость вытекания воды из трубки равна v. Тогда за малый интервал времени Δt в сосуд поступает объем воды $vS\Delta t$. А если высота уровня воды в сосуде в этот момент равна x, то уровень воды за время Δt повысится на величину Δx, которая определяется соотношением

$$vS\Delta t = \pi x^2 \operatorname{tg}^2\alpha\,\Delta x .$$

Отсюда

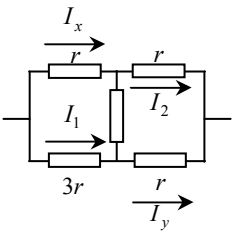
$$v = \frac{\pi x^2 \operatorname{tg}^2\alpha\,\Delta x}{S\Delta t} = \frac{4\pi x^2 \Delta x}{9S\Delta t} .$$

Поскольку

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_0 ,$$

и $x = v_0 t$ (уровень воды поднимается с постоянной скоростью), то

$$v = \frac{4\pi v_0^3 t^2}{9S} .$$



2. Пусть через сопротивления схемы текут токи, показанные на рисунке. Тогда для этих токов выполнены условия:

$$rI_x + rI_2 = 3rI_1 + rI_y ;$$

$$I_x + I_1 = I_y + I_2$$

(первое из них – равенство сумм напряжений в верхнем и нижнем участках цепи, второе – сумма правил токов в верхнем и нижнем цен-

тральных узлах). Сокращая в первом равенстве r и вычитая второе равенство из первого, получим

$$I_2 - I_1 = 3I_1 - I_2 .$$

Отсюда находим

$$I_2 = 2I_1$$

(отметим, что от центрального сопротивления схемы ответ не зависит).

3. Давление газа в начальном состоянии равно

$$p_0 = \frac{nmg}{S}$$

в конечном –

$$p_1 = \frac{(n-1)mg}{S},$$

где m – масса одного груза; S – площадь сечения сосуда; $n = 3$ – число грузов в начальном положении. Поэтому для начального и конечного состояний газа имеем по закону Клапейрона–Менделеева

$$p_0 V_0 = \nu R T_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{nmg}{S} S h_0 = \nu R T_0 \quad \Rightarrow \quad nmgh_0 = \nu R T_0 ; \qquad (*)$$

$$p_1 V_1 = \nu R T_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(n-1)mg}{S} S h_1 = \nu R T_1 \quad \Rightarrow \quad (n-1)mgh_1 = \nu R T_1 , \quad (**)$$

где $V_0 = Sh_0$ и $V_1 = Sh_1$ – объем газа в начальном и конечном состоянии; h_0 и h_1 – расстояние от поршня до дна сосуда в начальном и конечном положениях; T_0 и T_1 – начальная и конечная температура газа. При удалении одного груза и подъеме поршня газ совершает работу, которая равна изменению потенциальной энергии двух оставшихся грузов. Поэтому работа газа равна

$$A = (n-1)mg(h_1 - h_0) .$$

По первому закону термодинамики имеем

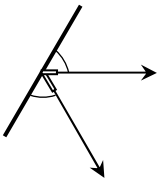
$$\Delta U = -A \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}\nu R\left(T_1 - T_0\right) = -\left(n-1\right)mg\left(h_1 - h_0\right). \qquad (***)$$

Используя теперь (*) и (**), получим из (***)

$$T_1 = \frac{5n-2}{5n} T_0 .$$

При $n = 3$ имеем

$$T_1 = \frac{13}{15} T_0 .$$



4. Очевидно, треугольник, образованный резиновым кольцом после подвешивания к нему груза, будет равносторонним. Действительно, на малый элемент кольца около стержня действуют две силы натяжения, величины которых одинаковы (см. рисунок) и проекции которых на направление стержня также одинаковы (из-за отсутствия трения). Поэтому углы, отмеченные на рисунке дугами, одинаковы, а поскольку один из них равен $60°$, то $60°$ равен и второй, поэтому и угол между резинками также равен $60°$. Поэтому треугольник, образованный резинкой – равносторонний.

Из условия равновесия груза следует, что

$$T = \frac{mg}{2\cos 30°} = \frac{mg}{\sqrt{3}} .$$

Чтобы обеспечить такую силу натяжения, резина должна растянуться на величину Δl, которую можно найти из условия:

$$\Delta l = \frac{T}{k} = \frac{mg}{\sqrt{3}k} .$$

Поэтому длина каждой стороны треугольника, образованного резинкой, равна

$$\frac{l}{3} + \frac{mg}{3\sqrt{3}k} ,$$

а расстояние между точкой крепления спиц и телом, которое равно удвоенной высоте треугольника, образованного резинкой, определяется соотношением

$$h = \left(\frac{l}{3} + \frac{mg}{3\sqrt{3}k} \right) \cos 30° = \frac{l}{2\sqrt{3}} + \frac{mg}{6k} .$$

5. Поверхностная плотность заряда пластинки определяется как

$$\sigma = \frac{Q}{S},$$

где

$$S = \frac{\alpha}{2}\left((3r)^2 - r^2\right) = 4\alpha r^2 \ -$$

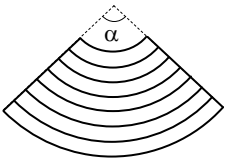
площадь пластинки (α – в радианах). Отсюда находим

$$\sigma = \frac{Q}{4\alpha r^2}.$$

Разобьем пластинку на дуги с радиусами r_1, r_2, … и толщиной Δr_1, Δr_2, … (см. рисунок). Каждая дуга создает в центре пластинки поле с потенциалом

$$\Delta\varphi_i = \frac{k\Delta Q_i}{r_i} = \frac{k\sigma\Delta S_i}{r_i} = \frac{k\sigma\Delta S_i}{r_i} = \frac{k\sigma\alpha r_i\Delta r_i}{r_i} = k\sigma\alpha\Delta r_i,$$

где k – постоянная закона Кулона; ΔQ_i и $\Delta S_i = \alpha r_i \Delta r_i$ – заряд и площадь каждой дуги. Суммируя потенциалы, созданные дугами, и используя формулу для поверхностной плотности заряда пластинки, получим

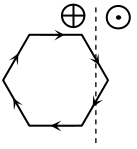


$$\varphi = k\sigma\alpha\left(\Delta r_1 + \Delta r_2 + ...\right) = 2k\sigma\alpha r = \frac{kQ}{2r}$$

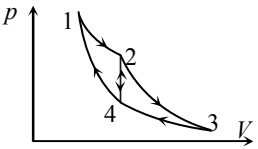
(от α потенциал пластинки не зависит).

3.2.8. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 4

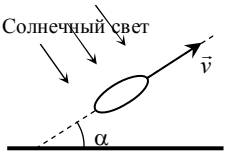
1. Два шара одинакового объема V связаны длинной нитью. Плотности шаров равны ρ и 2ρ. Шары сбрасывают с большой высоты на землю и через некоторое время из-за действия силы сопротивления воздуха они начинают двигаться с постоянными скоростями. Найти силу натяжения нити после этого. Силой Архимеда пренебречь.



2. Из проволоки сделан правильный шестиугольник со стороной l, в котором течет ток I. Магнитное поле с индукцией B перпендикулярно плоскости шестиугольника, но слева от пунктирной линии на чертеже направлено за чертеж, справа – на нас. Найти величину и направление силы Ампера, действующей на шестиугольник, если прямая X делит те стороны шестиугольника, которые она пересекает, в отношении 1:3 (1 – от самой правой вершины).



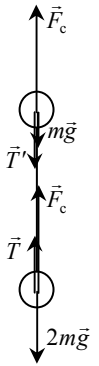
3. С идеальным газом проводят цикл Карно 1–2–3–4–1, для которого состояния 2 и 4 лежат на одной изохоре. КПД цикла 1–2–3–4–1 равен η, цикла 1–2–4–1 – η_1. Найти КПД цикла 2–3–4–2.



4. Летающая тарелка летит с постоянной скоростью $v = 3c/4$ под углом α к поверхности земли (c – скорость света). Солнечные лучи падают перпендикулярно траектории тарелки (см. рисунок). Найти скорость тени тарелки на земле.

5. Имеется очень тонкая пластинка в форме прямоугольного треугольника с отношением катетов 2:1. Пластинка равномерно заряжена и создает в вершине прямого угла поле с потенциалом φ. Найти потенциал электрического поля в точке, являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу. Ответ обосновать.

Ответы и решения



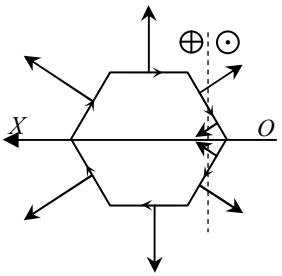
1. На шары будет действовать сила сопротивления среды, которая одинакова для каждого шара, поскольку они имеют одинаковые размеры и движутся с одинаковой скоростью. Поэтому второй закон Ньютона для каждого имеет вид

$$2mg = T + F_c;$$
$$mg + T = F_c,$$

где $m = \rho V$; T – сила натяжения нити; F_c – сила сопротивления воздуха. Из системы уравнений получим

$$T = \frac{mg}{2} = \frac{\rho g V}{2}.$$

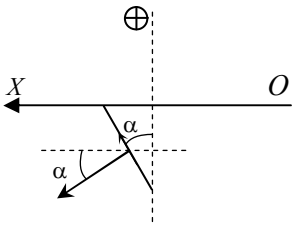
2. Благодаря симметрии шестиугольника относительно оси OX, показанной на рисунке, суммарная сила будет действовать вдоль этой оси, поэтому будем сразу искать проекции сил Ампера, действующих на отдельные участки шестиугольника, и их складывать.

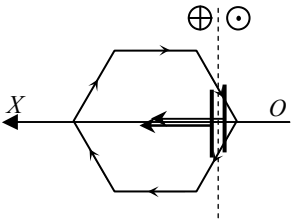


Рассмотрим участок провода длиной l, расположенный под углом α к оси OX. Со стороны магнитного поля на него действует сила Ампера, проекция которой на ось OX равна

$$F_x = IBl\cos\alpha = IBl_y,$$

где I – ток в проводнике; l – его длина; B – индукция магнитного поля; l_y – проекция проводника на ось, перпендикулярную оси OX, причем если ток течет вверх (на рисунке), эти проекции нужно брать со знаком «+»; если вниз (на рисунке), то «–» – для поля, направленного за чертеж, и с противоположными знаками для поля, направленного на нас. Это значит, что суммарная сила, действующая на часть шестиугольника, лежащую в области поля, направленного «за чертеж», равна $F_x = IBl_1$ и направлена вдоль оси OX, где l_1 – длина отрезка, связывающего точки пересечения шестиугольника границей полей. Аналогично, на часть шестиугольника, лежащую в области поля, направленного на нас, действует точно такая же сила. Находя длину l_1 геометрически, найдем суммарную силу, действующую на шестиугольник





$$F_x = \frac{\sqrt{3}}{2} IBl\,.$$

Направлена эта сила вдоль оси OX (влево на рисунке).

3. Пусть количество теплоты, полученное газом на участке 1–2, равно Q_1, отданное на участке 3–4 – Q_2, на участке 2–4 (4–2) газ получил (отдал) Q_3. Тогда

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \quad \eta_1 = \frac{Q_1 - Q_3}{Q_1}, \quad \eta_2 = \frac{Q_3 - Q_2}{Q_3}.$$

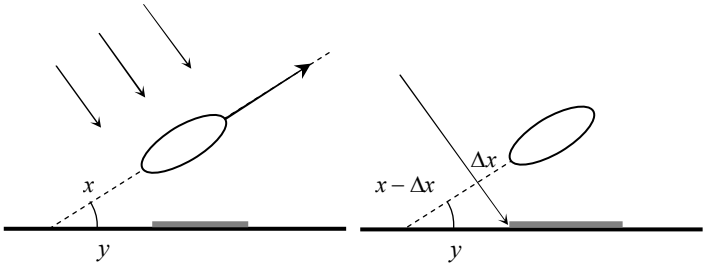
Выражая из второй формулы Q_1, из третьей Q_2 (и то и другое через Q_3) и подставляя эти выражения в первую формулу, получим

$$1 - \eta = (1 - \eta_1)(1 - \eta_2)\,,$$

или

$$\eta_2 = \frac{\eta - \eta_1}{1 - \eta_1}\,.$$

4. Пусть тарелка находится на расстоянии x от земли (вдоль траектории; см. рисунок). Найдем расстояние y от тени до точки, из которой тарелка начала двигаться.



Из-за того, что скорость тарелки сравнима со скоростью света, тень будет несколько отставать от положения тарелки. Очевидно, для расстояний x и y справедливы соотношения:

$$y = \frac{(x - \Delta x)}{\cos\alpha};$$

$$\frac{\Delta x}{(3c/4)} = \frac{(x - \Delta x)\,\mathrm{tg}\,\alpha}{c}.$$

Отсюда находим

$$\Delta x = \frac{3x\sin\alpha}{4\cos\alpha + 3\sin\alpha}, \quad y = \frac{4x}{4\cos\alpha + 3\sin\alpha}.$$

Через малое время Δt расстояние x увеличится на $(3c/4)\Delta t$, а значит, тень пройдет расстояние

$$\Delta y = \frac{3c\Delta t}{4\cos\alpha + 3\sin\alpha}.$$

Деля это расстояние на Δt, найдем скорость тени

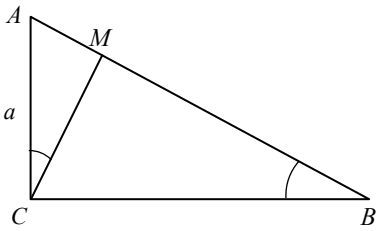
$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{3c}{4\cos\alpha + 3\sin\alpha}.$$

5. Потенциал поля пластинки должен линейно зависеть от ее заряда и обратно пропорционально – от ее размеров. При этом от толщины пластинки (при очень малой толщине) этот потенциал зависеть не может: работа поля на расстояниях порядка ее толщины будет мала, поскольку поле равномерно заряженной пластинки нигде не расходится.

Это значит, что потенциал в вершине прямого угла можно записать как

$$\varphi = \frac{Kq}{a}, \qquad (*)$$

где q – заряд треугольника; a – меньший катет; K - коэффициент пропорциональности, зависящий от геометрии треугольника, но независящий от его размеров и заряда.



Рассмотрим теперь точку, лежащую в основании перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу. Можно считать, что потенциал поля в

этой точке создается зарядами двух треугольников, подобных начальному (т.е. с отношением катетов 2:1). Поэтому их потенциалы можно найти по формуле (*), в которую нужно подставить их заряды и меньшие катеты.

Сначала рассмотри треугольник CAM . Его гипотенуза, с одной стороны, равна a (как меньший катет исходного треугольника), с другой – равна $AM\sqrt{5}$ (поскольку длины катетов в нем относятся как 2:1). Отсюда находим меньший катет этого треугольника

$$AM = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Очевидно, второй (больший) катет будет равен

$$CM = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Поэтому площадь этого треугольника равна

$$S_{AMC} = \frac{S_{ABC}}{5},$$

И, следовательно, его заряд также будет равен одной пятой заряда исходного треугольника. Поэтому заряды треугольника AMC создают в точке M поле с потенциалом

$$\varphi_1 = \frac{K(q/5)}{(a/\sqrt{5})} = \frac{Kq}{\sqrt{5}a} = \frac{\varphi}{\sqrt{5}}.$$

Аналогично находим потенциал поля второго треугольника в этой точке:

$$\varphi_2 = \frac{K\left(4q/5\right)}{\left(2a/\sqrt{5}\right)} = \frac{2\varphi}{\sqrt{5}}.$$

Складывая потенциалы φ_1 и φ_2, находим потенциал электрического поля в точке M, т.е.

$$\varphi_M = \frac{3\varphi}{\sqrt{5}}.$$

4. Математика

4.1. Отборочные туры

4.1.1. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 7 класс

Вариант № 1

1. Найти несократимую дробь, равную $\frac{222222232323}{242424}$.

2. Учитель старше своего ученика седьмого класса в 4 раза, при этом их суммарный возраст 60 лет. Сколько раз ученика должны оставить «на второй год», чтобы в одиннадцатом классе он был младше учителя уже в 3 раза?

3. Найти наибольшее двузначное число, для которого разность квадратов числа десятков и единиц равно удвоенной сумме его цифр.

4. Найти целые положительные числа x и y, для которых $16x + 64 = y^2$. Найти минимальное, возможное при этих условиях значение выражения $x^2 + y^2$ для таких решений.

5. Если бы в арифметике существовало только четыре цифры 0, 2, 3 и 5, то сколько различных целых четырехзначных чисел можно было записать с их помощью? Сколько среди них оказалось бы делящихся на 25?

Ответы и решения

1. Заметим, что

$$222222232323 = 22\,(10^4 + 10^2 + 1)\,10^6 +$$
$$+23(10^4 + 10^2 + 1),\ \text{а}\ 242424 = 24(10^4 + 10^2 + 1).$$

Поэтому $\frac{222222232323}{242424}=\frac{22\cdot 10^6+23}{24}$. Числитель и знаменатель последней дроби делятся на 3. Следовательно, дробь

$$\frac{22000023}{24}=\frac{733341}{8}.$$

Последняя дробь, очевидно, уже несократима.

Ответ: $\frac{7333341}{8}$.

2. Пусть ученику в данный момент x лет. Тогда учителю в данный момент $4x$ лет. Так как их суммарный возраст равен 60, то $x + 4x = 60$, $5x = 60$, $x = 12$. Следовательно, возраст ученика в данный момент 12 лет, а возраст учителя – 48 лет. Через t лет ученику будет $12 + t$ лет, а учителю $48 + t$ лет. Из условия задачи следует, что $\frac{48+t}{12+t}=3$. Откуда получим $t = 6$. Так как через 4 года ученик должен быть в 11-м классе, то его дважды должны оставить «на второй год».

Ответ: ученика два раза должны оставить «на второй год».

3. Обозначим через x число десятков искомого числа, а через y число единиц искомого числа. Тогда искомое число A запишется в виде: $A = 10x + y$. Из условия задачи имеем $x^2 - y^2 = 2(x + y)$ или $(x + y)(x - y - 2) = 0$. Очевидно, $x + y \neq 0$. Следовательно, $x = y + 2$. Так как $0 < x \leq 9$, то наибольшее значение y может быть равно 7, тогда $x = 9$. Следовательно, $A = 97$.

Ответ: искомое число 97.

4. Из условия задачи следует, что

$$16(x+4)=y^2. \qquad (1)$$

Следовательно, y^2 делится без остатка на 16. Тогда $y = 4k$, где $k \in N$. Из (1) получим $x+4=k^2$ или $x=k^2-4>0$. Следовательно, $k > 2$, $k \in N$.

Тогда $x^2+y^2=(k^2-4)^2+16k^2=k^4+8k^2+16=(k^2+4)^2$ достигает минимальное значение, равное 169 при $k = 3$. Следовательно, $x = 5$, $y = 12$.

Ответ: $\begin{cases} x = k^2 - 4, \\ y = 4k, \end{cases} \; k \in N, k \geq 3; \; x^2 + y^2 = 169.$

5. Очевидно, что на первой позиции может стоять одна из трёх цифр: 2, 3 или 5. На каждой из оставшихся трёх позиций можно записать любую из данных четырёх цифр, т.е. 4^3 вариантов на каждую цифру на первой позиции. Следовательно, всего различных четырёхзначных чисел будет $3 \cdot 4^3 = 192$ числа. Для того чтобы выяснить сколько среди этих чисел делится на 25, заметим, что деление на 25 возможно, если последние две цифры 00, 25 или 50. Тогда на первой позиции может стоять любая из трёх цифр 2, 3 или 5, а на второй позиции может стоять любая из четырёх цифр. Следовательно, всего возможно $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ вариантов чисел.

Ответ: 1) всего существует 192 различных четырёхзначных числа; 2) 36 из них делится на 25.

Вариант № 2

1. Найти несократимую дробь равную $\dfrac{131313141414}{151515}$.

Ответ: $\dfrac{4333338}{5}$.

2. Учитель старше своего ученика четвертого класса в 3 раза, при этом их суммарный возраст 40 лет. Сколько раз ученика должны оставить «на второй год», чтобы в одиннадцатом классе он был младше учителя уже в 2 раза?

Ответ: ученика три раза должны оставить «на второй год».

3. Найти двузначное число, равное разности куба его десятков и удвоенного числа единиц.

Ответ: искомое число 48.

4. Найти целые, положительные числа x и y, для которых $12x + 36 = y^2$. Найти минимальное, возможное при этих условиях значение выражения $2x + 3y$ для таких решений.

Ответ: $\begin{cases} x = 3n^2 - 3, \\ y = 6n, \end{cases} \; n \in N, n \geq 2; \; 2x + 3y = 54.$

5. Если бы в арифметике существовало только три цифры 0, 2 и 5, то сколько различных целых пятизначных чисел можно было записать с их помощью? Сколько среди них оказалось бы делящихся на 20?

Ответ: 1) всего существует 162 числа; 2) 36.

Вариант № 3

1. Найти несократимую дробь равную $\frac{161616171717}{181818}$.

Ответ: $\frac{5333339}{6}$.

2. Учитель старше своего ученика восьмого класса в 2 раза, при этом их суммарный возраст 42 лет. Сколько раз ученика должны оставить «на второй год», чтобы в одиннадцатом классе учитель был в 5/3 раза старше ученика?

Ответ: ученика четыре раза должны оставить «на второй год».

3. Найти двузначное число, равное сумме квадрата числа единиц и куба числа его десятков.

Ответ: искомое число 24.

4. Найти целые, положительные числа x и y, для которых $18x+81=y^2$. Найти минимальное, возможное при этих условиях значение выражения $x+y$ для таких решений.

Ответ: $\begin{cases} x=2n^2+2n-4, \\ y=6n+3, \end{cases}$ $n\in N, n\geq 2;\ \ x+y=23.$

5. Если бы в арифметике существовало только четыре цифры 0, 3, 4 и 5, то сколько различных целых шестизначных чисел можно было записать с их помощью? Сколько среди них оказалось бы делящихся на 100?

Ответ: 1) всего существует 3072 числа; 2) 192.

Вариант № 4

1. Найти несократимую дробь равную $\frac{191919202020}{212121}$.

Ответ: $\frac{6333340}{7}$.

2. Учитель старше своего ученика третьего класса в 5 раз, при этом их суммарный возраст 54 года. Сколько раз ученика должны оставить «на второй год», чтобы в одиннадцатом классе он был младше учителя уже в 3 раза?

Ответ: ученика один раз должны оставить «на второй год».

3. Найти двузначное число, равное сумме квадрата числа единиц и числа десятков.

Ответ: искомое число 89.

4. Найти целые, положительные числа x и y, для которых $20x+100=y^2$. Найти минимальное, возможное при этих условиях значение выражения $x+2y$ для таких решений.

Ответ: $\begin{cases} x=5n^2-5, \\ y=10n, \end{cases}$ $n\in N, n\geq 2;\ \ x+2y=55.$

5. Если бы в арифметике существовало только пять цифр 0, 4, 5, 6 и 7, то сколько различных целых семизначных чисел можно было записать с их помощью? Сколько среди них оказалось бы делящихся на 50?

Ответ: 1) всего существует 62500 числа; 2) 5000.

4.1.2. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 8 класс

Вариант № 1

1. Родитель решил разделить свой бизнес между своими сыновьями Петей и Колей по следующим правилам: если Петя захочет участвовать в бизнесе, то получит долю, превышающую в два раза долю отца; если Коля будет участвовать в бизнесе, то его доля будет в два раза меньшей, чем доля отца. Случилось так, что оба сына заявили о своем желании участвовать в бизнесе. Как разделить капитал в 35 млн руб. между отцом и сыновьями, так чтобы все объявленные правила были соблюдены?

2. Доказать, что число $7^{2n+1}+2^{n+5}+2^{n+3}$ делится без остатка на 47 при любом целом, положительном n.

3. Найти целые положительные числа x и y, для которых

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 53, \\ \text{НОК}(x, y) = 2250. \end{cases}$$

4. Дима нарисовал на доске параллелограмм $ABCD$ и точки M и N на сторонах BC и CD соответственно так, что $BM : MC = DN : NC = 2 : 3$. После этого он удалил с помощью тряпки все, кроме точек A, M и N. Вова с помощью линейки и циркуля восстановил чертеж. Как он это сделал?

5. Целое, положительное число A при делении на 11 имеет в остатке 5, при делении на 12 – в остатке 6, при делении на 13 – в остатке 7. Указать наименьшее возможное число A, удовлетворяющее этим условиям.

Ответы и решения

1. Обозначим через x долю отца в бизнесе. Тогда доля Пети будет равна $2x$, а доля Коли будет равна $0{,}5x$. Так как весь их суммарный капитал равен 35 млн руб., то получим уравнение $x + 2x + 0{,}5x = 35$ или $3{,}5x = 35$, т.е. $x = 10$. Следовательно, доля отца будет 10 млн руб., доля Пети – 20 млн руб., а доля Коли – 5 млн руб.

Ответ: доля отца – 10 млн руб., доля Пети – 20 млн руб., а доля Коли – 5 млн руб.

2. Выражение $A = 7^{2n+1} + 2^{n+5} + 2^{n+3}$ представим в виде $A = 7 \cdot 49^n + 32 \cdot 2^n + 8 \cdot 2^n = 7 \cdot 49^n + 40 \cdot 2^n = 7(47+2)^n + 40 \cdot 2^n$. Заметим, что существует натуральное число k, при котором

$$(47+2)^n = 47k + 2^n. \qquad (1)$$

Действительно, используя формулу:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

разложим выражение $(47+2)^n - 2^n$ на множители и получим:

$$(47+2)^n - 2^n = 47 \cdot ((47+2)^{n-1} + (47+2)^{n-2} \cdot 2 + \ldots + 2^{n-1}) = 47k,$$

где $k = (47+2)^{n-1} + \ldots + 2^{n-1}$ и есть натуральное число в формуле (1).

Тогда выражение для A в силу условия (1) приводится к виду

$$A = 7\cdot(47+2)^n + 40\cdot 2^n = 7\cdot 47\cdot k + 7\cdot 2^n + 40\cdot 2^n = 47\cdot(7k+2^n),$$

которое, очевидно, делится на 47.

Ответ: делится нацело.

3. Из второго условия задачи имеем:

$$\text{НОК}\,(x, y) = 22500 = 15^2\cdot 10^2 = 5^4\cdot 3^2\cdot 2^2.$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} x = 5^4\alpha, \\ y = 3^2\beta. \end{cases} \qquad (1)$$

Тогда в переменных α и β условия задачи примут вид

$$\begin{cases} 25\sqrt{\alpha} + 3\sqrt{\beta} = 53, \\ \text{НОК}\,(\alpha,\beta) = 2^2, \end{cases} \quad \text{где } \alpha,\beta \in N. \qquad (2)$$

Отметим, что число α не может содержать множитель 3. Поэтому, так как $\text{НОК}\,(\alpha,\beta) = 2^2$, возможны следующие случаи.

Случай 1. $\alpha = 2^2$, $\beta = 2^2$. Подставляя эти значения α и β в первое равенство системы (2), получим $25\cdot 2 + 3\cdot 2 = 56 \neq 53$. Следовательно, эти значения α и β не являются решением системы (2).

Случай 2. $\alpha = 2^2$, $\beta = 1$. Подставляя эти значения α и β в первое равенство системы (2), получим: $25\cdot 2 + 3\cdot 1 = 53$. Следовательно, $\alpha = 4$, $\beta = 1$ являются решением системы (2). Тогда из (1) следует, что $x = 5^4\alpha = 625\cdot 4 = 2500$ и $y = 3^2\beta = 9\cdot 1 = 9$ являются решением исходной задачи;

Случай 3. $\alpha = 1$, $\beta = 2^2$. Подставляя эти значения α и β в первое равенство системы (2), получим: $25\cdot 1 + 3\cdot 2 = 31 \neq 53$. Следовательно, эти значения α и β не являются решением системы (2). Таким образом, получаем, что числа x = 2500, y = 9 являются решением нашей задачи. В силу симметрии задачи числа x = 9 и **y** = 2500 также являются решением нашей задачи.

Ответ: решениями задачи являются числа x =2500, y = 9 и x = 9, y = 2500.

4. Так как $\frac{BM}{MC} = \frac{DN}{NC} = \frac{2}{3}$, то на чертеже, нарисован-ном Димой (рис.1), обозначим $BM = 2x$, $MC = 3x$, $DN = 2y$, $NC = 3y$. Тогда, очевидно, $PC = \frac{3}{7} AP$.

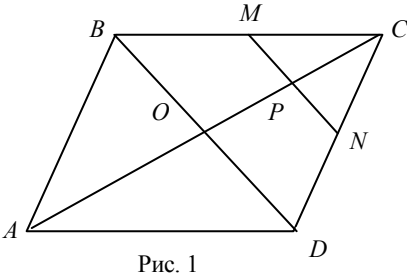


Рис. 1

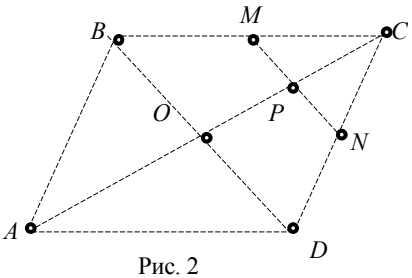


Рис. 2

Дима стёр чертёж, оставив только точки A, M, N (рис. 2). Для того чтобы восстановить чертёж Димы, Вове нужно:

1) найти точку P – середину отрезка MN;

2) на прямой AP отложить отрезок PC по длине равный $\frac{3}{7} AP$;

3) построить прямые CM и CN, и точку O – середину отрезка AC, вершины B и D тогда находятся как точки пересечения прямых CM и CN с прямой, проведённой через точку O, параллельную прямой MN.

Далее остаётся только соединить точку A с точкой B и точку A с точкой D. Таким образом, чертёж Димы будет полностью восстановлен.

5. Отметим, что числа A, которые при делении на n дают в остатке число r, при делении на $(n + 1)$ – остаток $(r + 1)$, а при делении на $(n + 2)$ – остаток $(r + 2)$, имеют вид

$$A = n(n+1)(n+2)t - n + r, \text{ где } t \in N. \qquad (1)$$

При делении на n, очевидно, это число имеет остаток r.

Если число A из (1) представить в виде

$$A = n(n+1)(n+2)t - (n+1) + (r+1),$$

то, очевидно, при делении на $(n + 1)$ оно имеет остаток $(r + 1)$.

Если же это число A представить в виде

$$A = n(n + 1)(n + 2)t – (n + 2) + (r + 2),$$

то, очевидно, при делении на $(n + 2)$ оно имеет остаток $(r + 2)$. При этом минимальное число A будет при $t = 1$.

В нашем случае $n = 11$, $r = 5$. Следовательно, минимальное число, удовлетворяющее условиям нашей задачи, будет

$$A = 11 \cdot 12 \cdot 13 - 11 + 5 = 11(12 \cdot 13 - 1) + 5 = 11 \cdot 155 + 5 = 1710.$$

Ответ: наименьшее число, удовлетворяющее условиям задачи, равно 1710.

Вариант № 2

1. Родитель решил разделить свой бизнес между своими сыновьями Петей и Колей по следующим правилам: если Петя захочет участвовать в бизнесе, то получит долю, превышающую в три раза долю отца; если Коля будет участвовать в бизнесе, то его доля будет в два раза меньшей, чем доля отца. Случилось так, что оба сына заявили о своем желании участвовать в бизнесе. Как разделить капитал в 27 млн руб. между отцом и сыновьями, так чтобы все объявленные правила были соблюдены?

Ответ: доля отца – 6 млн руб., доля Пети – 18 млн руб., а доля Коли – 3 млн руб.

2. Доказать, что число $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ делится без остатка на 23 при любом целом, положительном n

Ответ: делится нацело.

3. Найти целые положительные числа x и y, для которых

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 29, \\ \text{НОК}\,(x, y) = 14400. \end{cases}$$

Ответ: решениями задачи являются числа x =576, y = 25 x = 25, y = 576.

4. Маша нарисовала на доске параллелограмм $ABCD$ и точки M и N на сторонах AB и BC соответственно так, что $BM : BA = BN : BC = 1 : 3$. После этого она удалила с помощью тряпки все, кроме точек A, M и N. Катя с помощью линейки и циркуля восстановила чертеж. Как она это сделала?

5. Целое, положительное число A при делении на 7 имеет в остатке 3, при делении на 8 – в остатке 4, при делении на 9 – в остатке 5. Указать наибольшее такое число A, не превосходящее 10000.

Ответ: 9572.

Вариант № 3

1. Родитель решил разделить свой бизнес между своими сыновьями Петей и Колей по следующим правилам: если Петя захочет участвовать в бизнесе, то получит долю, превышающую в четыре раза долю отца; если Коля будет участвовать в бизнесе, то его доля будет в три раза меньшей, чем доля отца. Случилось так, что оба сына заявили о своем желании участвовать в бизнесе. Как разделить капитал в 256 млн руб. между отцом и сыновьями так, чтобы все объявленные правила были соблюдены?

Ответ: доля отца – 48 млн руб., доля Пети – 192 млн руб., а доля Коли – 16 млн руб.

2. Доказать, что число $6^{2n+1} + 5^{n+2}$ делится без остатка на 31 при любом целом, положительном n.

Ответ: делится нацело.

3. Найти целые положительные числа x и y, для которых

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 48, \\ \text{НОК}\,(x, y) = 8100. \end{cases}$$

Ответ: решениями задачи являются числа x =324, y = 900 и x = 900, y = 324.

4. Костя нарисовал на доске параллелограмм $ABCD$ и точки M и N на сторонах BC и CD соответственно так, что $BM : MC = DN : NC = 1 : 4$. После этого он удалил с помощью тряпки все, кроме точек A, M и N. Саша с помощью линейки и циркуля восстановил чертеж. Как он это сделал?

5. Целое, положительное число A при делении на 9 имеет в остатке 6, при делении на 10 – в остатке 7, при делении на 11 – в остатке 8. Указать наименьшее возможное число A, удовлетворяющее этим условиям.

Ответ: 987.

Вариант № 4

1. Родитель решил разделить свой бизнес между своими сыновьями Петей и Колей по следующим правилам: если Петя захочет участвовать в бизнесе, то получит долю, превышающую в два раза долю отца; если Коля будет участвовать в бизнесе, то его доля составит 2/3 доли отца. Случилось так, что оба сына заявили о своем желании участвовать в бизнесе. Как разделить капитал в 121 млн руб. между отцом и сыновьями, так чтобы все объявленные правила были соблюдены?

Ответ: доля отца – 33 млн руб., доля Пети – 66 млн руб., а доля Коли – 22 млн руб.

2. Доказать, что число $4^{2n+1}+3^{n+2}$ делится без остатка на 13 при любом целом, положительном n.

Ответ: делится нацело.

3. Найти целые положительные числа x и y, для которых

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=22,\\ \text{НОК}\,(x,y)=11025.\end{cases}$$

Ответ: решениями задачи являются числа $x = 49$, $y = 225$ и $x = 225$, $y = 49$.

4. Даша нарисовала на доске параллелограмм $ABCD$ и точки M и N на сторонах AB и BC соответственно так, что $BM : BA = BN : BC = 3 : 5$. После этого она удалила с помощью тряпки все, кроме точек A, M и N. Ира с помощью линейки и циркуля восстановила чертеж. Как она это сделала?

5. Целое, положительное число A при делении на 13 имеет в остатке 7, при делении на 14 – в остатке 8, при делении на 15 – в остатке 9. Указать наибольшее такое число A, не превосходящее 15000.

Ответ: 13644.

4.1.3. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 9 класс

Вариант № 1

1. Найти числа p и q, если известно, что они являются решениями уравнения $x^2 + px - 2q = 0$.

2. Целые числа $n > 1$ и $k > 0$ таковы, что $a_k = S_n$, где $a_k = \dfrac{k+5}{2}$ – члены арифметической прогрессии; S_n – сумма n ее членов. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение k.

3. Доказать, что выражение $3^{2n+2} - 8n - 9$ делится на 64 при любых целых, положительных n.

4. Найти наибольшее значение величины $2a + 3b$, если a и b – целые числа, а уравнение $ax^2 + bx + 23 = 0$ имеет только целые решения.

5. Точка D делит сторону AC треугольника ABC так, что $AD : DC = 3 : 2$. Найти такую точку E на стороне треугольника ABC, что прямая DE делит треугольник на две равновеликие части.

Ответы и решения

1. Подставим в уравнение $x^2 + px - 2q = 0$ вместо x сначала p, а затем q. В результате получим систему уравнений относительно p и q

$$\begin{cases} p^2 + p^2 - 2q = 0, \\ q^2 + pq - 2q = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 = q, \\ q(q + p - 2) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 = q, \\ p^2\left(p^2 + p - 2\right) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = p^2, \\ \left[\begin{array}{l} p = 0, \\ p = 1, \\ p = -2, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0, \\ q = 0, \end{cases} \begin{cases} p = 1, \\ q = 1, \end{cases} \begin{cases} p = -2, \\ q = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} p = 0, \\ q = 0, \end{cases} \begin{cases} p = 1, \\ q = 1, \end{cases} \begin{cases} p = -2, \\ q = 4. \end{cases}$

2. Воспользуемся формулой для суммы n членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ и перепишем условие $a_k = S_n$ в виде $\frac{k+5}{2} = \frac{3+\frac{n+5}{2}}{2}\cdot n$. Решив это уравнение относительно k, получим $k = \frac{(11+n)n}{2} - 5$. Так как при целых числах n, $n>1$ выражение $\frac{(11+n)n}{2} - 5$ принимает целые положительные значения и возрастает с ростом n, то $k_{\min} = k(2) = \frac{(11+2)2}{2} - 5 = 8$.

Ответ: $k = 8$ при $n = 2$.

3. *Способ 1.* Разложим выражение $3^{2n+2} - 8n - 9$ на множители, воспользовавшись формулой $a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1\right)$:

$$3^{2n+2} - 8n - 9 = 9\cdot 9^n - 8n - 9 = 9\left(9^n - 1\right) - 8n =$$

$$= 9(9-1)\left(9^{n-1} + 9^{n-2} + \ldots + 1\right) - 8n = 8\left(9^n + 9^{n-1} + \ldots + 9 - n\right).$$

Чтобы доказать, что это выражение делится на 64, покажем, что $9^n + 9^{n-1} + \ldots + 9 - n$ делится на 8:

$$9^n + 9^{n-1} + \ldots + 9 - n = \left(9^n - 1\right) + \left(9^{n-1} - 1\right) + \ldots + (9-1) =$$

$$= (9-1)\left(9^{n-1} + 9^{n-2} \ldots + 1\right) + (9-1)\left(9^{n-2} + 9^{n-3} \ldots + 1\right) + \ldots +$$

$$+ (9-1) = 8\left(9^{n-1} + 9^{n-2} \ldots + 1\right) + 8\left(9^{n-2} + 9^{n-3} \ldots + 1\right) + \ldots + 8.$$

Так как все слагаемые делятся на 8, то и сумма делится на 8. Утверждение доказано.

Способ 2. Применим метод математической индукции. При $n = 1$: $3^4 - 8 - 9 = 64$ – делится на 64, утверждение верно.

Индуктивное предположение: пусть утверждение верно при $n = k$, т.е. $3^{2k+2} - 8k - 9$ делится на 64.

Докажем утверждение для $n = k + 1$:

$$3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9 = 9(3^{2k+2} - 8k - 9) + 64k + 64.$$

Первое слагаемое делится на 64 по предположению индукции, второе и третье слагаемые содержат множитель 64, следовательно, все выражение делится на 64. Утверждение доказано.

Ответ: утверждение доказано.

4. *Случай 1.* Пусть $a = b = 0$. Тогда $0 + 0 + 23 \neq 0$.

Случай 2. Пусть $a = 0, b \neq 0$. Тогда $bx + 23 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{23}{b}$. По условию задачи x и bпринимают целые значения. Это возможно только при $b = 1$, $b = -1$, $b = 23$ и $b = -23$. Величина $2a + 3b$ принимает наибольшее значение при $b = 23$. Оно равно 69.

Случай 3. Пусть $a \neq 0, b = 0$. Тогда $ax^2 + 23 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{23}{a}$. По условию задачи x и a принимают целые значения. Это возможно только при $a = -23$. Значение величины $2a + 3b$ в этом случае равно -46.

Случай 4. Пусть $a \neq 0, b \neq 0$. Воспользуемся теоремой Виета для корней квадратного уравнения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{23}{a}. \end{cases}$$

По условию задачи x_1 и x_2 принимают целые значения. Следовательно, $\frac{23}{a}$ – целое. Так как a – целое, то это возможно только при $a = 1$, $a = -1$, $a = 23$ и $a = -23$.

Пусть $a = 1$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b, \\ x_1 \cdot x_2 = 23. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 23, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -23. \end{cases}$$

В первом случае $b=-24$ и $2a+3b=-70$, а во втором случае $b=24$ и $2a+3b=74$.

Пусть $a=-1$.

$$\begin{cases} x_1+x_2=b, \\ x_1\cdot x_2=-23. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем

$$\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=-23, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1=-1, \\ x_2=23. \end{cases}$$

В первом случае $b=-22$ и $2a+3b=-68$, а во втором случае $b=22$ и $2a+3b=64$.

Пусть $a=23$.

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{23}, \\ x_1\cdot x_2=1. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем

$$\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1=-1, \\ x_2=-1. \end{cases}$$

В первом случае $b=-46$ и $2a+3b=-92$, а во втором случае $b=46$ и $2a+3b=184$.

Пусть $a=-23$.

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{b}{23}, \\ x_1\cdot x_2=-1. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем

$$\begin{cases} x_1=1, \\ x_2=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1=-1, \\ x_2=-1. \end{cases}$$

В этом случае $b=-46$ и $2a+3b=184$.

Сравнивая значения выражения $2a+3b$, полученные выше, находим $\left(2a+3b\right)_{\max}=184$.

Ответ: 184 при $a=23, b=46$.

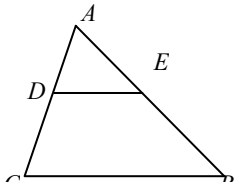


Рис. 1

5. *Случай 1.* Точка E лежит на стороне AB (рис. 1). По условию задачи прямая DE делит треугольник ABC на две равновеликие части.

Из этого следует, что $S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ADE}$. Обозначим $\dfrac{EB}{AE} = y$, тогда

$$AB = AE + EB = AE(1+y).$$

Так как $AD : DC = 3:2$, то $AC = \dfrac{5}{3}AD$.

Подставляя

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot AB \cdot \sin\angle A = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}AD \cdot AE(1+y)\cdot\sin\angle A$$

и $S_{\Delta ADE} = \dfrac{1}{2}AD \cdot AE \cdot \sin\angle A$ в равенство $S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ADE}$ и сокращая на $\dfrac{1}{2}AD \cdot AE \cdot \sin\angle A$, получаем уравнение $\dfrac{5(1+y)}{3} = 2$. Решив это уравнение, находим $y = \dfrac{1}{5}$. Следовательно, $EB : AE = 1:5$.

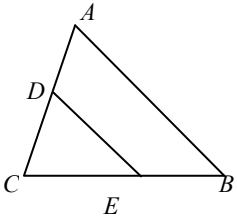


Рис. 2

Случай 2. Точка E лежит на стороне CB (рис. 2). В этом случае из условия задачи следует, что

$$S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta DCE}.$$

Обозначим $\dfrac{EC}{BE} = y$, тогда

$$BC = BE + EC = EC(1+y).$$

Так как $AD : DC = 3:2$, то $AC = \dfrac{5}{2}DC$. Подставляя

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot CB \cdot \sin\angle C = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}DC \cdot EC(1+y)\cdot\sin\angle C$$

и $S_{\Delta DCE}=\frac{1}{2}DC\cdot CE\cdot\sin\angle C$ в равенство $S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta DCE}$ и сокращая на $\frac{1}{2}DC\cdot CE\cdot\sin\angle C$, получаем уравнение $\frac{5(1+y)}{2}=2$. Решив это уравнение, находим $y=-\frac{1}{5}$, следовательно, этот случай невозможен.

Ответ: точка *E* находится на стороне *AB* так, что $EB:AE=1:5$.

Вариант № 2

1. Найти числа *p* и *q*, если известно, что *p* и $2q$ являются решениями уравнения $2x^2-px-4q=0$.

Ответ: $\begin{cases}p=0,\\q=0,\end{cases}\ \begin{cases}p=-1,\\q=0,25,\end{cases}\ \begin{cases}p=2,\\q=1.\end{cases}$

2. Целые числа $n>1$ и $k>0$ таковы, что $a_k=S_n$, где $a_k=\frac{2k+5}{3}$ – арифметическая прогрессия; S_n – сумма *n* ее членов. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение *k*.

Ответ: $k=11$ при $n=3$.

3. Доказать, что выражение $3^{2n+1}+2^{n+2}$ делится на 7 при любых целых, положительных *n*.

4. Найти наименьшее значение величины $a-3b$, если *a* и *b* – целые числа, а уравнение $ax^2-bx-19=0$ имеет только целые решения.

Ответ: -133 при $a=-19, b=38$.

5. Точка *D* делит сторону *AC* треугольника *ABC* так, что $AD:DC=1:3$. Найти такую точку *E* на стороне треугольника *ABC*, что прямая *DE* делит треугольник на две равновеликие части.

Ответ: точка *E* находится на стороне *BC* так, что $CE:BC=2:3$.

Вариант № 3

1. Найти числа p и q, если известно, что они являются решениями уравнения $3x^2 - 4qx + 3p = 0$.

Ответ: $\begin{cases} p = 0, \\ q = 0, \end{cases} \begin{cases} p = \dfrac{1}{3}, \\ q = 1, \end{cases} \begin{cases} p = 3, \\ q = 3. \end{cases}$

2. Целые числа $n > 1$ и $k > 0$ таковы, что $a_k = S_n$, где $a_k = \dfrac{k+3}{4}$ – арифметическая прогрессия; S_n – сумма n ее членов. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение k.

Ответ: $k = 6$ при $n = 2$.

3. Доказать, что выражение $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ делится на 11 при любых целых, положительных n.

4. Найти наибольшее значение величины $3a - b$, если a и b – целые числа, а уравнение $ax^2 + 2bx + 17 = 0$ имеет только целые решения.

Ответ: 68 при $a = 17, b = -17$.

5. Точка D делит сторону AC треугольника ABC так, что $AD : DC = 5 : 4$. Найти такую точку E на стороне треугольника ABC, что прямая DE делит треугольник на две равновеликие части.

Ответ: точка E находится на стороне AB так, что $AE : AB = 9 : 10$.

Вариант № 4

1. Найти числа p и q, если известно, что они являются решениями уравнения $x^2 + qx - 3q = 0$.

Ответ: $\begin{cases} p = 0, \\ q = 0, \end{cases} \begin{cases} p = -3, \\ q = 1{,}5, \end{cases} \begin{cases} p = 1{,}5, \\ q = 1{,}5. \end{cases}$

2. Целые числа $n>1$ и $k>0$ таковы, что $a_k = S_n$, где $a_k = \dfrac{2k-3}{5}$ – арифметическая прогрессия; S_n – сумма n ее членов. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение k.

Ответ: $k=3$ при $n=3$.

3. Доказать, что выражение $3^{4n+4}+4^{3n+1}$ делится на 17 при любых целых, положительных n.

4. Найти наименьшее значение величины $-2a+b$, если a и b – целые числа, а уравнение $ax^2-3bx+13=0$ имеет только целые решения.

Ответ: -2 при $a=-1, b=-4$.

5. Точка D делит сторону AC треугольника ABC так, что $AD:DC=3:7$. Найти такую точку E на стороне треугольника ABC, что прямая DE делит треугольник на две равновеликие части.

Ответ: точка E находится на стороне BC так, что $CE:BC=5:7$.

4.1.4. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 10 класс

Вариант № 1

1. Найти числа a, b, c, для которых многочлен

$$P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+9$$

является квадратом многочлена второй степени при условии, что $P(1)=9$.

2. Площадь прямоугольного треугольника составляет $\dfrac{\sqrt{3}}{14}$ суммы площадей квадратов, построенных на гипотенузе и большем катете. Найти острые углы треугольника.

3. В банке купили монеты достоинством 1 дол., 1 евро и 1 фунт стерлингов. Всего 100 монет. Цена монет на день покупки составляла: 1 дол. – 32 руб., 1 евро – 40 руб., 1 фунт стерлингов – 50 руб. На всю покупку затратили 3930 руб. Какое максимальное количество долларов могло быть куплено?

4. Найти минимальное значение величины $a^2+b^2+c^2$, где $a\neq 0$, b и c – целые числа, для которых уравнение

$$ax^3+bx^2+cx+7=0$$

имеет ровно два целых решения.

5. В прямоугольный треугольник вписано два квадрата. У первого основание лежит на гипотенузе, а две другие вершины на катетах. У второго – две вершины на катетах, третья – в вершине прямого угла, а четвертая – на гипотенузе. Площадь первого квадрата $\left(\frac{60}{37}\right)^2$, второго – $\frac{144}{49}$. Найти площадь треугольника.

Ответы и решения

1. Поскольку у многочлена $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+9$ старший коэффициент 1, а младший – 9, то у многочлена второй степени, квадратом которого является $P(x)$, старший коэффициент равен 1, а младший – (± 3):

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+9=\left(x^2+dx\pm 3\right)^2,$$

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+9=x^4+2dx^3+\left(d^2\pm 6\right)x^2\pm 6dx+9.$$

Многочлены тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при каждой степени x:

$$\begin{cases} a=2d, \\ b=d^2\pm 6, \\ c=\pm 6d. \end{cases}$$

По условию $P(1)=9$, т.е. $1+a+b+c+9=9$, или $1+a+b+c=0$. Подставим сюда a, b, c, выраженные через d:

$$1+2d+d^2\pm 6\pm 6d=0. \qquad (*)$$

Рассмотрим равенство (*) при знаке плюс:

$$d^2+8d+7=0, \quad \left[\begin{array}{l} d=-1, \\ d=-7. \end{array}\right.$$

Тогда при $d=-1$ имеем:

$$\begin{cases} a = 2d = -2, \\ b = d^2 + 6 = 7, \\ c = 6d = -6, \end{cases}$$

т.е. $P(x) = \left(x^2 - x + 3\right)^2$, $P(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9$.

При $d = -7$ имеем:

$$\begin{cases} a = 2d = -14, \\ b = d^2 + 6 = 55, \\ c = 6d = -42, \end{cases}$$

т.е. $P(x) = \left(x^2 - 7x + 3\right)^2$, $P(x) = x^4 - 14x^3 + 55x^2 - 42x + 9$.

Рассмотрим равенство (*) при знаке «минус»:

$$d^2 - 4d - 5 = 0, \quad \left[\begin{array}{l} d = -1, \\ d = 5. \end{array}\right.$$

Тогда при $d = -1$ имеем:

$$\begin{cases} a = 2d = -2, \\ b = d^2 - 6 = -5, \\ c = -6d = 6, \end{cases}$$

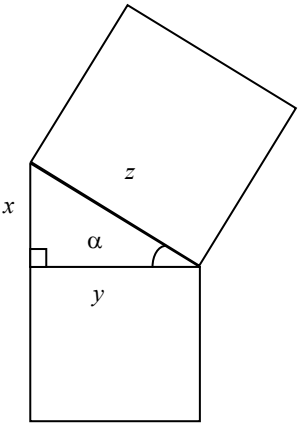
т.е. $P(x) = \left(x^2 - x - 3\right)^2$, $P(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x + 9$.

При $d = 5$ имеем:

$$\begin{cases} a = 2d = 10, \\ b = d^2 - 6 = 19, \\ c = -6d = -30, \end{cases}$$

т.е. $P(x) = \left(x^2 + 5x - 3\right)^2$, $P(x) = x^4 + 10x^3 + 19x^2 - 30x + 9$.

Ответ: $\begin{cases} a = -2, \\ b = 7, \\ c = -6, \end{cases} \begin{cases} a = -14, \\ b = 55, \\ c = -42, \end{cases} \begin{cases} a = -2, \\ b = -5, \\ c = 6, \end{cases} \begin{cases} a = 10, \\ b = 19, \\ c = -30. \end{cases}$



2. Пусть меньший катет прямоугольного треугольника равен x, больший – y, гипотенуза – z. Тогда по условию $\frac{1}{2}xy=\frac{\sqrt{3}}{14}\left(z^2+y^2\right)$. По теореме Пифагора $z^2=x^2+y^2$, поэтому

$$\frac{1}{2}xy=\frac{\sqrt{3}}{14}\left(x^2+2y^2\right).$$

Умножим обе части этого уравнения на

$$\frac{14}{y^2}>0:\ 7\frac{x}{y}=\sqrt{3}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\right).$$

Обозначим $\frac{x}{y}=t<1,$ так как $x<y.$ Получим:

$$7t=\sqrt{3}\left(t^2+2\right),\quad \sqrt{3}t^2-7t+2\sqrt{3}=0,$$

$t_1=2\sqrt{3}>1$ – не подходит, $t_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Заметим, что $t=\frac{x}{y}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},$ поэтому $\alpha=30°,$ а второй острый угол равен $90°-30°=60°.$

Ответ: 30°, 60°.

3. Пусть купили долларов x монет, а евро – y монет и фунтов –z монет. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} x+y+z=100, & (1)\\ 32x+40y+50z=3930, & (2)\\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0. & (3)\end{cases}$$

Из (2) получим:

$$32x=3930-40y-50z=10\left(393-4y-5z\right),$$

$$16x=5\left(393-4y-5z\right).$$

Правая часть этого равенства кратна 5, поэтому и левая часть должна быть кратна 5, но 32 на 5 не делится, поэтому x должно быть кратно 5: $x=5k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots$ Тогда получим

$$16\cdot 5k=5\left(393-4y-5z\right),\quad 16\cdot k=393-4y-5z.$$

Итак:

$$\begin{cases} 5k + y + z = 100, & (1') \\ 16k + 4y + 5z = 393. & (2') \end{cases}$$

Из последней системы выразим y и z через k: $y = 107 - 9k$, $z = 4k - 7$. Согласно (3), $y \geq 0$: $107 - 9k \geq 0$, $k \leq \frac{107}{9} = 11\frac{8}{9}$, но $k \in Z$, тогда $k \leq 11$.

Согласно (3), $z \geq 0$: $4k - 7 \geq 0$, $k \geq \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$, но $k \in Z$, тогда $k \geq 2$ (условие (3), $x \geq 0$ выполняется автоматически). Итак, $2 \leq k \leq 11$, и максимальное количество долларов, которое могло быть куплено, равно 55.

Ответ: 55.

4. Так как уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + 7 = 0$ имеет целые коэффициенты, то возможные целые корни находятся среди чисел $\pm 1, \pm 7$. Если x_1, x_2, x_3 – корни заданного уравнения, то по теореме Виета имеем:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{7}{a}.$$

Данное уравнение имеет ровно два различных целых решения в следующих девяти случаях (и только в них):

1) $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -7 \left(a = 1\right)$, тогда

$$\left(x-1\right)^2 \left(x+7\right) = x^3 + 5x^2 - 13x + 7,$$

т.е. $b = 5, c = -13$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 25 + 169 = 195$;

2) $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 7 \left(a = -1\right)$, тогда

$$\left(x-1\right)^2 \left(-x+7\right) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 7,$$

т.е. $b = 9, c = -15$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 81 + 225 = 307$;

3) $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = -7 \left(a = 1\right)$, тогда

$$\left(x+1\right)^2 \left(x+7\right) = x^3 + 9x^2 + 15x + 7,$$

т.е. $b = 9, c = 15$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 81 + 225 = 307$;

4) $x_1 = x_2 = -1,\ x_3 = 7\ (a = -1)$, тогда

$$(x-1)^2(-x+7) = -x^3 + 5x^2 + 13x + 7,$$

т.е. $b = 5, c = 13,\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 + 25 + 169 = 195;$

5) $x_1 = 1, x_2 = -1,\ x_3 = \frac{7}{a}\ (a \neq 0, \pm 1, \pm 7)$, тогда

$$(x^2 - 1)(ax - 7) = ax^3 - 7x^2 - ax + 7,$$

т.е. $b = -7, c = -a,\ \min(a^2 + b^2 + c^2) = (2a^2 + 49)\big|_{a=\pm 2} = 57$

(замечание: если $a = \pm 1$, то $\min(a^2 + b^2 + c^2) = 51$; тогда уравнение имеет три различных целых корня);

6) $x_1 = 1, x_2 = 7,\ x_3 = -\frac{1}{a}\ (a \neq 0, \pm 1)$, тогда

$$(x-1)(x+7)(ax+1) = ax^3 + (1-8a)x^2 + (7a-8)x + 7,$$

т.е. $b = 1 - 8a, c = 7a - 8,$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (1-8a)^2 + (7a-8)^2 = 114a^2 - 128a + 65,$$

так как $a \neq 0; 1,\ \min(a^2 + b^2 + c^2) = (114a^2 - 128a + 65)\big|_{a=2} = 265;$

7) $x_1 = 1, x_2 = -7,\ x_3 = \frac{1}{a}\ (a \neq 0, \pm 1)$, тогда

$$(x-1)(x+7)(ax-1) = ax^3 + (6a-1)x^2 - (7a+6)x + 7,$$

т.е. $b = 6a - 1, c = -7a - 6,$

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (6a-1)^2 + (7a+6)^2 = 86a^2 + 72a + 37,$$

так как $a \neq 0; -1,$

$$\min(a^2 + b^2 + c^2) = (86a^2 + 72a + 37)\big|_{a=-2} = 237;$$

8) $x_1 = -1, x_2 = 7,\ x_3 = \frac{1}{a}\ (a \neq 0, \pm 1)$, тогда

$$(x+1)(x+7)(ax-1) = ax^3 - (1+6a)x^2 + (6-7a)x + 7,$$

т.е. $b = -(1+6a), c = 6 - 7a,$

$$a^2+b^2+c^2=a^2+\left(-(1+6a)\right)^2+(6-7a)^2=114a^2-128a+65,$$

так как $a\neq 0;1,\ \min\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(86a^2-72a+37\right)\big|_{a=2}=237;$

9) $x_1=-1, x_2=-7,\ x_3=-\dfrac{1}{a}\left(a\neq 0,\pm 1\right),$ тогда

$$(x+1)(x+7)(ax+1)=ax^3+(1+8a)x^2+(7a+8)x+7,$$

т.е. $b=1+8a, c=7a+8,$

$$a^2+b^2+c^2==a^2+(1-8a)^2+(7a-8)^2=114a^2+128a+65,$$

так как $a\neq 0;-1,\ \min\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(114a^2+128a+65\right)\big|_{a=-2}=265.$

Отбирая минимальное значение величины $a^2+b^2+c^2$ в рассмотренных случаях, находим, что оно равно 57 (случай 5)).

Ответ: 57.

5. Из условия задачи следует (см. рисунок), что

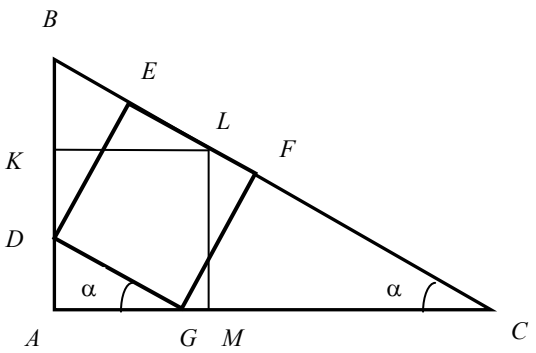
$$EF=DE=DG=GF=\frac{60}{37},\ \ AK=KL=LM=AM=\frac{12}{7}.$$

Пусть $\angle C=\alpha,$ тогда

$$\angle AGD=\alpha,\quad AG=GD\cos\alpha=\frac{60}{37}\cos\alpha,\quad GC=\frac{GF}{\sin\alpha}=\frac{60}{37\sin\alpha},$$

$$AG+GC=\frac{60}{37\sin\alpha}+\frac{60}{37}\cos\alpha=AC,$$

$$MC=LM\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\frac{12}{7}\operatorname{ctg}\alpha,\quad AM+MC=\frac{12}{7}(1+\operatorname{ctg}\alpha)=AC.$$



Приравнивая величину $AG+GC=AC$ к величине $AM+MC=AC$, получим:

$$\frac{60}{37\sin\alpha}+\frac{60}{37}\cos\alpha=\frac{12}{7}\left(1+\operatorname{ctg}\alpha\right),$$
$$\frac{60}{37}\cdot\frac{1+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{12}{7}\cdot\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha},$$
$$35\left(1+\cos\alpha\sin\alpha\right)=37\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right).$$

Пусть $\sin\alpha+\cos\alpha=t\in\left(1;\sqrt{2}\right]$, тогда

$$\sin 2\alpha=t^2-1>0,\quad \sin\alpha\cos\alpha=\frac{t^2-1}{2},$$

и из последнего уравнения найдём:

$$35\left(1+\frac{t^2-1}{2}\right)=37t,\quad 35t^2-74t+35=0,\quad \left(5t-7\right)\left(7t-5\right)=0,$$

так как $t>1$, то

$$t=\frac{7}{5},\quad \sin\alpha\cos\alpha=\frac{(1,4)^2-1}{2}=\frac{12}{25},\quad \cos 2\alpha=\sqrt{1-\sin 2\alpha}=\frac{7}{25},$$
$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\frac{3}{5},\quad \cos\alpha=\frac{4}{5},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3},$$
$$AC=\frac{12}{7}\left(1+\frac{4}{3}\right)=4,\quad AB=3,\quad S_{\Delta ABC}==\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6.$$

Ответ: 6.

Вариант № 2

1. Найти числа a, b, c, для которых многочлен $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ является квадратом многочлена второй степени при условии, что $P(-1)=1$.

Ответ: $\begin{cases}a=2,\\ b=3,\\ c=2,\end{cases}$ $\begin{cases}a=6,\\ b=11,\\ c=6,\end{cases}$ $\begin{cases}a=2,\\ b=-1,\\ c=-2,\end{cases}$ $\begin{cases}a=-2,\\ b=-1,\\ c=2.\end{cases}$

2. Площадь прямоугольного треугольника в 16 раз меньше суммы площадей квадратов, построенных на его сторонах. Найти острые углы треугольника.

Ответ: $15°,\ 75°$ $\left(\text{указание: } \operatorname{arctg}\left(2-\sqrt{3}\right)=\dfrac{\pi}{12}\right)$.

3. В банке купили монеты достоинством: 1 евро,1 фунт стерлингов и 1 швейцарский франк. Всего 60 монет. Цена монет на день покупки составляла: 1 евро – 40 руб., 1 фунт стерлингов – 50 руб., 1 франк – 33 руб. На всю покупку затратили 2715 руб. Какое минимальное количество франков могло быть куплено?

Ответ: 5.

4. Найти минимальное значение величины

$$(a-1)^2+(b+1)^2+(c-2)^2,$$

где $a\neq 0, b$ и c – целые числа, для которых уравнение

$$ax^3+bx^2+cx+5=0$$

имеет не менее двух целых решений.

Ответ: $\left((a-1)^2+(b+1)^2+(c-2)^2\right)_{\min}=21$ при $a=-1,\ \ b=-5,$ $c=1$.

5. В прямоугольный треугольник вписано два квадрата. У первого основание лежит на гипотенузе, а две другие вершины находятся на катетах. У второго – две вершины на катетах, третья – в вершине прямого угла, а четвертая – на гипотенузе. Площадь первого квадрата 8, второго – 9. Найти острые углы треугольника.

Ответ: $45°,\ 45°$.

Вариант № 3

1. Найти числа a, b, c, для которых многочлен $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+16$ является квадратом многочлена второй степени при условии, что $P(1)=4$.

Ответ: $\begin{cases} a=-6, \\ b=17, \\ c=-24, \end{cases}$ $\begin{cases} a=-14, \\ b=57, \\ c=-56, \end{cases}$ $\begin{cases} a=2, \\ b=-7, \\ c=-8, \end{cases}$ $\begin{cases} a=10, \\ b=17, \\ c=-40. \end{cases}$

2. Площадь прямоугольного треугольника в четыре раза меньше абсолютного значения разности площадей квадратов, построенных на его катетах. Найти углы треугольника.

Ответ: $22{,}5°,\ 67{,}5°$ $\left(\text{указание: } \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{\pi}{8}\right)$.

3. В банке купили монеты достоинством 1 фунт стерлингов, 1 швейцарский франк и 1 китайский юань. Всего 72 монеты. Цена монет на день покупки составляла: 1 фунт – 50 руб., 1 франк – 33 руб., 1 юань – 5 руб. На всю покупку затратили 2410 руб. Какое максимальное количество юаней могло быть куплено?

Ответ: 17.

4. Найти минимальное значение величины $(a+1)^2+(b-1)^2+c^2$, где $a\neq 0, b$ и c – целые числа, для которых уравнение $ax^3+bx^2+cx-3=0$ имеет ровно два целых решения.

Ответ: $((a+1)^2+(b-1)^2+c^2)_{\min}=9$ при $a=-2,\ \ b=3,\ \ c=2$ ($x_1=1, x_2=-1, x_3=3/2$).

5. В прямоугольный треугольник вписано два квадрата. У первого основание лежит на гипотенузе, а две другие вершины находятся на катетах. У второго – две вершины на катетах, третья – в вершине прямого угла, а четвертая – на гипотенузе. Площадь первого квадрата $\frac{20}{49}$, второго – $\frac{4}{9}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Вариант № 4

1. Найти числа a, b, c, для которых многочлен $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+4$ является квадратом многочлена второй степени при условии, что $P(-1)=1$.

Ответ: $\begin{cases} a=8, \\ b=20, \\ c=16, \end{cases}$ $\begin{cases} a=4, \\ b=8, \\ c=8, \end{cases}$ $\begin{cases} a=0, \\ b=-4, \\ c=0, \end{cases}$ $\begin{cases} a=-4, \\ b=0, \\ c=8. \end{cases}$

2. Площадь прямоугольного треугольника в 6 раз меньше суммы площадей квадратов, построенных на его медианах. Найти острые углы треугольника.

Ответ: $45°, 45°$.

3. В банке купили монеты достоинством 1 швейцарский франк, 1 китайский юань и 1 украинская гривна. Всего 130 монет. Цена монет на день покупки составляла: 1 франк – 33 руб., 1 юань – 5 руб., 1 гривна – 4 руб. На всю покупку затратили 1085 руб. Какое минимальное количество франков могло быть куплено?

Ответ: 16.

4. Найти минимальное значение величины $a^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2$, где $a \neq 0, b$ и c – целые числа, для которых уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + 2 = 0$$

имеет хотя бы два целых решения.

Ответ: $(a^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2))_{\min} = 9$ при $a = -1, \quad b = 0, \quad c = 3$ ($x_1 = x_2 = -1, x_3 = 2$).

5. В прямоугольный треугольник вписано два квадрата. У первого основание лежит на гипотенузе, а две другие вершины находятся на катетах. У второго – две вершины на катетах, третья в вершине прямого угла, а четвертая – на гипотенузе. Площадь первого квадрата 144, второго – 150. Найти наименьший угол треугольника.

Ответ: $15°$.

4.1.5. Олимпиада имени профессора И.В. Савельева, 11 класс

Вариант № 1

1. Найти целые числа x, для которых выражение $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 5}{x^2 + 2x - 3}$ принимает целые значения.

2. Изобразить на единичном тригонометрическом круге точки, соответствующие решениям уравнения:

$$16\left(\cos^6 x - \sin^6 x\right) - 9\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right) - 10\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + 3 = 0.$$

3. Отмеченные точки являются вершинами многоугольника, вписанного в круг. Найти его площадь.

4. Луг размером 100 га с учетом постоянного роста травы может прокормить 32 коровы в течение 180 дней, а точно такой же луг, но размером 50 га, может обеспечить кормом 20 коров в течение 80 дней. Сколько коров могут найти себе корм на лугу в 30 га в течение 36 дней, если количество травы, потребляемой коровой каждый день, скорость произрастания травы на 1 га луга постоянные?

5. Найти наибольшее целое значение a, при котором уравнение $4x^2 + ax - 5 = 0$ имеет рациональные корни.

6. При каких значениях p отрезок [1; 2] принадлежит множеству E_y значений функции $f(x) = \dfrac{x^2 - px + 3}{x - 1}$?

7. Бильярдный стол имеет форму круга радиусом $2\sqrt{2}$, с центром в точке O. Шар расположен в точке M, находящейся на расстоянии 1 от точки O. Под каким углом к лучу OM надо послать шар, чтобы он, дважды отразившись от борта, прошел через точку M? Отражение шара от борта подчиняется правилу математического бильярда: шар – точка, угол «падения» шара на касательную, проведенную в точке соприкосновения шара в бортом, равен углу «отражения» шара от той же касательной. Запрещается направлять шар по прямой OM.

Ответы и решения

1. Разделим $x^3 + 3x + 5$ на $x^2 + 2x + 3$ с остатком:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 5}{x^2 + 2x - 3} = x + 1 + \frac{x + 8}{x^2 + 2x - 3}.$$

Это выражение при целых значениях x является целым числом тогда и только тогда, когда является целым числом дробь $\dfrac{x + 8}{x^2 + 2x - 3}$.

Эта дробь равна нулю при $x = -8$ (целое число). Другие целые значения дроби возможны при

$$\left|\frac{x + 8}{x^2 + 2x - 3}\right| \geq 1: \quad \begin{cases} |x + 8| \geq |x^2 + 2x - 3|, & (1) \\ x \neq -3; 1. & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим (1):

$$|x+8| \geq |x^2+2x-3| \Leftrightarrow |x+8|^2 \geq |x^2+2x-3|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+8)^2 \geq (x^2+2x-3)^2 \Leftrightarrow 0 \geq (x^2+2x-3)^2 - (x+8)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq (x^2+2x-3-x-8)(x^2+2x-3+x+8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-11)(x^2+3x+5) \leq 0 \Leftrightarrow x^2+x-11 \leq 0.$$

Отсюда $x \in \left[\frac{-1-3\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+3\sqrt{5}}{2}\right]$. Поскольку $-4 < \frac{-1-3\sqrt{5}}{2} < -3$, $2 < \frac{-1+3\sqrt{5}}{2} < 3$, а $x \in Z$, то $x \in \{-3,-2,-1,0,1,2\}$. С учётом (2): $x \in \{-2,-1,0,2\}$. Подставим найденные значения x в выражение $\frac{x+8}{x^2+2x-3}$, дробь принимает целые значения только для $x \in \{-2,2\}$.

Ответ: $x \in \{-8,-2,2\}$.

2. Поскольку

$$1 = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = \cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x,$$

то $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$, и

$$\cos^6 x - \sin^6 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^4 x) =$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)(1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x) =$$

$$\cos 2x \cdot (1 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x).$$

Также $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos 2x$. Тогда исходное уравнение $16(\cos^6 x - \sin^6 x) - 9(\cos^4 x - \sin^4 x) - 10(\cos^2 x - \sin^2 x) + 3 = 0$ принимает вид:

$$16\cos 2x \cdot (1 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x) - 9\cos 2x - 10\cos 2x + 3 = 0,$$

$$\cos 2x \cdot (16 - 16\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 9 - 10) + 3 = 0,$$

$$\cos 2x \cdot \left(-4 \cdot (2\sin x \cdot \cos x)^2 - 3\right) + 3 = 0,$$

$$\cos 2x \cdot \left(-4 \cdot \sin^2 2x - 3\right) + 3 = 0, \quad \cos 2x \cdot \left(-4 + 4\cos^2 2x - 3\right) + 3 = 0.$$

Раскрывая скобки, получим: $4\cos^3 2x - 7\cos 2x + 3 = 0.$

Пусть $\cos 2x = t \in [-1;1]$, тогда

$$4t^3 - 7t + 3 = 0. \qquad (*)$$

Так как сумма коэффициентов уравнения равна нулю, то $t = 1$ – корень уравнения (*). Другие его корни найдём разделив многочлен $4t^3 - 7t + 3$ на $t - 1$, откуда $4t^3 - 7t + 3 = (t-1)\cdot\left(4t^2 + 4t - 3\right)$, итак $t = 1$, $t = -1{,}5$, $t = 0{,}5$. Поскольку $t \in [-1;1]$, то $t = 1$, $t = 0{,}5$.

Значит, $\cos 2x = 1$ и $\cos 2x = 0{,}5$, а

$$x = \pi k, k \in Z \quad \text{и} \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

На единичном тригонометрическом круге отметим точки, соответствующие решениям уравнения. Отмеченные точки являются вершинами шестиугольника с координатами $\left(0{,}5\sqrt{3}; \pm 0{,}5\right)$, $\left(-0{,}5\sqrt{3}; \pm 0{,}5\right)$, $(\pm 1; 0)$. Площадь этого шестиугольника равна удвоенной площади равнобедренной трапеции с основаниями, равными $\sqrt{3}$ и 2, и высотой $\frac{1}{2}$. $S = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}+2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$

Ответ: $S = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$

3. Пусть первоначально на 1 га луга располагается x кг травы, скорость произрастания травы на 1 га луга составляет y кг в день, а количество травы, потребляемое коровой каждый день, – z кг. Тогда, согласно условию задачи, имеем систему:

$$\begin{cases} 100x + 100 \cdot 180y = 32 \cdot 180z, & (1) \\ 50x + 50 \cdot 80y = 20 \cdot 80z, & (2) \\ 30x + 30 \cdot 36y = N \cdot 36z, & (3) \end{cases}$$

где N – искомое количество коров. Из (3) выразим N:

$$N=\frac{30+30\cdot 36y}{36z}=\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{x}{z}+36\cdot\frac{y}{z}\right)=\frac{5}{6}\cdot\left(a+36\cdot b\right),$$

где введены обозначения: $a=\frac{x}{z},\ b=\frac{y}{z}$. Имеем:

$$\begin{cases}10a+1800b=32\cdot 18,\\ a+80b=32.\end{cases}$$

Решая систему, находим

$$a=\frac{288}{25},\quad b=\frac{32}{125},$$

тогда $N=\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{288}{25}+36\cdot\frac{32}{125}\right)=\frac{432}{25}=17,28.$

Ответ: 17 коров.

4. Уравнение $4x^2+ax-5=0$ с целыми коэффициентами может иметь только такие рациональные корни:

$$\pm 1,\pm 5,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{5}{2},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{5}{4}.$$

Если один из корней равен одному из указанных чисел, то и другой рациональный корень также из этого списка, так как по теореме Виета произведение корней квадратного уравнения равно $\left(-\frac{5}{4}\right)$.

Рассмотрим все возможные варианты:

1) $x_1=1, x_2=-\frac{5}{4},$ то $4+a-5=0,\ a=1;$

2) $x_1=-1, x_2=\frac{5}{4},$ то $4-a-5=0,\ a=-1;$

3) $x_1=5, x_2=-\frac{1}{4},$ то $100+5a-5=0,\ a=-19;$

4) $x_1=-5, x_2=\frac{1}{4},$ то $100-5a-5=0,\ a=19;$

5) $x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{5}{2},$ то $1+\frac{a}{2}-5=0,\ a=8;$

6) $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{5}{2},$ то $1-\frac{a}{2}-5=0,\ a=-8.$

Далее – повторение корней.
Ответ: 19.

5. Найдём производную функции $f(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-px+3}{x-1}\right)'=\frac{(2x-p)(x-1)-(x^2-px+3)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{x^2-2x+p-3}{(x-1)^2};\quad f'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+p-3=0,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

Для квадратного трёхчлена $x^2-2x+p-3$ имеем: $\frac{D}{4}=4-p$, поэтому при $p>4$ корней нет ($f'(x)>0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ и функция $f(x)$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$); при $p<4$ имеем два экстремума: $x=1\pm\sqrt{4-p}$.

Если $p=4$, то график функции – прямая $f(x)=x-3$ с выколотой точкой $x=1, y=-2$. Тогда $E_y=E(f)=R\setminus\{-2\}$, и отрезок $[1;2]$ принадлежит множеству значений функции $f(x)$ таким образом, $p=4$ – одно из искомых значений параметра.

Если $p\neq 4$, то $f(x)=x+1-p+\frac{4-p}{x-1}$; график функции $f(x)$ имеет две асимптоты: вертикальную $x=1$ и наклонную $y=x+1-p$.

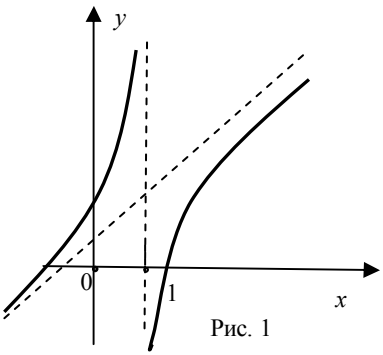


Рис. 1

При $p>4$, как мы выяснили ранее, функция не имеет экстремумов и возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$; её график изображен на рис. 1. В этом случае $E_y=E(f)=R\supset[1;2]$, поэтому все значения параметра $p\in(4;+\infty)$ являются искомыми.

Теперь рассмотрим $p < 4$. График функции $f(x)$ изображен на рис. 2. В этом случае

$$E_y = E(f) =$$

$$= (-\infty; f(x_1)] \cup [f(x_2); +\infty),$$

причём

$$[1;2] \subset E_y \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x_1) \geq 2, & (1) \\ f(x_2) \leq 1. & (2) \end{cases}$$

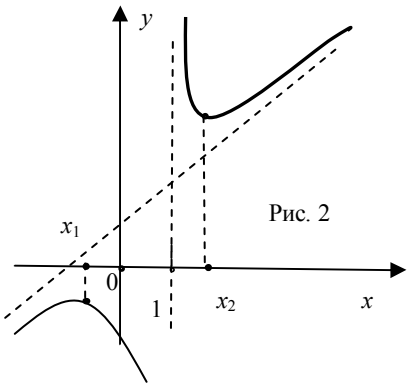


Рис. 2

Неравенство (1) соответствует рис. 3, а неравенство (2) – рис. 4.

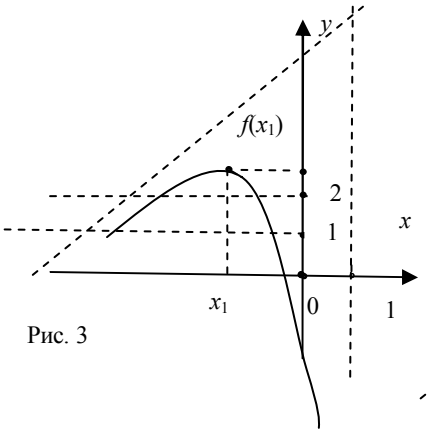


Рис. 3

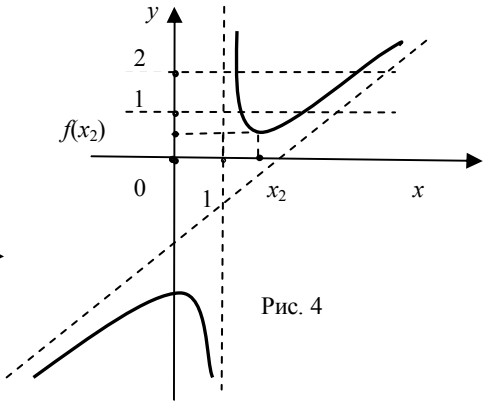


Рис. 4

Итак, имеем:

$$\begin{cases} f\left(1-\sqrt{4-p}\right) \geq 2, & (1) \\ f\left(1+\sqrt{4-p}\right) \leq 1. & (2) \end{cases}$$

После подстановки и приведения подобных получим:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{(p-2)\sqrt{4-p}+8-2p}{\sqrt{4-p}}+2\le 0,\\ \dfrac{(p-2)\sqrt{4-p}+8-2p}{\sqrt{4-p}}-1\le 0,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p\sqrt{4-p}+8-2p\le 0,\\ (p-1)\sqrt{4-p}+8-2p\le 0.\end{array}\right.$$

Так как $p<4,$ то, разделив на $\sqrt{4-p},$ запишем:

$$\left[\begin{array}{l} p+2\sqrt{4-p}\le 0, \qquad (1)\\ (p-1)+2\sqrt{4-p}\le 0. \qquad (2)\end{array}\right.$$

Решая каждое из полученных неравенств, из (1) имеем:

$$p\le -2-2\sqrt{5},$$

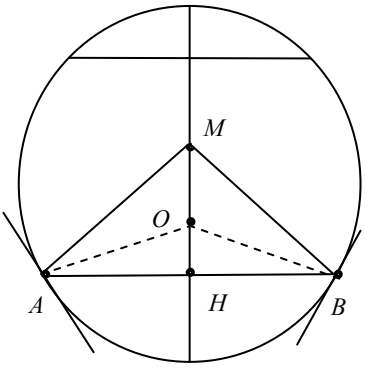
а из (2):

$$3\le p<4.$$

Объединяя все найденные значения параметра, получаем:

$$p\in\left(-\infty;-2-2\sqrt{5}\right]\cup[3;+\infty).$$

Ответ: $p\in\left(-\infty;-2-2\sqrt{5}\right]\cup[3;+\infty).$



6. Рассмотрим такую траекторию шара MAB при которой хорда $AB\perp OM,$ тогда после отражения в точке B шар попадёт опять в точку M $(\Delta AMH=\Delta BMH)$. Так как хорда перпендикулярна диаметру, то точкой пересечения с диаметром она делится пополам: $AH=BH$. Тогда прямоугольные треугольники AOH и BOH равны по двум катетам (OH – общий). Тогда

$$\angle OBH=\angle OAH=\beta;$$

$$\angle MBH=\angle MAH=2\beta,$$

и после отражения в точке B шар действительно попадает в точку M.

Если траектория MA пойдёт «выше» или «ниже» указанной (например, $AM \perp OM$), то после вторичного отражения траектория шара пересечёт прямую OM в точке, отличной от точки M (это следует из свойств биссектрисы треугольника).

В прямоугольном ΔAMH искомый угол

$$\alpha = \angle AMH = \frac{\pi}{2} - \angle MAH = \frac{\pi}{2} - 2\beta;$$

по теореме синусов для ΔAMO имеем:

$$\frac{AO}{\sin\alpha} = \frac{MO}{\sin\beta} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right)} = \frac{1}{\sin\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\cos 2\beta} = \frac{1}{\sin\beta} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\beta = 1 - 2\sin^2\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\beta + 2\sqrt{2}\sin\beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\beta = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда $\beta = \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Вариант № 2

1. Найти целые числа x, для которых выражение $\frac{x^3 + 4x^2 + 4}{x^2 + x - 2}$ принимает целые значения.

Ответ: $x = 0; 2; 10$.

2. Изобразить на единичном тригонометрическом круге точки, соответствующие решениям уравнения:

$$16\left(\cos^6 x - \sin^6 x\right) - 7\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right) - 8\left(\cos^2 x - \sin 2x\right) + 1 = 0.$$

Отмеченные точки являются вершинами многоугольника, вписанного в круг. Найти его площадь.

Ответ: $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

3. Луг размером 200 га с учетом постоянного роста травы может прокормить 76 коров в течение 120 дней, а точно такой же луг, но размером 25 га, может обеспечить кормом 15 коров в течение 54. Сколько коров могут найти себе корм на лугу в 100 га в течение 90 дней, если количество травы, потребляемой коровой каждый день, скорость произрастания травы на 1 га луга – постоянные?

Ответ: 44 коровы.

4. Найти наименьшее целое значение a, при котором уравнение $2x^2 - ax - 3 = 0$ имеет рациональные корни.

Ответ: $a = -5$.

5. При каких значениях p отрезок $[-1; 3]$ принадлежит множеству E_y значений функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + p}{x - 2}$?

Ответ: $p \in \left(-\infty; -\dfrac{23}{4}\right]$.

6. Бильярдный стол имеет форму круга радиусом 3, с центром в точке O. Шар расположен в точке M, находящейся на расстоянии $\sqrt{2}$ от точки O. Под каким углом к лучу OM надо послать шар, чтобы он, дважды отразившись от борта, прошел через точку M? Отражение шара от борта подчиняется правилу математического бильярда: шар – точка, угол «падения» шара на касательную, проведенную в точке соприкосновения шара в бортом, равен углу «отражения» шара от той же касательной. Запрещается направлять шар по прямой OM.

Ответ: $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - 2\beta$, где $\beta = \arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Вариант № 3

1. Найти целые числа x, для которых выражение $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 4}{x^2 - x - 1}$ принимает целые значения.

Ответ: $x = -1; 0; 1; 2; 5$.

2. Изобразить на единичном тригонометрическом круге точки, соответствующие решениям уравнения:

$$48\left(\cos^6 x - \sin^6 x\right) - 16\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right) - 41\left(\cos^2 x - \sin 2x\right) - 9 = 0.$$

Отмеченные точки являются вершинами многоугольника, вписанного в круг. Найти его площадь.

Ответ: $S = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Луг размером 50 га с учетом постоянного роста травы может прокормить 37 коров в течение 40 дней, а точно такой же луг, но размером 15 га, может обеспечить кормом 9 коров в течение 54. Сколько коров могут найти себе корм на лугу в 45 га в течение 36 дней, если количество травы, потребляемой коровой каждый день, скорость произрастания травы на 1 га луга – постоянные?

Ответ: 36 коров.

4. Найти все целые значение *a*, при котором уравнение $6x^2 + ax - 7 = 0$ имеет рациональные корни.

Ответ: $a = \pm 1; \pm 11; \pm 19; \pm 41$.

5. При каких значениях *p* отрезок $[-3; 4]$ принадлежит множеству E_y значений функции $f(x) = \dfrac{3x^2 + px + 16}{x + 1}$?

Ответ: $p \in \left(-\infty; -3 - 2\sqrt{57}\right] \cup [16; +\infty)$.

6. Бильярдный стол имеет форму круга радиусом $\sqrt{14}$, с центром в точке *O*. Шар расположен в точке *M*, находящейся на расстоянии 0,5 от точки *O*. Под каким углом к лучу *OM* надо послать шар, чтобы он, дважды отразившись от борта, прошел через точку *M*? Отражение шара от борта подчиняется правилу математического бильярда: шар – точка, угол «падения» шара на касательную, проведенную в точке соприкосновения шара в бортом, равен углу «отражения» шара от той же касательной. Запрещается направлять шар по прямой *OM*.

Ответ: $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - 2\beta$, где $\beta = \arcsin\dfrac{4 - \sqrt{14}}{2}$.

Вариант № 4

1. Найти целые числа x, для которых выражение $\dfrac{x^3-2x+5}{x^2-2x-3}$ принимает целые значения.

Ответ: $x=1;2;5$.

2. Изобразить на единичном тригонометрическом круге точки, соответствующие решениям уравнения:

$$8\left(\cos^6 x-\sin^6 x\right)-5\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)-3\left(\cos^2 x-\sin 2x\right)=0.$$

Отмеченные точки являются вершинами многоугольника, вписанного в круг. Найти его площадь.

Ответ: $S=2\sqrt{2}$.

3. Луг размером 10 га с учетом постоянного роста травы может прокормить 10 коров в течение 27 дней, а точно такой же луг, но размером 50 га, может обеспечить кормом 70 коров в течение 18. Сколько коров могут найти себе корм на лугу в 40 га в течение 36 дней, если количество травы, потребляемой коровой каждый день, скорость произрастания травы на 1 га луга – постоянные?

Ответ: 32 коровы.

4. Найти число целых значений a, при котором уравнение $4x^2-ax-3=0$ имеет рациональные корни.

Ответ: 6 значений $a=\pm 1;\pm 4;\pm 11$.

5. При каких значениях p отрезок $\left[-2;3\right]$ принадлежит множеству E_y значений функции $f(x)=\dfrac{x^2-2x+p}{x+2}$?

Ответ: $p\in\left(-\infty;-4\right]$.

6. Бильярдный стол имеет форму круга радиусом 5, с центром в точке O. Шар расположен в точке M, находящейся на расстоянии $\sqrt{3}$ от точки O. Под каким углом к лучу OM надо послать шар, чтобы он, дважды отразившись от борта, прошел через точку M? Отражение шара от борта подчиняется правилу математического бильярда: шар – точка, угол «падения» шара на касательную, проведенную в точке соприкосновения шара в бортом, равен углу «от-

ражения» шара от той же касательной. Запрещается направлять шар по прямой *OM*.

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\beta$, где $\beta = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{6}$.

4.1.6. Олимпиада имени профессора И.В. Курчатова, 10 класс

Вариант № 1

1. Значение функции $f(x)$ для каждого x равно наибольшему из чисел: $-2x^2+3x+5$ и $2x^2-x-3$. Сколько решений имеет уравнение $f^2(x)-7f(x)+10=0$? Найти наименьшее из них.

2. В магазине купили ручки, карандаши и ластики, всего 100 шт. на сумму 500 руб. Цена ручки 50 руб., карандаша 10 руб., ластика 1 руб. Сколько купили ручек, карандашей и ластиков?

3. Числа x, 3, y являются тремя последовательными членами возрастающей арифметической последовательности и

$$x^3+y^3+2xy(x+y)-186=0.$$

Найти разность прогрессии.

5. При каких значениях a четыре решения уравнения

$$x^4+(3a-1)x^2+(2a+3)^2=0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии?

5. В основании четырёхугольной пирамиды находится квадрат *ABCD*. Двугранные углы пирамиды при рёбрах *AB*, *BC*, *CD*, *DA* относятся как 1:3:4:2 соответственно. Найти двугранный угол при ребре *CD*.

Ответы и решения

1. График функции $f(x)=\max\{-2x^2+3x+5;\,2x^2-x-3\}$ изображён на рис. 1 сплошной линией. Он состоит из «кусков» парабол, соответствующих «наибольшему» значению, а именно:

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-x-3 \text{ при } x\le -1;\\ -2x^2+3x+5 \text{ при } -1\le x\le 2;\\ 2x^2-x-3 \text{ при } x\ge 2.\end{cases}$$

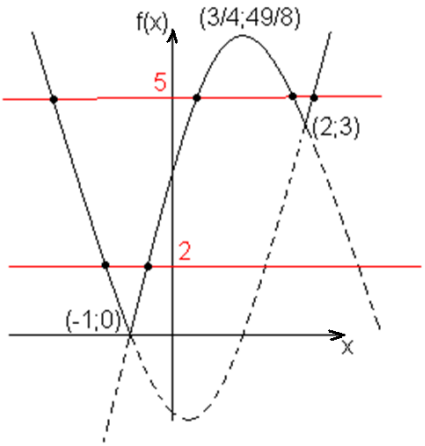


Рис. 1

Квадратное уравнение $y^2-7y+10=0$ относительно $y=f(x)$ имеет корни $y_1=2$ и $y_2=5$. Найдём точки пересечения прямой $y=2$ с графиком функции $f(x)$ (см. рис. 1). Они находятся из условий:

$$\begin{cases}2x^2-x-3=2;\\ x\le -1,\end{cases} \text{ и } \begin{cases}-2x^2+3x+5=2;\\ -1\le x\le 0,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}2x^2-x-5=0;\\ x\le -1,\end{cases} \text{ и } \begin{cases}2x^2-3x-3=0;\\ -1\le x\le 0.\end{cases}$$

В этом случае получим две точки: $x=\dfrac{1-\sqrt{41}}{4}$ и $x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}$. Точки пересечения прямой $y=5$ с графиком функции $f(x)$ находятся из условий: $-2x^2+3x+5=5$ и $2x^2-x-3=5$, или $2x^2-3x=0$ и

$2x^2 - x - 8 = 0$. Из этих условий находим четыре точки $x = 0$; $x = \frac{3}{2}$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{65}}{4}$.

Итак, прямые $y = 2$ и $y = 5$ пересекают график функции $f(x)$ в шести точках, абсциссы которых равны: $x = \frac{1 - \sqrt{41}}{4}$; $x = \frac{3 - \sqrt{33}}{4}$; $x = 0$; $x = \frac{3}{2}$; $x = \frac{1 \pm \sqrt{65}}{4}$. Наименьшая из них равна $\frac{1 - \sqrt{65}}{4}$.

Ответ: 1) 6 решений; 2) $x = \frac{1 - \sqrt{65}}{4}$.

2. Обозначим через x число ручек, через y – число карандашей, а через z – число ластиков. Тогда из условий задачи получим систему

$$\begin{cases} x + y + z = 100; \\ 50x + 10y + z = 500. \end{cases} \qquad (1)$$

Вычитая из второго уравнения первое и первое записывая в виде $z = 100 - x - y$, получим систему

$$\begin{cases} z = 100 - x - y; \\ 49x + 9y = 400. \end{cases}$$

Решение уравнения $49x + 9y = 400$ в целых числах имеет вид

$$\begin{cases} x = 1 + 9n; \\ y = 39 - 49n, \end{cases} \quad n \in Z.$$

Из условия, что $x > 0$, $y > 0$ следует, что $n = 0$. Следовательно, $x = 1$, $y = 39$. Далее из первого уравнения системы (1) находим $z = 60$.

Ответ: 1 ручка, 39 карандашей, 60 ластиков.

3. Из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} x \le 3 \le y; \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Условие $x^3 + y^3 + 2xy(x + y) - 186 = 0$ запишем в виде

$$(x+y)((x+y)^2-3xy)+2xy(x+y)-186=0.$$

После замены

$$\begin{cases} x+y=u; \\ xy=\upsilon \end{cases}$$

последнее выражение примет вид $u(u^2-3\upsilon)+2u\upsilon-186=0$. Учитывая, что $u=6$, получим $\upsilon=5$. Возвращаясь к старым переменным (x, y), получим:

$$\begin{cases} x+y=6; \\ xy=5. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения: $x_1=1,\ y_1=5$ и $x_2=5,\ y_2=1$. Решение $x_2=5,\ y_2=1$ не удовлетворяет условию задачи (так как прогрессия возрастающая). Следовательно, получим прогрессию 1; 3; 5 с разностью $d=2$.

Ответ: $d=2$.

4. В уравнении $x^4+(3a-1)x^2+(2a+3)^2=0$ сделав замену $x^2=y,$ получим

$$y^2+(3a-1)y+(2a+3)^2=0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) должно иметь в силу условия два положительных корня $y_1<y_2$. Тогда арифметическую прогрессию должны составлять числа $-\sqrt{y_2};\ -\sqrt{y_1};\ \sqrt{y_1};\ \sqrt{y_2}$. Это равносильно системе:

$$\begin{cases} -2\sqrt{y_1}=-\sqrt{y_2}+\sqrt{y_1}; \\ 2\sqrt{y_1}=-\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sqrt{y_2}=3\sqrt{y_1}; \\ \sqrt{y_2}=3\sqrt{y_1}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$y_2=9y_1. \qquad (3)$$

Дискриминант уравнения (2) имеет вид

$$D=-7a^2-54a-35=-(a+7)(7a+5).$$

Из условия наличия двух положительных корней y_1 и y_2 имеем

$$\begin{cases} D > 0; \\ y_1 + y_2 > 0; \\ y_1 y_2 > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a+7)(7a+5) < 0; \\ 1 - 3a > 0; \\ (2a+3)^2 > 0. \end{cases}$$

Из этих условий следует, что

$$a \in \left(-7; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{7}\right). \qquad (4)$$

Корни уравнения (1) имеют вид $y = \frac{1}{2}\left(1 - 3a \pm \sqrt{-7a^2 - 54a - 35}\right)$.

Из условия (3) следует, что

$$\frac{1}{2}\left(1 - 3a + \sqrt{-7a^2 - 54a - 35}\right) = \frac{9}{2}\left(1 - 3a - \sqrt{-7a^2 - 54a - 35}\right).$$

После элементарных преобразований получим:

$$5\sqrt{-7a^2 - 54a - 35} = 4 - 12a.$$

На множестве (4) правая часть этого равенства положительна. После возведения обеих частей последнего равенства в квадрат и упрощения получим: $29a^2 + 114a + 81 = 0$. Это уравнение имеет корни $a = -3$; $a = -\frac{27}{29}$.

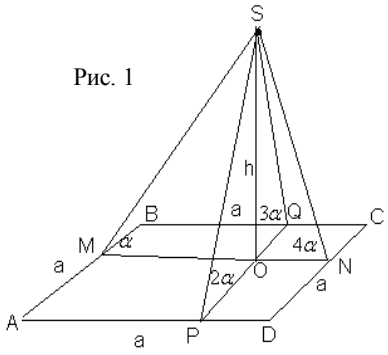
Ответ: $a = -3$ и $a = -\frac{27}{29}$.

5. Обозначим через a сторону основания (квадрата), а через h – высоту пирамиды. Тогда так как $MO + ON = PO + OQ = a$ (рис. 1), то

$$\begin{cases} h\operatorname{ctg}\alpha + h\operatorname{ctg}4\alpha = a; \\ h\operatorname{ctg}2\alpha + h\operatorname{ctg}3\alpha = a. \end{cases}$$

Отсюда для нахождения угла α получаем:

Рис. 1



$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}4\alpha = \operatorname{ctg}2\alpha + \operatorname{ctg}3\alpha\ . \qquad (1)$$

Замечание. Если один из углов тупой, то в этом равенстве знак «+» заменяется на знак «–», а аргумент котангенса φ заменяется на угол π – φ, что возвращает прежние знаки. Из равенства (1) получаем:

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha\sin 4\alpha} = \frac{\sin 5\alpha}{\sin 2\alpha\sin 3\alpha}\ .$$

Тогда возможны два случая.

Случай 1: $\sin 5\alpha = 0$. Следовательно, $\alpha = \dfrac{\pi n}{5}$ $(n \in Z)$.

Случай 2: $\sin 5\alpha \neq 0$. Тогда

$$\sin 2\alpha\sin 3\alpha = \sin\alpha\sin 4\alpha \ \text{ или } \ \cos 3\alpha - \cos 5\alpha = \cos\alpha - \cos 5\alpha.$$

Откуда получаем: $\cos 3\alpha = \cos\alpha$. Следовательно,

$$3\alpha - \alpha = 2\pi m \ (m \in Z) \ \text{ и } \ 3\alpha + \alpha = 2\pi k \ (k \in Z).$$

Итак, окончательно в этом случае имеем:

$$\alpha = \pi m \ (m \in Z) \ \text{ и } \ \alpha = \frac{\pi k}{2} \ (k \in Z).$$

Так как 4α − двугранный угол, то $0 < 4\alpha < \pi$. Следовательно, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$. Тогда из серий решений $\alpha = \dfrac{\pi n}{5}$; $\alpha = \pi m$; $\alpha = \dfrac{\pi k}{2}$ уравнения (1) условию удовлетворяет только $\alpha = \dfrac{\pi}{5}$. Тогда искомый двугранный угол при ребре *CD* равен $4\alpha = \dfrac{4\pi}{5}$, а при ребре *AB* угол равен $\dfrac{\pi}{5}$. Следовательно, противоположные боковые грани пирамиды параллельны. Такой пирамиды не существует.

Ответ: задача не имеет решения.

Вариант № 2

1. Значение функции *f*(*x*) для каждого *x* равно наименьшему из чисел $x^2 + 2x - 3$ и $-x^2 + 2x + 5$. Сколько решений имеет уравнение $f^2(x) - f(x) - 12 = 0$? Найти наибольшее из них.

Ответ: 1) 5 решений; 2) *x* = 4.

2. В магазине купили гвозди, шурупы и болты в упаковках по 1 кг, всего 24 упаковки, на сумму 3400 руб. Цена упаковки гвоздей – 120 руб., шурупов – 170 руб., болтов – 210 руб. Сколько упаковок гвоздей, шурупов и болтов было куплено?

Ответ: 16 упаковок гвоздей, 5 упаковок шурупов, 3 упаковки болтов.

3. Числа x, 6, y являются тремя последовательными членами возрастающей геометрической прогрессии и

$$x^2 + y^2 = 168 + \frac{xy(x+y)^2}{90}.$$

Найти знаменатель прогрессии.

Ответ: 3.

4. При каких значениях a четыре решения уравнения

$$x^4 - (a+5)x^2 + (a-2)^2 = 0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии?

Ответ: $a = 5$; $a = \frac{5}{13}$.

5. В основании четырёхугольной пирамиды находится квадрат $ABCD$. Двугранные углы пирамиды при рёбрах AB, BC, CD, DA относятся как 1:4:5:2 соответственно. Найти двугранный угол при ребре DA.

Ответ: задача не имеет решения.

Вариант № 3

1. Значение функции $f(x)$ для каждого x равно наибольшему из чисел $x^2 + 2x$ и $4 - x^2$. Сколько решений имеет уравнение $f^2(x) - f(x) = 0$? Найти наименьшее из них.

Ответ: 1) 3 решения; 2) $x = -4$.

2. В магазине купили луки, стрелы и мишени, всего 25 шт. Цена лука – 1500 руб., стрелы – 270 руб., мишени – 330 руб. Сколько купили луков, стрел и мишеней, если общая цена покупки составила 10800 руб.?

Ответ: 3 лука, 16 стрел и 6 мишеней.

3. Числа x, 7, y являются тремя последовательными членами убывающей арифметической прогрессии и

$$(xy+1)^2 - x^3 - y^3 + 202 = 0.$$

Найти разность прогрессии.

Ответ: $d = -4$; $d = -3\sqrt{14}$.

4. При каких значениях a четыре решения уравнения

$$x^4 - 6(a+1)x^2 + (2a+1)^2 = 0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии?

Ответ: $a = 4$; $a = -\frac{14}{19}$.

5. В основании четырёхугольной пирамиды находится квадрат $ABCD$. Двугранные углы пирамиды при рёбрах AB, BC, CD, DA относятся как 2:3:5:4 соответственно. Найти двугранный угол при ребре BC.

Ответ: задача не имеет решения.

Вариант № 4

1. Значение функции $f(x)$ для каждого x равно наименьшему из чисел $-x^2 + 4x + 5$ и $x^2 - 6x + 13$. Сколько решений имеет уравнение $f^2(x) - 9f(x) + 18 = 0$? Найти наибольшее из них.

Ответ: 1) 4 решения; 2) $x = 2 + \sqrt{6}$.

2. В магазине купили костюмы, рубашки и галстуки, всего 15 шт. Цена костюма – 2700 руб., рубашки – 500 руб., галстука – 110 руб. Сколько купили костюмов, рубашек и галстуков, если общая цена покупки составила 8000 руб.?

Ответ: 2 костюма; 3 рубашки; 10 галстуков.

3. Числа x, 4, y являются тремя последовательными членами убывающей геометрической прогрессии и

$$x^3 + y^3 - 9(x^2 + y^2) + 38(x + y) - 288 = 0.$$

Найти знаменатель прогрессии.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

4. При каких значениях a четыре решения уравнения

$$x^4 - 2(2a+3)x^2 + (2a-5)^2 = 0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии?

Ответ: $a = 1;\ a = \frac{17}{2}$.

5. В основании четырёхугольной пирамиды находится квадрат *ABCD*. Двугранные углы пирамиды при рёбрах *AB*, *BC*, *CD*, *DA* относятся как 1:3:7:5 соответственно. Найти двугранный угол при ребре *AB*.

Ответ: задача не имеет решения.

4.1.7. Олимпиада имени профессора И.В. Курчатова, 11 класс

Вариант № 1

1. При каких x и $b > 0$ числа $a_1 = \sqrt{4x-3},\ a_2 = 0{,}5x + 2,\ a_3 = 4$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии, а степени $b^{a_1}, b^{a_2}, b^{a_3}$ – последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $q = 4$?

2. Значение функции $f(x)$ для любых x равно наибольшему из чисел $\sin x$ и $\cos x$. Решить уравнение:

$$4f(x) = (3+\sqrt{3})\sin x + \left(3-\sqrt{3}\right)\cos x$$

и найти число решение уравнения на отрезке $\left[-7\pi/2;\ \pi\right]$.

3. Общий призовой фонд турнира по волейболу не менее 37 тыс. руб. Из него выплачиваются командам деньги купюрами по 1 тыс. руб. по следующему правилу. Команда, занявшая 1 место, получит половину фонда и еще 0,5 тыс. руб.; вторая команда – половину оставшихся денег и еще 0,5 тыс. руб.; третья – половину

остатка и еще 0,5 тыс. руб. и т.д. Известно, что после выдачи денег в кассе осталось не более 4 тыс. руб. Какое минимальное число команд могло участвовать в турнире по этим правилам? Сколько при этом было денег в фонде, и сколько получила каждая команда, если известно, что купюры не разменивались?

4. Пусть x – целое положительное число. Обозначим через $x!$ целое число, равное произведению всех целых чисел, не превосходящих x (факториал числа x). Найти наименьшее число x, для которого $x!$ делится на 1600000000 без остатка.

5. При каких значениях α система уравнений

$$\begin{cases} \left(|x+y|-2\sqrt{2}\right)\left(|x-y|-2\sqrt{2}\right)=0; \\ \left(x-3\sqrt{2}\cos\alpha\right)^2+\left(y-3\sqrt{2}\sin\alpha\right)^2=1 \end{cases}$$

не имеет решений?

6. На плоскости P лежат три куба с ребрами 1, 2 и 3. Их основания расположены на плоскости P так, как это изображено на рис. 1. Плоскость Q, пересекая кубы, делит каждый из них на равновеликие части. Найти тангенс угла между плоскостями P и Q.

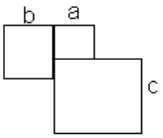


Рис. 1

Ответы и решения

1. По свойству арифметической прогрессии $2a_2 = a_1 + a_3$, т.е. $x+4 = 4+\sqrt{4x-3}$, $x = \sqrt{4x-3}$, поскольку $x>0$, то $x^2 = 4x-3$, $x^2-4x+3=0$, $x_1=1$, $x_2=3$. Найдём значения a_1, a_2, a_3:

x	a_1	a_2	a_3
1	1	2,5	4
3	3	3,5	4

Если $x=1$, то $b^1, b^{2,5}, b^4$ – геометрическая прогрессия, где $q=b^{1,5}=4,\ b=\sqrt[3]{16}$.

Если $x=3$, то $b^3, b^{3,5}, b^4$ – геометрическая прогрессия, где $q=b^{0,5}=4,\ b=16$.

Ответ: $\sqrt[3]{16},\ 16$.

2. По условию $f(x)=\max\{\sin x, \cos x\}$,

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n\le x\le\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, \quad (1)\\ \sin x, & -\dfrac{7\pi}{4}+2\pi n\le x\le-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z. \quad (2)\end{cases}$$

Решим уравнение на интервале $-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n\le x\le\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$:

$$4\cos x=\left(3+\sqrt{3}\right)\sin x+\left(3-\sqrt{3}\right)\cos x,$$

$$\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\cos x=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\sin x.$$

Умножив на $\dfrac{1}{2\left(\sqrt{3}+1\right)}$, получим:

$$\frac{1}{2}\cdot\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x=0,\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0,\quad x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in Z.$$

Учитывая условие (1), $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$. Найдём значения $n\in Z$, при которых $x\in\left[-\dfrac{7\pi}{2};\pi\right]$: разделим неравенство

$$-\frac{7\pi}{2}\le\frac{\pi}{6}+2\pi n\le\pi$$

на π, вычтем $\dfrac{1}{6}$:

$$-\frac{7}{2}-\frac{1}{6}\le 2n\le 1-\frac{1}{6},$$

разделим на 2: $-\dfrac{22}{12}\le n\le\dfrac{5}{12}$. Так как $n\in Z$, получаем $n=-1;0$, значит, будет два решения.

Решим уравнение на интервале $-\frac{7\pi}{4}+2\pi n \le x \le -\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n \in Z$:

$$4\sin x = \left(3+\sqrt{3}\right)\sin x + \left(3-\sqrt{3}\right)\cos x,$$

$$-\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot \sin x = \sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot \cos x.$$

Умножив на $\frac{1}{2\left(\sqrt{3}-1\right)}$, получим:

$$\frac{1}{2}\cdot \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot \cos x = 0, \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0, \quad x=-\frac{\pi}{3}+\pi n, \ \ n \in Z.$$

Учитывая условие (2), $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$. Найдём значения $n \in Z$, при которых $x \in \left[-\frac{7\pi}{2};\pi\right]$. Из условия $-\frac{7\pi}{2} \le \frac{2\pi}{3}+2\pi n \le \pi$ находим $n=-2;-1;0$, значит, будет три решения.

Таким образом, всего на заданном интервале пять решений.

Ответ: $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in Z$, $x=\frac{\pi}{6}+2\pi m$, $m \in Z$, пять решений.

3. Пусть призовой фонд $x \ge 37$ тыс. руб. Тогда выплаты командам купюрами по 1 тыс. руб. составят:

За 1 место	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ тыс. руб.
За 2 место	$\frac{1}{2}\left[x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\right]+0,5=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$ тыс. руб.
За 3 место	$\frac{1}{2}\left[x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)\right]+0,5=\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$ тыс. руб.
...	...

Пусть все выплаты составят B тыс. руб., а N – число команд, участвовавших в турнире (по условию их количество минимально). По условию

$$x-B \le 4, \quad x-x\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...\right) \le 4,$$

$$x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)\le 4,\quad 2x-(x+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)\le 8,$$

$$2x-(x+1)\cdot\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N}}{1-\frac{1}{2}}\right)\le 8,\quad 2x-2x-2+(x+1)\cdot 2^{1-N}\le 8,$$

$$x+1\le 10\cdot 2^{N-1},$$

учитывая $x\ge 37$, $38\le x+1\le 10\cdot 2^{N-1}$.

Поскольку N минимально, то первое значение, удовлетворяющее неравенству $38\le 10\cdot 2^{N-1}$: $N=3$, тогда $38\le x+1\le 40$, а выплаты B составили:

$$B=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}x+\frac{7}{8}=\frac{7}{8}\cdot(x+1)\le 40.$$

При выплатах использовались только купюры по 1 тыс. руб., значит, выражение $(x+1)\le\frac{40\cdot 8}{7}$ должно делиться нацело на 8.

Если $x+1=40$, то $x=39$, а все призовые выплаты $B=\frac{7}{8}(x+1)=\frac{7}{8}\cdot 40=35$, значит, $x-B\le 4$, $39-35\le 4$, т.е. все условия выполнены.

Ответ: 3 команды, 39 тыс. руб. было в призовом фонде. Команды получили 20, 10 и 5 тыс. руб.

4. По условию задачи требуется найти натуральное x, для которого $x!$ делится нацело на $16\cdot 10^8$, т.е. $\left(x!:\left(2^{12}\cdot 5^8\right)\right)$.

Напомним, что $1!=1, 2!=1\cdot 2, 3!=1\cdot 2\cdot 3=6$, $4!=24$, $5!=120,\ldots$, тогда делимость числа на степени 5 зависит от количества чисел делящихся на 5 среди множителей в произведении числа $x!$.

$5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$, – число $\vdots 5^1$;

$10!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 10$, – число $\vdots 5^2$;

$15!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 10\cdot\ldots\cdot 15$, – число $\vdots 5^3$;

$20!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 10\cdot\ldots\cdot 15\cdot\ldots\cdot 20$, – число $\vdots 5^4$;

$25! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot 10\cdot \ldots \cdot 15\cdot \ldots \cdot 20\cdot \ldots \cdot 25$, – число $\vdots 5^6$; и т.д.

Из указанной закономерности, получаем, что искомое число $x = 35,\ x! = 35!$, действительно,

$$x! = 35! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot 10\cdot \ldots \cdot 15\cdot \ldots \cdot 20\cdot \ldots \cdot 25\cdot \ldots \cdot 30\cdot \ldots \cdot 35,$$

тогда произведение чисел кратных $\vdots 5$:

$$5\cdot 10\cdot 15\cdot 20\cdot 25\cdot 30\cdot 35 = 2^4\cdot 3^2\cdot 7\cdot 5^8,$$

а кратных $\vdots 2$ (кроме выписанных ранее 10, 20, 30) в этом произведении: $2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 12\cdot 14\cdot 16\cdot 18 = 2^{15}\cdot 3^4\cdot 7$.

Таким образом, $x! = 35! \vdots 1600000000$.

Ответ: 35.

5. Из первого уравнения системы получим четыре попарно параллельных прямых $x + y = \pm 2\sqrt{2}$ и $y - x = \pm 2\sqrt{2}$. Заметим, что прямые, взятые по одной из каждой пары, пересекаются под прямым углом (на рис. 1 указана только одна пара). Второе уравнение системы задаёт единичную окружность, центр которой – точка $O^*(x_0; y_0)$ имеет координаты

$$\begin{cases} x_0 = 3\sqrt{2}\cos\alpha, \\ y_0 = 3\sqrt{2}\sin\alpha, \end{cases}$$

т.е. лежит на окружности $R = 3\sqrt{2}$ с центром в точке $O(0;0)$.

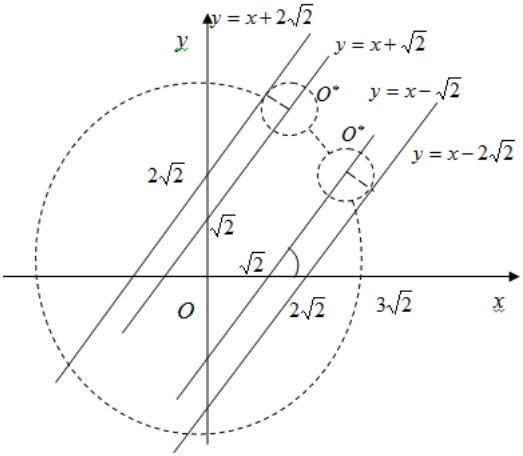


Рис. 1

Рассмотрим, когда система имеет единственное решение в первой координатной четверти. Чтобы система имела одно решение, центр единичной окружности должен находиться на расстоянии 1 от прямых $x+y=\pm 2\sqrt{2}$ и $y-x=\pm 2\sqrt{2}$, т.е. лежать на прямых $x+y=\pm\sqrt{2}$ и $y-x=\pm\sqrt{2}$ (см. рис. 1). Значит,

$$3\sqrt{2}\sin\alpha = 3\sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2} \text{ и } 3\sqrt{2}\sin\alpha = 3\sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{2},$$

откуда методом вспомогательного аргумента, получим

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{6} \quad \text{и} \quad \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Тогда при $\frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{6}$ система не имеет решений, аналогично рассматриваются другие пары прямых. С учётом того, что прямые пересекаются под прямым углом

$$\frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi}{2}n < \alpha < \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi}{2}n < \alpha < \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi}{2}n, \ n \in Z.$

6. Чтобы плоскость Q делила кубы на равновеликие части, необходимо, чтобы эта плоскость проходила через точки Q_1, Q_2, Q_3 – центры симметрии кубов.

Введём систему координат, как показано на рис. 1 (ось Oz направлена вверх, а плоскость xOy – плоскость, на которой находятся данные кубы, плоскость P).

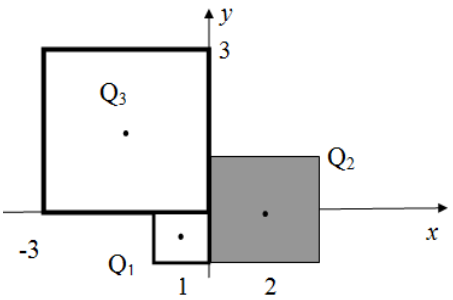


Рис. 1

Запишем координаты указанных точек: $Q_1\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $Q_2(1;0;1)$, $Q_3\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, тогда уравнение плоскости $Q_1Q_2Q_3$:

$$\frac{1}{2}(x-1)+2y-\frac{7}{2}(z-1)=0,$$

а координаты нормали $\vec{n}_{Q_1Q_2Q_3}=\vec{n}_Q=\left\{\frac{1}{2};2;-\frac{7}{2}\right\}$. Координаты нормали плоскости P: $\vec{n}_{xOy}=\vec{n}_P=\{0;0;1\}$.

Угол между нормалями плоскостей $\beta=180°-\alpha$, где α – угол между плоскостями, значит, находим косинус угла β по формуле скалярного произведения:

$$\cos\beta=\frac{\vec{n}_Q\cdot\vec{n}_P}{|\vec{n}_Q|\cdot|\vec{n}_P|}=\frac{-3,5}{\sqrt{66}/2}=-\frac{7}{\sqrt{66}},$$

$$\cos\beta=\cos(180-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{7}{\sqrt{66}},$$

$$\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{66}},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{17}}{7}.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{17}}{7}$.

Вариант № 2

1. При каких x и $b>0$ числа

$$a_1=\sqrt{3x+7},\ a_2=0,25(x-1),\ a_3=-3$$

являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии, а степени $b^{a_1}, b^{a_2}, b^{a_3}$ – последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $q=8$?

Ответ: 1) $x=-1, b=\frac{1}{\sqrt[5]{64}}$; 2) $x=3, b=\frac{1}{\sqrt[7]{64}}$.

2. Значение функции $f(x)$ для любых x равно наименьшему из чисел $\sin x$ и $\cos x$. Решить уравнение:

$$4f(x)=(1-\sqrt{3})\sin x+\left(1+\sqrt{3}\right)\cos x$$

и найти число решений уравнения на отрезке $\left[-5\pi;\,7\pi/2\right]$.

Ответ:

1) $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z; \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi m,\ \ m\in Z; \end{array}\right.$

2) восемь решений, $k=-2;-1;0;1,\ \ m=-2;-1;0;1$.

3. Общий призовой фонд турнира по баскетболу не более 100 тыс. руб. Из него выплачиваются командам деньги купюрами по 1 тыс. руб. по следующему правилу. Команда, занявшая 1 место, получит половину фонда и еще 0,5 тыс. руб.; вторая команда – половину оставшихся денег и еще 0,5 тыс. руб.; третья – половину остатка и еще 0,5 тыс. руб. и т.д. Известно, что после выдачи денег, в кассе осталось не менее 5 тыс. руб. Какое максимальное число команд могло участвовать в турнире по этим правилам? Сколько при этом было денег в фонде, и сколько получила каждая команда, если известно, что купюры не разменивались?

Ответ: 1) $n_{\max}=4$; 2) общий фонд 95 тыс. руб.; 3) команды получили 48, 24 и 12 тыс. руб.

4. Пусть x – целое положительное число. Обозначим через $x!$ целое число, равное произведению всех целых чисел, не превосходящих x (факториал числа x). Найти наименьшее число x, для которого $x!$ делится на 250000000 без остатка.

Ответ: $x=40$.

5. При каких значениях α система уравнений

$$\begin{cases} \left(|y|-4\right)\left(|x|-4\right)=0; \\ \left(x-4\sqrt{2}\cos\alpha\right)^2+\left(y-4\sqrt{2}\sin\alpha\right)^2=1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

Ответ:

$$\left(\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{8}+\frac{\pi}{2}n;\arcsin\frac{\sqrt{46}}{8}+\frac{\pi}{2}n\right)\setminus\left\{\arcsin\frac{63}{64}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\frac{3\pi}{4}-\right.$$

$$\left.-\arcsin\frac{63}{64}+\frac{\pi}{2}n\right\},\ n\in Z.$$

6. На плоскости P лежат три куба с ребрами 1, 3 и 4. Их основания расположены на плоскости P так, как это изображено на рис. 1. Плоскость Q, пересекая кубы, делит каждый из них на равновеликие части. Найти тангенс угла между плоскостями P и Q.

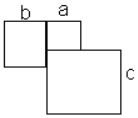


Рис. 1

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{85}}{13}$.

Вариант № 3

1. При каких x и $b>0$ числа

$$a_1=10\sqrt{7-3x},\ a_2=-3(x-2),\ a_3=-10$$

являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии, а степени $b^{a_1}, b^{a_2}, b^{a_3}$ – последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $q=0,5$?

Ответ: 1) $x=2, b=\sqrt[10]{2}$; 2) $x=-3, b=\sqrt[25]{2}$.

2. Значение функции $f(x)$ для любых $x\neq\pi k/2, k\in Z$ равно наибольшему из чисел $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$. Решить уравнение: $4f(x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$ и найти число решений уравнения на отрезке $\left[-4\pi;2\pi/3\right]$.

Ответ:

1) $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z; \\ x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi m,\ m\in Z; \end{array}\right.$

2) девять решений, $k=-3;-2;-1;0,\ m=-3;-2;-1;0;1$.

3. Общий призовой фонд турнира по футболу не менее 125 тыс. руб. Из него выплачиваются командам деньги купюрами по 1 тыс. руб. по следующему правилу. Команда, занявшая 1 место, получит половину фонда и еще 0,5 тыс. руб.; вторая команда – половину оставшихся денег и еще 0,5 тыс. руб.; третья – половину остатка и еще 0,5 тыс. руб. и т.д. Известно, что после выдачи денег в кассе осталось не более 3 тыс. руб. Какое минимальное число команд могло участвовать в турнире по этим правилам? Сколько при этом было денег в фонде, и сколько получила каждая команда, если известно, что купюры не разменивались?

Ответ: 1) $n_{\min} = 5$; 2) общий фонд 127 тыс. руб.; 3) команды получили 64, 32, 16, 8 и 4 тыс. руб.

4. Пусть x – целое положительное число. Обозначим через $x!$ целое число, равное произведению всех целых чисел, не превосходящих x (факториал числа x). Найти наименьшее число x, для которого $x!$ делится на 320000000 без остатка.

Ответ: $x = 30$.

5. При каких значениях $R \geq 0$ система уравнений

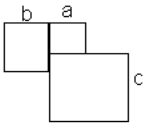
$$\begin{cases} \left(|x-y|-3\right)\left(|y|-3\right)=0; \\ \left(x-R\cos\alpha\right)^2+\left(y-R\sin\alpha\right)^2=1 \end{cases}$$

не имеет решений при любом значении α?

Ответ: $R \in \left[0; \dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}\right)$.

6. На плоскости P лежат три куба с ребрами 2, 3 и 4. Их основания расположены на плоскости P так, как это изображено на рис. 1. Плоскость Q, пересекая кубы, делит каждый из них на равновеликие части. Найти тангенс угла между плоскостями P и Q.

Рис. 1



Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{8}$.

Вариант № 4

1. При каких x и $b>0$ числа $a_1=3\sqrt{1-8x}, a_2=1-2x, a_3=-1$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии, а степени $b^{a_1}, b^{a_2}, b^{a_3}$ – последовательными членами геометрической прогрессии со знаменателем $q=9$?

Ответ: 1) $x=0, b=\frac{1}{3}$; 2) $x=-3, b=\frac{1}{\sqrt[8]{9}}$.

2. Значение функции $f(x)$ для любых $x\neq \pi k/2, k\in Z$ равно наименьшему из чисел $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$. Решить уравнение:

$$4f(x)=3\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x$$

и найти число решений уравнения на отрезке $\left[-3\pi; 5\pi/2\right]$.

Ответ:

1) $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z; \\ x=-\frac{\pi}{6}+\pi k, \ k\in Z; \end{array}\right.$

2) десять решений, $n=-2;-1;0;1;2$, $k=-2;-1;0;1;2$.

3. Общий призовой фонд турнира по регби не более 200 тыс. руб. Из него выплачиваются командам деньги купюрами по 1 тыс. руб. по следующему правилу. Команда, занявшая 1 место, получит половину фонда и еще 0,5 тыс. руб.; вторая команда – половину оставшихся денег и еще 0,5 тыс. руб.; третья – половину остатка и еще 0,5 тыс. руб. и т.д. Известно, что после выдачи денег в кассе осталось не менее 2 тыс. руб. Какое максимальное число команд могло участвовать в турнире по этим правилам? Сколько при этом было денег в фонде, и сколько получила каждая команда, если известно, что купюры не разменивались?

Ответ: 1) $n_{\max}=6$; 2) общий фонд 191 тыс. руб.; 3) команды получили 96, 48, 24, 12, 6 и 3 тыс. руб.

4. Пусть x – целое положительное число. Обозначим через $x!$ целое число, равное произведению всех целых чисел, не превосходящих x (факториал числа x). Найти наименьшее число x, для которого $x!$ делится на 1250000000 без остатка.

Ответ: $x=45$.

5. При каких значениях α система уравнений

$$\begin{cases} \left(|x|-3\right)\left(|y|-3\right)=0; \\ \left(x-3\sqrt{2}\cos\alpha\right)^2+\left(y-3\sqrt{2}\sin\alpha\right)^2=1 \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

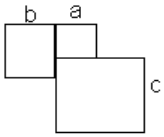
Ответ:

$$\alpha\in\left(\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\pi k}{2};\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\pi k}{2}\right)\cup$$

$$\cup\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\pi k}{2};\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\pi k}{2}\right),\ k\in Z.$$

6. На плоскости P лежат три куба с ребрами 3, 4и 5. Их основания расположены на плоскости P так, как это изображено на рис. 1. Плоскость Q, пересекая кубы, делит каждый из них на равновеликие части. Найти тангенс угла между плоскостями P и Q.

Рис. 1



Ответ: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{73}}{29}$.

4.1.8. Очные отборочные туры в регионах, 11 класс, комплект 1

Вариант № 1

1. Величина $\dfrac{1-4x}{x}$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $x>0$. Найти наименьшее, возможное при этом условии, значение первого члена прогрессии.

2. Найти множество значений функции $\operatorname{tg} 2x$ на множестве решений уравнения $\sin 3x + 2\cos^3 x = 2\cos x$.

3. Найти наименьший возможный диаметр шара в пространстве, которому принадлежат все точки M с координатами $(x; y; z)$ – решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} y + z = 3xyz, \\ z + x = 4xyz, \\ x + y = 5xyz. \end{cases}$$

4. Найти целые, положительные числа x, простые делители которого только двойки или семерки, а общее число натуральных делителей числа x^3 в восемь раз больше числа всех натуральных делителей x.

5. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5; \\ \left| x - \left| x - ay \right| \right| = y \end{cases}$$

имеет целые решения?

6. Прямоугольный треугольник ABC расположен относительно трех концентрических окружностей K_1, K_2 и K_3 радиусов $3, 5$ и 6 так, что: 1) гипотенуза AB является хордой K_2 и касается окружности K_1; 2) вершина C принадлежит окружности K_3. Найти катеты треугольника ABC.

Ответы и решения

1. Обозначим через $f(x)$ сумму рассматриваемой геометрической прогрессии, при этом согласно условию задачи её знаменатель x положителен и меньше 1. В рамках условий рассматриваемой задачи первый член этой прогрессии есть функция от x: $b_1 = b_1(x)$, наименьшее значение которой и требуется отыскать. Находим $b_1(x)$ и производную $b_1'(x)$:

$$f(x)=\frac{1-4x}{x}=\frac{b_1(x)}{1-x}\to b_1(x)=\frac{(4x-1)(x-1)}{x}=\frac{4x^2-5x+1}{x},$$

$$0<x<1,\quad b_1'(x)=\frac{4x^2-1}{x^2}=\frac{(2x-1)(2x+1)}{x^2}.$$

Очевидно, что в области $0<x<1$ производная $b_1'(x)$ вначале отрицательна, при $x=1/2$ равна 0, затем принимает положительные значения (рис. 1).

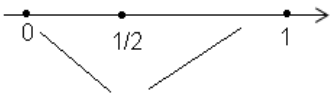


Рис. 1

Значит, при $x=1/2$ функция $b_1(x)$ принимает минимальное значение. Это значение $b_1\left(1/2\right)=-1$.

Ответ: минимальное значение $b_1(x)$ достигается при $x=1/2$ и равно -1.

2. Для решения уравнения $\sin 3x+2\cos^3 x=2\cos x$ воспользуемся формулой синуса тройного угла: $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$. В результате имеем: $3\sin x-4\sin^3 x+2\cos^3 x=2\cos x$. Преобразуем это уравнение:

$$4\sin^3 x-2\cos^3 x+2\cos x-3\sin x=0$$

или

$$4\sin^3 x-2\cos^3 x+(2\cos x-3\sin x)(\sin^2 x+\cos^2 x)=0.$$

Отсюда получаем:

$$\sin^3 x+2\sin^2 x\cos x-3\sin x\cos^2 x=0.$$

Разделив обе части этого уравнения на $\cos^3 x\neq 0$, получаем кубическое уравнение относительно $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg}^3 x+2\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x=0.$$

Одним из корней является $\operatorname{tg} x = 0$. Остальные корни являются решениями уравнения $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0.$ Находим его корни: $\operatorname{tg} x = -3$ и $\operatorname{tg} x = 1$.

Для нахождения множества значений функции $\operatorname{tg} 2x$ воспользуемся ее выражением через $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Если $\operatorname{tg} x = 0$, то $\operatorname{tg} 2x = 0,$ если $\operatorname{tg} x = -3$, то $\operatorname{tg} 2x = 0,75$ (при $\operatorname{tg} x = 1$ функция $\operatorname{tg} 2x$ не определена).

Ответ: $E_f = \{0; 0,75\}$.

3. Сложим все три уравнения: $2(x + y + z) = 12xyz$. Таким образом, имеем $x + y + z = 6xyz$. Тогда с учетом первого уравнения исходной системы получаем $x = 3xyz$, с учетом второго уравнения – $y = 2xyz$ и с учетом третьего уравнения – $z = xyz$. Таким образом, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x = 3xyz; \\ y = 2xyz; \\ z = xyz, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x(1 - 3yz) = 0; \\ y(1 - 2xz) = 0; . \\ z(1 - xy) = 0. \end{cases}$$

Одно из решений этой системы очевидно: равенство нулю любого из неизвестных приводит к равенству нулю оставшихся ($x = y = z = 0$).

Найдем теперь отличные от нуля решения. Имеем:

$$\begin{cases} 3yz = 1; \\ 2xz = 1; \\ xy = 1, \end{cases} \Rightarrow 6(xyz)^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} xyz = +\dfrac{1}{\sqrt{6}}; \\ \\ xyz = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}. \end{array} \right. .$$

Тогда получаем:

$$\begin{cases} x = 3xyz = \dfrac{3}{\sqrt{6}}; \\ y = 2xyz = \dfrac{2}{\sqrt{6}}; \\ z = xyz = \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3xyz = \dfrac{-3}{\sqrt{6}}; \\ y = 2xyz = \dfrac{-2}{\sqrt{6}}; . \\ z = xyz = \dfrac{-1}{\sqrt{6}}. \end{cases}$$

Искомый диаметр равен расстоянию между этими решениями:

$$L_{\min} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

Ответ: $L_{\min} = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$; решения системы –

$$(0;0;0), \quad \left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

4. По условию задачи

$$x = 2^n 7^m,\ m \ge 0,\ n \ge 0,\ m + n \ge 1,\ m, n \in Z.$$

В разложении делителя степень двойки входит с показателем от 0 до n, а степень семёрки с показателем от 0 до m. Поэтому количество делителей числа x равно $(n+1)(m+1)$, количество делителей числа $x^3 = 2^{3n}7^{3m}$ равно $(3n+1)(3m+1)$, и по условию задачи:

$$3n + 3m + 9mn + 1 = 8(m + n + nm + 1).$$

Тогда $mn - 5m - 5n = 7$, что эквивалентно выражению

$$(n-5)(m-5) = 32.$$

Кроме того, выразим из равенства $mn - 5m - 5n = 7$ переменную m: $m = \dfrac{5n+7}{n-5} = 5 + \dfrac{32}{n-5}$. Так как $m \ge 0$, то $n \ge 6$. Проведя аналогичные рассуждения для n ($n = \dfrac{5m+7}{m-5} = 5 + \dfrac{32}{m-5} \ge 0$), получим $m \ge 6$. Так как $m \ge 0,\ n \ge 0$, то $n - 5 \ge -5$ и $m - 5 \ge -5$ и модуль произведения $(n-5)(m-5)$ при отрицательных $n-5$ и $m-5$ не превосхо-

дит 25. Это означает, что $n-5$ и $m-5$ неотрицательны. Из условия целочисленности числа x следует:

$$n-5 \in \{1; 2; 4; 8; 16; 32\}, \text{ и } m-5 \in \{1; 2; 4; 8; 16; 32\}.$$

Выпишем возможные варианты в таблицу.

$n-5$	1	2	4	8	16	32
$m-5$	32	16	8	4	2	1
n	6	7	9	13	21	37
m	37	21	13	9	7	6

Ответ: $x = 2^n 7^m$, где

$(n; m) \in \{(6; 37), (7; 21), (9; 13), (13; 9), (21; 7), (37; 6)\}$.

5. Рассмотрим первое уравнение системы. Его решение в целых числах, очевидно, имеет вид:

$$\begin{cases} x = 3n+1; \\ y = 2n-1, \end{cases} \quad n \in Z.$$

Из второго уравнение следует $y \geq 0$. Это эквивалентно неравенству $n \geq 1$. Преобразуем второе неравенство:

$$\left|x - \left|x - ay\right|\right| = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - \left|x - ay\right| = +y; \\ x - \left|x - ay\right| = -y, \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \left|x - ay\right| = x - y; & (1) \\ \left|x - ay\right| = x + y. & (2) \end{bmatrix}$$

Теперь рассмотрим отдельно (1) и (2).

(1) $$\left|x - ay\right| = x - y; \quad x - y \geq 0, \quad \Leftrightarrow$$

$$3n + 1 - (2n - 1) = n + 2 \geq 0 \quad \text{при} \quad n \geq 1.$$

Раскрываем модуль:

$$\begin{bmatrix} x - ay = x - y; \\ x - ay = -(x - y), \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (a-1)y = 0; \\ 2x = (a+1)y. \end{bmatrix}$$

Тогда $a = 1$, так как $y \neq 0$ и

$$a+1=\frac{2x}{y}=\frac{6n+2}{2n-1}, \quad \text{то} \quad a=\frac{4n+3}{2n-1}.$$

Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} a=1; \\ a=\dfrac{4n+3}{2n-1}, n\in N. \end{array}\right.$$

(2) $\quad |x-ay|=x+y; \quad x+y=5n\geq 0 \quad$ при $\quad n\geq 1.$

Раскрываем модуль:

$$\left[\begin{array}{l} x-ay=x+y; \\ x-ay=-(x+y), \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (a+1)y=0; \\ 2x=(a-1)y. \end{array}\right.$$

Тогда $a=-1,$ так как $y\neq 0$ и

$$a-1=\frac{2x}{y}=\frac{6n+2}{2n-1}, \quad \text{то} \quad a=\frac{8n+1}{2n-1}.$$

Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} a=-1; \\ a=\dfrac{8n+1}{2n-1}, n\in N. \end{array}\right.$$

Ответ: $a=1,\ a=-1,\ a=\dfrac{4n+3}{2n-1},\ a=\dfrac{8n+1}{2n-1}$ $(n\in N)$.

6. Нарисуем чертёж согласно условиям задачи, введём систему координат с началом в центре концентрических окружностей с осями координат, как изображено на рис. 1, – точка M – точка касания хорды AB окружности K_1 радиусом 3.

Треугольник OMB – прямоугольный, в нем $|OM| = 3$, $|OB| = 5$, следовательно, $|MB| = 4$ и $|AB| = 2|MB| = 8$. Тогда координаты точек A и B: $A(–4; 3)$, $B(4; 3)$. Длины катетов AC и BC определяются через координаты (x, y) вершины C:

$$|AC|=\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2}; \quad |BC|=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}.$$

Для треугольника ABC имеем $|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$, кроме того, так как точка C лежит на окружности радиусом 6, то её координаты

удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 36$. Таким образом, имеем систему из двух квадратных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} (x+4)^2 + (y-3)^2 + (x-4)^2 + (y-3)^2 = 64; \\ x^2 + y^2 = 36. \end{cases}$$

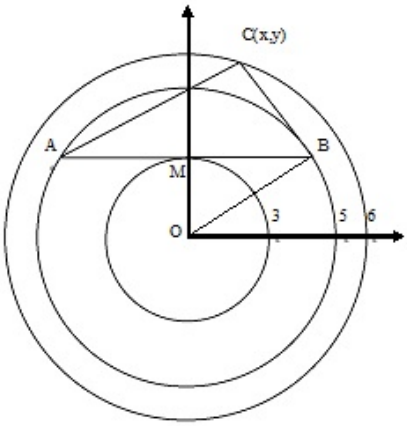


Рис. 1

После преобразований имеем:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6y = 7; \\ x^2 + y^2 = 36. \end{cases}$$

Решения системы

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\sqrt{455}}{6}; \\ y = \dfrac{29}{6} \end{cases}$$

задают оба возможных расположения точки C (симметричных относительно оси Ox). Таким образом, оба значения x и y задают одинаковые значения длин пары катетов; для $x > 0$ получаем:

$$|AC| = \sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{455}}{6} + 4\right)^2 + \left(\frac{29}{6} - 3\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{96+4\sqrt{455}}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{72+3\sqrt{455}};$$

$$|BC| = \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{455}}{6}-4\right)^2+\left(\frac{29}{6}-3\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{96-4\sqrt{455}}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{72-3\sqrt{455}}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{72+3\sqrt{455}};\ \frac{2}{3}\sqrt{72+3\sqrt{455}}.$

Вариант № 2

1. Величина $\frac{4-9x}{x}$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $x<0$. Найти наибольшее, возможное при этом условии, значение первого члена прогрессии.

Ответ: –25.

2. Найти множество значений функции $\operatorname{tg}3x$ на множестве решений уравнения

$$7\cos 3x + 4\sin^3 x + 9\cos x = 0.$$

Ответ: $\left\{1; \frac{2}{11}\right\}$.

3. Найти наименьший возможный диаметр шара в пространстве, которому принадлежат все точки M с координатами $(x; y; z)$ – решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} y+z = 4xyz; \\ z+x = 5xyz; \\ x+y = 6xyz. \end{cases}$$

Ответ:

$$L_{\min} = 2\sqrt{\frac{166}{105}};$$

решения системы –

$$(0;0;0),\ \left(\sqrt{\frac{14}{15}};\frac{5}{7}\sqrt{\frac{14}{15}};\frac{3}{7}\sqrt{\frac{14}{15}}\right),\ \left(-\sqrt{\frac{14}{15}};-\frac{5}{7}\sqrt{\frac{14}{15}};-\frac{3}{7}\sqrt{\frac{14}{15}}\right).$$

4. Найти целые, положительные числа x, простые делители которого только тройки или пятерки, а общее число натуральных делителей числа x^4 в пятнадцать раз больше числа всех натуральных делителей x.

Ответ:

$$x = 3^n 5^m,$$

$$(n;m) \in \{(12;146),(14;56),(16;38),(20;26),(26;20),(38;16),$$

$$(56;14),(146;12)\}.$$

5. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1; \\ \left| x - \left| y + (a+1)x \right| \right| = y \end{cases}$$

имеет целые решения?

Ответ: $a = -2,\ a = 0,\ a = \dfrac{2-6n}{4n-1},\ a = \dfrac{4-14n}{4n-1},\ n \in N.$

6. Прямоугольный треугольник ABC расположен относительно трех концентрических окружностей K_1, K_2 и K_3 радиусов 2, 3 и 4 так, что: 1) гипотенуза AB является хордой K_2 и касается окружности K_1; 2) вершина C принадлежит окружности K_3. Найти катеты треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\sqrt{40+2\sqrt{155}};\ \dfrac{1}{2}\sqrt{40-2\sqrt{155}}.$

Вариант № 3

1. Величина $\dfrac{1-9x}{x}$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $x > 0$. Найти наименьшее, возможное при этом условии, значение первого члена прогрессии.

Ответ: –4.

2. Найти множество значений функции $\operatorname{tg} 4x$ на множестве решений уравнения

$$\sin 3x - 12\cos 3x - 13\sin x = 0.$$

Ответ: $\left\{0; \frac{24}{7}; \frac{840}{41}\right\}$.

3. Найти наименьший возможный диаметр шара в пространстве, которому принадлежат все точки M с координатами $(x; y; z)$ – решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} y + z = 5xyz; \\ z + x = 6xyz; \\ x + y = 7xyz. \end{cases}$$

Ответ:

$$L_{\min} = \frac{\sqrt{174}}{6};$$

решения системы –

$$(0; 0; 0),\ \left(\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{4}; \frac{\sqrt{6}}{6}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{4}; -\frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

4. Найти целые, положительные числа x, простые делители которого только двойки или тройки, а общее число натуральных делителей числа x^2 в три раза больше числа всех натуральных делителей x.

Ответ: $x = 2^n 3^m$, $(n; m) \in \{(2; 4), (4; 2)\}$; $x \in \{324; 144\}$.

5. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 5y = 1; \\ \left| y - \left| x - (a-1)y \right| \right| = x \end{cases}$$

имеет целые решения?

Ответ: $a = 0$; $a = \frac{14n - 6}{2n - 1}$, $n \in N$.

6. Прямоугольный треугольник ABC расположен относительно трех концентрических окружностей K_1, K_2 и K_3 радиусов 4, 6 и 7 так, что: 1) гипотенуза AB является хордой K_2 и касается окружно-

сти K_1; 2) вершина C принадлежит окружности K_3. Найти катеты треугольника ABC.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{80+\sqrt{5555}}{2}};\ \sqrt{\dfrac{80-\sqrt{5555}}{2}}$.

Вариант № 4

1. Величина $\dfrac{1-16x}{x}$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $x<0$. Найти наибольшее, возможное при этом условии, значение первого члена прогрессии.

Ответ: –25.

2. Найти множество значений функции $\operatorname{tg}5x$ на множестве решений уравнения

$$14\cos^3 x+4\cos 3x-3\sin x=0.$$

Ответ: $\left\{1;\dfrac{38}{41};\dfrac{3}{79}\right\}$.

3. Найти наименьший возможный диаметр шара в пространстве, которому принадлежат все точки M с координатами $(x;y;z)$ – решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} y+z=6xyz;\\ z+x=7xyz;\\ x+y=8xyz. \end{cases}$$

Ответ:

$$L_{\min}=\frac{2}{21}\sqrt{434};$$

решения системы –

$$(0;0;0),\ \left(\frac{3\sqrt{70}}{35};\frac{\sqrt{70}}{15};\frac{\sqrt{70}}{21}\right),\ \left(-\frac{3\sqrt{70}}{35};-\frac{\sqrt{70}}{15};-\frac{\sqrt{70}}{21}\right).$$

4. Найти целые, положительные числа x, простые делители которого только тройки или семерки, а общее число натуральных де-

лителей числа x^5 в 24 раза больше числа всех натуральных делителей x.

Ответ:

$$x = 3^n 7^m,$$
$$(n; m) \in \{(20; 403), (21; 211), (22; 147),$$
$$(23; 115), (25; 83), (27; 67), (31; 51), (35; 43), (43; 35), (51; 31),$$
$$(67; 27), (83; 25), (115; 23), (147; 22), (211; 21), (403; 20)\}.$$

5. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1; \\ \left| x - \left| (a-2)x - y \right| \right| = y \end{cases}$$

имеет целые решения?

Ответ: $a = 1;\ a = 3;\ a = \dfrac{12n-7}{2n-1},\ n \in N.$

6. Прямоугольный треугольник ABC расположен относительно трех концентрических окружностей K_1, K_2 и K_3 радиусов 4, 8 и 9 так, что: 1) гипотенуза AB является хордой K_2 и касается окружности K_1; 2) вершина C принадлежит окружности K_3. Найти катеты треугольника ABC.

Ответ: $\sqrt{96 + 11\sqrt{69}};\ \sqrt{96 - 11\sqrt{69}}.$

4.1.9. Очные отборочные туры в регионах, 11 класс, комплект 2

Вариант № 1

1. Сумма любых трех последовательных членов возрастающей геометрической прогрессии в 3,5 раза больше второго из них. Найти b_{55} член прогрессии, если $b_{24} = 1$.

2. Координаты $(x; y)$ точек на плоскости являются решениями системы:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x+y) = -\sqrt{3}\sin x + \cos y; \\ \operatorname{tg}(x-y) = -\sqrt{3}\sin x - \cos y. \end{cases}$$

Сколько таких точек находится в квадрате $-\pi \le x \le 0,\quad 0 \le y \le \pi$ и каковы их координаты?

3. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, для которых $x + y = 100$, а выражение $2^{2x+1} + 2^{3y-2}$ целое и делится на 3.

4. Координаты $(x; y)$ вершин многоугольника на плоскости являются решениями системы

$$\begin{cases} x(x+2)(2x+y) = 24; \\ x^2 + 4x + y = 11. \end{cases}$$

Найти площадь многоугольника.

5. Найти значения a, при которых множество решений уравнения $\sin(\pi ax) - \cos(\pi ax) = 1$ содержит все решения уравнения $x^2 = 3\sqrt{x^2 - 16} + 4\sqrt{x^2 - 9}$.

6. Отрезок AB является диаметром окружности. Точки C и D окружности расположены по разные стороны от прямой AB, длины хорд AC и BD равны 2 и 4 соответственно. Хорда CD пересекает AB в точке E, причем $AE : EB = 1 : 3$. Найти радиус окружности.

Ответы и решения

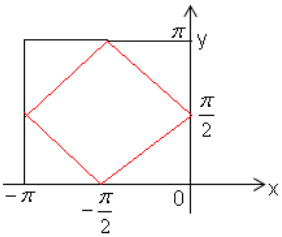
1. Из условия задачи следует, что $b_1 > 0$, $q > 1$. Согласно формуле общего члена геометрической прогрессии и условию задачи имеем: $\frac{b_n}{q} + b_n + b_n q = \frac{7}{2} b_n$. Сокращая на b_n, получим: $\frac{1}{q} + 1 + q = \frac{7}{2}$, или $2q^2 - 5q + 2 = 0$. Корни этого уравнения равны $\frac{1}{2}$ и 2.Так как последовательность – возрастающая, то выбираем $q = 2$. Тогда $b_{55} = b_{24} q^{31} = 2^{31}$.

Ответ: $b_{55} = 2^{31}$.

2. Найдем сначала ОДЗ системы:

$$\begin{cases} \cos(x+y) \ne 0; \\ \cos(x-y) \ne 0, \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + y \ne \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \\ x - y \ne \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

ОДЗ являются точки внутри квадрата, кроме точек, выделенных на рисунке красным цветом (т.е. квадрат внутри квадрата):



Вычитаем и складываем уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin 2y}{\cos(x+y)\cos(x-y)} = 2\cos y; \\ \dfrac{\sin 2x}{\cos(x+y)\cos(x-y)} = -2\sqrt{3}\sin x. \end{cases}$$

Случай 1. Пусть $\cos y = 0$, тогда в заданном квадрате $y = \dfrac{\pi}{2}$, и второе уравнение системы принимает вид $\dfrac{2\sin x\cos x}{-\sin^2 x} = -2\sqrt{3}\sin x$, откуда (так как $\sin x \neq 0$ (ОДЗ))

$$\cos x = \sqrt{3}\sin^2 x = \sqrt{3}(1-\cos^2 x), \quad \sqrt{3}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{3} = 0.$$

Отсюда найдем $\cos x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$. Тогда $\left(-\arccos\dfrac{\sqrt{13}-1}{2\sqrt{3}}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ – решение.

Случай 2. Пусть $\sin x = 0$. Тогда в заданном квадрате $x = 0$, $x = -\pi$. Следовательно, первое уравнение системы принимает вид $\dfrac{2\sin y\cos y}{\cos^2 y} = 2\cos y$, откуда (так как $\cos y \neq 0$) имеем: $\sin y = \cos^2 y$, $\sin^2 y + \sin y - 1 = 0$. Отсюда найдем $\sin y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,

тогда $\left(0;\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$; $\left(-\pi;\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$; $\left(0;\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$; $\left(-\pi;\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ – еще четыре решения.

Случай 3. Пусть $\sin x\neq 0,\ \cos y\neq 0$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases}\sin y=\cos(x+y)\cos(x-y);\\ \cos x=-\sqrt{3}\cos(x+y)\cos(x-y).\end{cases}$$

Отсюда получим:

$$\begin{cases}-\sqrt{3}\sin y=\cos x;\\ 2\sin y=\cos 2y+\cos 2x,\end{cases}$$

$$\cos 2x=6\sin^2 y-1,\quad 2\sin y=\cos 2y+6\sin^2 y-1.$$

Далее имеем: $2\sin y=4\sin^2 y$. Поскольку $\sin y\neq 0$, то $\sin y=\frac{1}{2}$; $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда найдем $\left(-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$; $\left(-\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$ – еще два решения.

Ответ: семь точек –

$$\left(-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right);\ \left(-\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right);\ \left(0;\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right);\ \left(0;\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right);$$

$$\left(-\pi;\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right);\ \left(-\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{2\sqrt{3}};\frac{\pi}{2}\right).$$

3. Имеем: $y=100-x$, тогда исходное выражение равно $A=2^{2x+1}+2^{3y-2}=2^{2x+1}+2^{298-3x}$. Если $x<0$, то 2^{2x+1} – нецелое, а 2^{298-3x} – целое, поэтому $x\geq 0$. Если $x\geq 100$, то 2^{2x+1} – целое, а 2^{298-3x} – нецелое, поэтому $x\leq 99$. Если $0\leq x\leq 99$, то оба числа 2^{2x+1} и 2^{298-3x} являются целыми. Так как $2^{2x+1}=(3-1)^{2x+1}$, то из формулы бинома Ньютона следует, что 2^{2x+1} отличается от числа,

кратного трем, на единицу, а именно: $2^{2x+1} = 3m - 1$ (так как число $(2x+1)$ –нечетное и $(-1)^{2x+1} = -1,\ x \in Z$). Так как

$$2^{298-3x} = (3-1)^{298-3x} = 3n + (-1)^{298-3x},$$

то $A = 3m + 3n - 1 + (-1)^{298-3x}$, и A кратно трем тогда и только тогда, когда число $298 - 3x$ является четным: $298 - 3x = 2l$, откуда следует, что x четно: $x = 2k,\ k \in Z$. Поскольку $0 \le x \le 99$, то имеем

$$\begin{cases} x = 2k; \\ y = 100 - 2k, \end{cases} \quad k \in Z, \quad 0 \le k \le 49.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2k; \\ y = 100 - 2k, \end{cases} \quad k \in Z, \quad 0 \le k \le 49.$

4. Введем новые переменные

$$\begin{cases} u = x^2 + 2x; \\ \upsilon = 2x + y. \end{cases}$$

Тогда заданная система примет вид

$$\begin{cases} u\upsilon = 24; \\ u + \upsilon = 11, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{bmatrix} u = 8; \\ \upsilon = 3, \end{bmatrix} \text{ или } \begin{bmatrix} u = 3; \\ \upsilon = 8. \end{bmatrix}$$

Случай 1. Пусть

$$\begin{cases} x^2 + 2x = 8; \\ 2x + y = 3, \end{cases}$$

тогда

$$\begin{bmatrix} x_1 = 2 \to y_1 = -1; \\ x_2 = -4 \to y_2 = 11. \end{bmatrix}$$

Координаты вершин $A(2; -1)$, $B(-4; 11)$.

Случай 2. Пусть

$$\begin{cases} x^2 + 2x = 3; \\ 2x + y = 8, \end{cases}$$

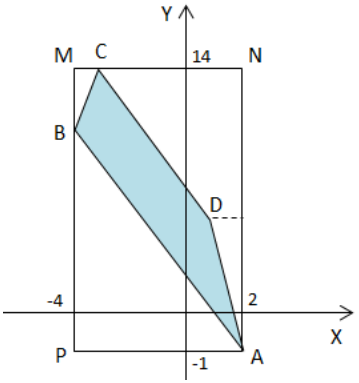


Рис. 1

тогда

$$\left[\begin{array}{l} x_3 = 1 \to y_1 = 6; \\ x_4 = -3 \to y_4 = 14. \end{array}\right.$$

Координаты вершин $D(1; 6)$, $C(-3; 14)$.

Прямоугольник $ANMP$, описанный около многоугольника $ABCD$ (рис. 1), имеет площадь $6 \cdot 15 = 90$. Площадь кусков (треугольники, трапеция), лежащих вне многоугольника и внутри прямоугольника $ANMP$, равна 65. Площадь многоугольника $ABCD$ равна $90 - 65 = 25$.

Ответ: 25.

5. Обе части уравнения

$$x^2 - 3\sqrt{x^2 - 16} = 4\sqrt{x^2 - 9}$$

возведем в квадрат:

$$x^4 - 6x^2\sqrt{x^2 - 16} + 9x^2 - 144 = 16x^2 - 144,$$

откуда, поскольку $x \neq 0$, получим

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 - 16} = 7.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$(x^2 - 16) - 6\sqrt{x^2 - 16} + 9 = 0.$$

Заметив, что левая часть уравнения является полным квадратом, получаем $(\sqrt{x^2 - 16} - 3)^2 = 0$. Отсюда находим $\sqrt{x^2 - 16} = 3$; $x^2 - 16 = 9$; $x^2 = 25$; $x = \pm 5$.

В уравнении $\sin \pi ax - \cos \pi ax = 1$ введем дополнительный угол:

$$\sqrt{2}\sin\left(\pi ax - \frac{\pi}{4}\right) = 1; \quad \sin\left(\pi ax - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

тогда имеем

$$\left[\begin{array}{l}\pi ax-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z;\\ \pi ax-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z,\end{array}\right.\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\pi ax=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;\\ \pi ax=\pi+2\pi k,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

Если $x=5,$ то

$$\left[\begin{array}{l}5\pi a=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;\\ 5\pi a=\pi+2\pi k,\ k\in Z,\end{array}\right.\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{4n+1}{10},\ n\in Z;\\ a=\dfrac{2k+1}{5}=\dfrac{4k+2}{10},\ k\in Z.\end{array}\right.$$

Если $x=-5,$ то

$$\left[\begin{array}{l}-5\pi a=\dfrac{\pi}{2}+2\pi l,\ l\in Z;\\ -5\pi a=\pi+2\pi m,\ m\in Z,\end{array}\right.\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-\dfrac{4l+1}{10},\ l\in Z;\\ a=-\dfrac{2m+1}{5}=-\dfrac{4m+2}{10},\ m\in Z.\end{array}\right.$$

В другой форме:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}a=\dfrac{4n+1}{10},\ n\in Z;\\ a=\dfrac{4k+2}{10},\ k\in Z;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}a=\dfrac{4l+3}{10},\ l\in Z;\\ a=\dfrac{4m+2}{10},\ m\in Z,\end{array}\right.\end{array}\right.\rightarrow a=\frac{4k+2}{10}=\frac{2k+1}{5}.$$

Ответ: $a=\dfrac{2k+1}{5},\ k\in Z.$

6. Пусть $AC=a,\quad BD=b,\quad AE=px,\quad EB=qx,\quad AB=2R,$ $\angle CAB=\angle CDB=\alpha,\ \angle ACD=\angle ABD=\beta.$

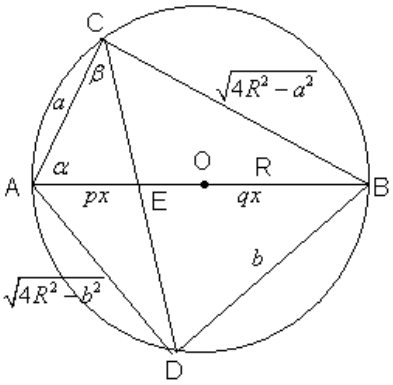


Рис. 1

Так как треугольник ABC – прямоугольный (рис. 1), то $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2R}$.

Так как треугольник ABD – прямоугольный, то

$$\sin\beta = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{4R^2-b^2}}{2R}.$$

Треугольники ACE и DBE подобны по двум углам, коэффициент подобия равен $k = \dfrac{a}{b}$.

Пусть R_1 – радиус окружности, описанной около треугольника ACE, а R_2 – радиус окружности, описанной около треугольника BDE. Тогда по теореме синусов получаем: $\dfrac{AE}{\sin\beta} = 2R_1$, $\dfrac{EB}{\sin\alpha} = 2R_2$.

Из подобия находим: $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{a}{b}$. Далее получаем:

$$AE : EB = \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha} = \frac{a\sqrt{4R^2-b^2}}{b\sqrt{4R^2-a^2}} = \frac{p}{q},$$

откуда $4R^2 = \dfrac{a^2b^2(q^2-p^2)}{a^2q^2-b^2p^2}$.

У нас $p=1,\ q=3,\ a=2,\ b=4$, поэтому $R = \dfrac{4\sqrt{10}}{5}$.

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$.

Вариант № 2

1. Сумма любых трех последовательных членов убывающей геометрической прогрессии в $\frac{13}{3}$ раза больше второго из них. Найти b_{47} член прогрессии, если $b_{15} = 2$.

Ответ: $b_{47} = \frac{2}{3^{32}}$.

2. Координаты $(x; y)$ точек на плоскости являются решениями системы:

$$\begin{cases} 3\operatorname{tg}(x+y) = -2\sin x - 4\cos y; \\ 3\operatorname{tg}(x-y) = -2\sin x + 4\cos y. \end{cases}$$

Сколько таких точек находится в квадрате $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$ и каковы их координаты?

Ответ: 1 точка: $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, для которых $x + y = 200$, а выражение $4^{2x} + 4^{y-5}$ – целое и делится на 5.

Ответ: $\begin{cases} x = 194 - 2k; \\ y = 2k + 6, \end{cases}$ $0 \le k \le 97$, $k \in Z$.

4. Координаты $(x; y)$ вершин многоугольника на плоскости являются решениями системы

$$\begin{cases} x(x-2)(3x-y) = 45; \\ x^2 + x - y = 18. \end{cases}$$

Найти длины диагоналей многоугольника.

Ответ: $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{26}$.

5. Найти значения a, при которых множество решений уравнения $\sin(\pi a x) + \cos(\pi a x) = 0$ содержит хотя бы одно решение уравнения $x^2 = 15\sqrt{x^2 - 64} + 8\sqrt{x^2 - 225}$.

Ответ: $a = \frac{2k+1}{68}$, $k \in Z$.

6. Отрезок AB является диаметром окружности. Точки C и D окружности расположены по разные стороны от AB, длины хорд AC и BD равны 4 и 5 соответственно. Хорда CD пересекает AB в точке E, причем $AE:EB=2:3$. Найти длины сторон BC и AD четырехугольника $ABCD$.

Ответ: $\frac{18}{\sqrt{11}};\ \frac{15}{\sqrt{11}}$.

Вариант № 3

1. Отношение суммы любых трех последовательных членов возрастающей геометрической прогрессии ко второму из них равно 5,25. Найти b_{58} член прогрессии, если $b_{17}=-1$.

Ответ: $b_{58}=-\frac{1}{4^{41}}$.

2. Координаты $(x;y)$ точек на плоскости являются решениями системы:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(x+y)=2\sin x-2\sqrt{2}\cos y;\\ \operatorname{tg}(x-y)=2\sin x+2\sqrt{2}\cos y.\end{cases}$$

Сколько таких точек находится в квадрате $-\pi\le x\le 0,\ -\pi\le y\le 0$ и каковы их координаты?

Ответ: 5 точек –

$$\left(0;\arcsin\frac{1-\sqrt{33}}{4\sqrt{2}}\right);\ \left(0;-\pi-\arcsin\frac{1-\sqrt{33}}{4\sqrt{2}}\right);$$

$$\left(-\pi;\arcsin\frac{1-\sqrt{33}}{4\sqrt{2}}\right);\ \left(-\pi;-\pi-\arcsin\frac{1-\sqrt{33}}{4\sqrt{2}}\right);$$

$$\left(-\arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4};-\frac{\pi}{2}\right).$$

3. Найти все пары целых чисел $(x;y)$, для которых $x+y=300$, а выражение 5^x+5^{2y+3} – целое и делится на 6.

Ответ: $\begin{cases}x=2k;\\ y=300-2k,\end{cases}\quad 0\le k\le 150.$

4. Координаты $(x; y)$ вершин многоугольника на плоскости являются решениями системы

$$\begin{cases} x(x-3)(4x-y)=40; \\ x^2+x-y=14. \end{cases}$$

Найти длины параллельных сторон многоугольника.

Ответ: $5\sqrt{17},\ 7\sqrt{17}$.

5. Найти значения a, при которых множество решений уравнения $\cos(\pi a x)+\sqrt{3}\sin(\pi a x)=1$ содержит все решения уравнения $x^2=12\sqrt{x^2-25}+5\sqrt{x^2-144}$.

Ответ: $a=\dfrac{2k}{13},\ k\in Z$.

6. Отрезок AB является диаметром окружности. Точки C и D окружности расположены по разные стороны от AB, длины хорд AC и BD равны 3 и 4 соответственно. Хорда CD пересекает AB в точке E, причем $AE:EB=1:2$. Найти острые углы $\triangle ABC$.

Ответ: $\arcsin\sqrt{\dfrac{5}{12}},\ \arcsin\sqrt{\dfrac{7}{12}}$.

Вариант № 4

1. Отношение суммы любых трех последовательных членов убывающей геометрической прогрессии ко второму из них равно 6,2. Найти b_{74} член прогрессии, если $b_{18}=-2$.

Ответ: $b_{74}=-2\cdot 5^{56}$.

2. Координаты $(x; y)$ точек на плоскости являются решениями системы:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(x+y)=-\sin x+\sqrt{3}\cos y; \\ \operatorname{tg}(x-y)=-\sin x-\sqrt{3}\cos y. \end{cases}$$

Сколько таких точек находится в квадрате $0\le x\le \pi,\ -\pi\le y\le 0$ и каковы их координаты?

Ответ: 3 точки –

$$\left(\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\right);\ \left(\frac{\pi}{3};-\frac{2\pi}{3}\right);\ \left(\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2};-\frac{\pi}{2}\right).$$

3. Найти все пары целых чисел $(x;y)$, для которых $x+y=400$, а выражение $6^{x-1}+6^{2y+3}$ – целое и делится на 7.

Ответ: $\begin{cases}x=2k+1;\\ y=399-2k,\end{cases}\quad 0\le k\le 200,\ k\in Z.$

4. Координаты $(x;y)$ вершин многоугольника на плоскости являются решениями системы

$$\begin{cases}x(x-1)(3x-y)=72;\\ x^2+2x-y=18.\end{cases}$$

Найти координаты точки пересечения диагоналей многоугольника.

Ответ: $O(0{,}5;\ -8)$.

5. Найти значения a, при которых множество решений уравнения $\sin(2\pi ax)-2\cos^2(\pi ax)=0$ содержит хотя бы одно решение уравнения $x^2=24\sqrt{x^2-49}+7\sqrt{x^2-576}$.

Ответ: $a=\dfrac{k}{100},\ k\in Z,\ k\ne 4m,\ m\in Z.$

6. Отрезок AB является диаметром окружности. Точки C и D окружности расположены по разные стороны от AB, длины хорд AC и BD равны 3 и 5 соответственно. Хорда CD пересекает AB в точке E, причем $AE:EB=2:5$. Найти площадь $\triangle ABC$.

Ответ: $S=\dfrac{18\sqrt{5}}{5}$.

4.1.10. Очные отборочные туры в регионах, 11 класс, комплект 3

Вариант № 1

1. Числа $a_1=\log_{1+\sqrt{5}}(6+2\sqrt{5})$, a_2, a_3 – первые три члена возрастающей арифметической прогрессии. Известно, что число

$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$ является решением уравнения $\sqrt{x+463} = x - 43$. Найти сумму первых 15 членов прогрессии.

2. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a; \\ \sin^2 x = \sin^2 y \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений в прямоугольнике

$$\begin{cases} 2\pi \le x \le 5\pi; \\ -\pi \le y \le 3\pi? \end{cases}$$

3. Найти целые числа x, y, z, для которых $z = \dfrac{xyz+1}{x^2+1}$. Указать среди них те, для которых $x + y + z = 4$.

4. Найти простые числа x и y, если сумма всех делителей числа $a = 2^6 \cdot x \cdot y$ в $\dfrac{127}{40}$ раза больше a.

5. При каких значениях a уравнение $x^2 - |ax + 5| = 0$ имеет на отрезке [1; 3] единственное решение?

6. Две окружности имеют один центр и радиусы 4 и 3. Две вершины квадрата принадлежат одной окружности, а две другие – другой. Найти площадь квадрата.

Ответы и решения

1. Уравнение

$$\sqrt{x+463} = x - 43 \qquad (1)$$

эквивалентно системе

$$\begin{cases} x + 463 = x^2 - 86x + 1849; \\ x \ge 43, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - 87x + 1386 = 0; \\ x \ge 43. \end{cases}$$

Уравнение $x^2 - 87x + 1386 = 0$ имеет корни $x = 21$ и $x = 66$. Так как $x \ge 43$, то условию задачи удовлетворяет только $x = 66$.

Из условия

$$a_1 = \log_{1+\sqrt{5}}(6 + 2\sqrt{5}) = \log_{1+\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^2 = 2$$

следует, что $a_1 = 2$. Тогда числа $a_1 = 2,\ \ a_2 = 2 + d,\ \ a_3 = 2 + 2d$ ($d \geq 0$) образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Следовательно, условие $a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = 66$ можно записать в виде

$$2(2 + d) + 2(2 + 2d) + (2 + d)(2 + 2d) = 66,$$

или

$$d^2 + 6d - 27 = 0.$$

Это уравнение имеет корни $d = -9$ и $d = 3$. Так как прогрессия – возрастающая, то условию задачи удовлетворяет только $d = 3$. Тогда

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15})}{2}15 = (a_1 + 7d)15 = 345.$$

Ответ: $S_{15} = 345$.

2. Систему

$$\begin{cases} x + y = a; \\ \sin^2 x = \sin^2 y \end{cases} \qquad (1)$$

перепишем в виде

$$\begin{cases} x + y = a; \\ \dfrac{1 - \cos 2x}{2} = \dfrac{1 - \cos 2y}{2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = a; \\ \cos 2x = \cos 2y. \end{cases}$$

Условие $\cos 2x = \cos 2y$ эквивалентно условию

$$\begin{cases} x - y = \pi k,\ k \in Z; \\ x + y = \pi n,\ n \in Z. \end{cases}$$

Следовательно, возможны два случая:

1) $\begin{cases} x + y = a; \\ x + y = \pi n,\ n \in Z; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = a; \\ x - y = \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$

Случай 1. Система

$$\begin{cases} x + y = a; \\ x + y = \pi n,\ n \in Z, \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений только при $a = \pi n,\ \ n \in Z,$ и решение имеет вид

$$\begin{cases} x \in R; \\ y = a - x = \pi n - x. \end{cases}$$

Прямая $y = \pi n - x$ пересекает прямоугольник

$$P = \begin{cases} 2\pi \le x \le 5\pi; \\ -\pi \le y \le 3\pi \end{cases} \quad \text{при} \quad 2 \le n \le 7 \quad \text{(рис. 1).}$$

Таким образом, в этом случае бесконечное число решений в данном прямоугольнике P будет при $a = \pi n,$ где $n \in N,\ 2 \le n \le 7.$

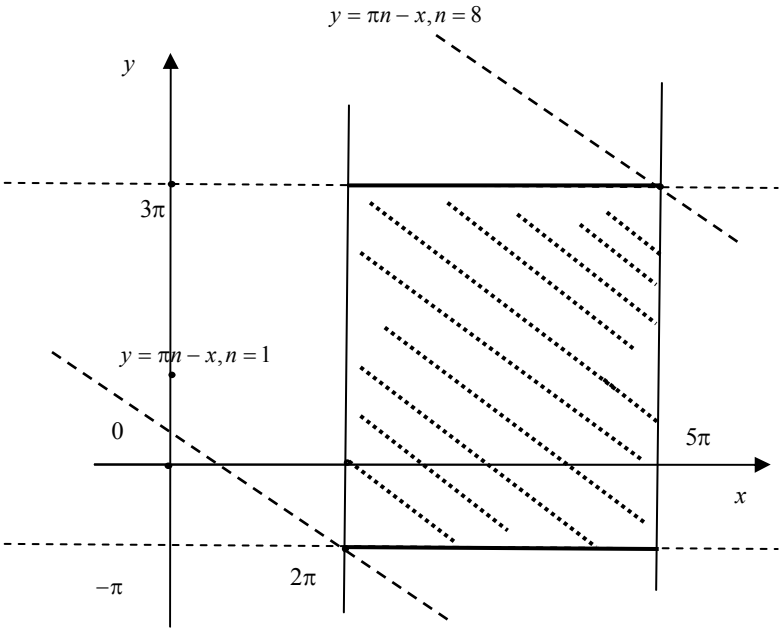


Рис. 1

Случай 2. Система имеет решение $x = \dfrac{\pi k + a}{2},\ \ y = \dfrac{a - \pi k}{2},\ \ k \in Z.$ В этом случае при любом a система (1) будет иметь конечное число решений в прямоугольнике $P.$ Объединяя результаты двух случаев,

получаем, что система (1) имеет бесконечное число решений в прямоугольнике P при $a = \pi n,\ n \in N,\ 2 \le n \le 7.$

Ответ: при $a = \pi n,\ n \in N,\ 2 \le n \le 7.$

3. Из условия

$$z = \frac{xyz + 1}{x^2 + 1} \qquad (1)$$

получим $z(x^2 + 1) = xyz + 1.$ Из этого равенства находим

$$z = \frac{1}{x^2 + 1 - xy}.$$

Так как z – целое число, то $x^2 + 1 - xy = \pm 1.$ Далее возможны два случая:

1) $x^2 + 1 - xy = 1;$

2) $x^2 + 1 - xy = -1.$

Случай 1. Имеем $x^2 - xy = 0$, или $x(x - y) = 0.$ Это уравнение имеет решения $\{x = 0\} \bigcup \{x = y = t, t \in Z\}.$ Отсюда находим тройки чисел, удовлетворяющие условию (1): (0; t; 1) и (t; t; 1), где $t \in Z.$

Случай 2. Имеем $x^2 - xy = -2,$ или $xy = x^2 + 2.$ Откуда находим $y = x + \frac{2}{x}.$ Из условия целочисленности числа y следует, что x может принимать только значения $x = \pm 1$ или $x = \pm 2.$ Учитывая это, получаем четыре тройки чисел, удовлетворяющих условию (1): (1; 3; –1), (–1; –3; –1), (2; 3; –1), (–2; –3; –1).

Итак, из двух случаев следует, что условию (1) удовлетворяют шесть троек чисел: (0; t; 1), (t; t; 1), где $t \in Z$, и (1; 3; –1), (–1; –3; –1), (2; 3; –1), (–2; –3; –1).

Второму условию $x + y + z = 4$ задачи в случае 1 удовлетворяет одна тройка чисел (0; 3; 1) при t =3. Вторая тройка (t; t; 1), $t \in Z$, не удовлетворяет условию задачи (так как $x + y + z = 2t + 1$ – нечётное число и поэтому не может равняться 4). В случае 2 условию $x + y + z = 4$ удовлетворяет также одна тройка чисел (2; 3; –1).

Ответ:

1) (0; t; 1), (t; t; 1), где $t \in Z$, и (1; 3; –1), (–1; –3; –1), (2; 3; –1), (–2; –3; –1);

2) (0; 3; 1), (2; 3; –1).

4. При решении этой задачи возможны следующие случаи.

Случай 1. Пусть $x = y = 2$. Тогда $a = 2^8 = 256$. Сумма делителей в этом случае равна

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 511.$$

Условие задачи в этом случае $511 = \frac{127}{40} \cdot 256$ не выполняется, т.е. этот случай не имеет места.

Случай 2. Пусть $x = 2;\ \ y \neq 2$. Тогда $a = 2^7 \cdot y = 128 \cdot y$. Так как сумма делителей числа 128 равна $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 255$, то сумма делителей для числа $128 \cdot y$ (в силу простоты числа y) равна $S_1 = 255 + 255y = 255(1 + y)$. Из условия задачи имеем: $255(1 + y) = \frac{127}{40} \cdot 128y$. Из этого уравнения находим $y = \frac{1275}{757}$. Так как это число – не целое, то этот случай также не имеет места.

Случай 3. Пусть $x \neq 2;\ \ y = 2$. В силу симметрии x и y этот случай аналогичен случаю 2. Следовательно, этот случай также не имеет места.

Случай 4. Пусть $x = y \neq 2$. В этом случае $a = 2^6 \cdot x^2 = 64 \cdot x^2$. Так как сумма делителей числа 64 равна $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$, то сумма делителей числа $64 \cdot x^2$ (в силу простоты числа x) равна

$$S_2 = 127 + 127 \cdot x + 127 \cdot x^2 = 127(1 + x + x^2).$$

Из условия задачи имеем: $127(1 + x + x^2) = \frac{127}{40} \cdot 64x^2$. Откуда получим: $3x^2 - 5x - 5 = 0$. Так как решения этого уравнения $x = \frac{5 \pm \sqrt{85}}{6}$ не являются целыми числами, то этот случай не имеет места.

Остаётся последний случай.

Случай 5. $x \neq 2;\ \ y \neq 2;\ \ x \neq y$. В этом случае $a = 2^6 \cdot x \cdot y = 64 \cdot x \cdot y$. Сумма делителей этого числа (в силу просто-

ты чисел x и y) равна $S_3 = 127(1 + x + y + xy)$. В силу условия задачи имеем: $127(1 + x + y + xy) = \frac{127}{40} \cdot 64xy$. Из этого равенства следует: $3xy = 5(x + y + 1)$. Левая часть этого равенства делится на 5. Следовательно, либо x, либо y делится на 5. С учётом простоты чисел, либо $x = 5$, либо $y = 5$. В случае $x = 5$ имеем $y = 3$, и наоборот, в случае $y = 5$ имеем $x = 3$.

Ответ: 1) $x = 3,\ y = 5;$ 2) $x = 5,\ y = 3.$

5. Рассмотрим два случая:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ax + 5 \geq 0, \\ a = \dfrac{x^2 - 5}{x},\ x \neq 0, \end{cases} (A) \\ \begin{cases} ax + 5 < 0, \\ a = -\dfrac{x^2 + 5}{x},\ x \neq 0, \end{cases} (B) \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ax + 5 \geq 0, \\ a = x - \dfrac{5}{x},\ x \neq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} ax + 5 < 0, \\ a = -x - \dfrac{5}{x},\ x \neq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Построим данные графики функций – гиперболы (рис. 1) на плоскости xOa, выделим отрезок $x \in [1; 3]$.

Из системы (A): $\left(x - \frac{5}{x}\right) \cdot x + 5 \geq 0,\ x^2 \geq 0,$ верно для любого $x \in R$. Из системы (B): $\left(-x - \frac{5}{x}\right) \cdot x + 5 < 0,\ -x^2 < 0,$ верно для любого $x \neq 0$. Значит, единственное решение получим, в силу непрерывности кривой A, если $1 \leq x \leq 3,$ тогда $-4 \leq a \leq \frac{4}{3}$. Для кривой B единственное решение получим в точке максимума функции $a = -x - \frac{5}{x},$ при $x = \sqrt{5}, a = -2\sqrt{5}$ и при $-6 \leq a < -\frac{14}{3},$ где $a(1) = -6,\ a(3) = -\frac{14}{3}.$

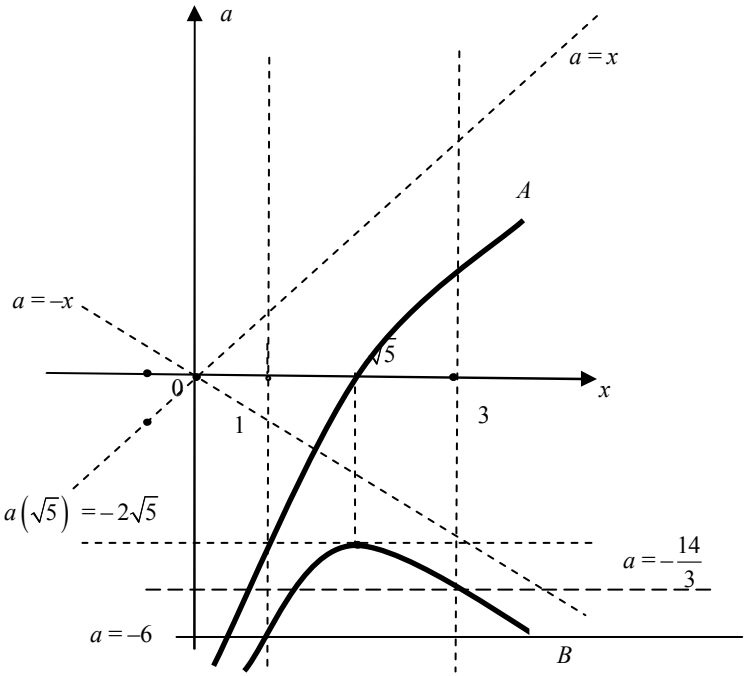


Рис. 1

Ответ: $\left[-6;-\frac{14}{3}\right)\cup\left[-4;\frac{4}{3}\right]\cup\left\{-2\sqrt{5}\right\}$.

6. Введём систему координат так, чтобы данные окружности были заданы уравнениями $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2=16$. Пусть длина стороны квадрата составляет a, тогда координаты вершин квадрата в силу симметрии:

$$\left(\frac{a}{2};y_0\right),\ \left(-\frac{a}{2};y_0\right),\ \left(\frac{a}{2};y_0+a\right),\ \left(-\frac{a}{2};y_0+a\right).$$

Подставим координаты точек $\left(\frac{a}{2};y_0\right)$ и $\left(\frac{a}{2};y_0+a\right)$ в уравнения окружностей, так как по условию точки лежат попарно на разных окружностях, найдём y_0:

$$\begin{cases}\left(\frac{a}{2}\right)^2+(y_0)^2=9,\\ \left(\frac{a}{2}\right)^2+(y_0+a)^2=16.\end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим:

$$2y_0a+a^2=7,\quad y_0=\frac{7-a^2}{2a},$$

подставим найденное выражение в первое уравнение системы:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{7-a^2}{2a}\right)^2=9,$$

откуда $2a^4-50a^2+49=0$. Решим данное биквадратное уравнение:

$$\frac{D}{4}=625-2\cdot 49=527,\quad a^2=\frac{25\pm\sqrt{527}}{2}.$$

Ответ: $S=a^2=\frac{25\pm\sqrt{527}}{2}$.

Вариант № 2

1. Числа $a_1, a_2=\log_{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}(2-\sqrt{3})$, a_3 – первые три члена возрастающей арифметической прогрессии. Известно, что число $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}$ является решением уравнения $\sqrt{5x+690}=-2-10x$. Найти a_{21} член прогрессии.

Ответ: $a_{21}=77$.

2. При каких значениях a система

$$\begin{cases}x-y=a;\\ \cos^2 x=\cos^2 y\end{cases}$$

имеет бесконечное число решений в прямоугольнике

$$\begin{cases} -7\pi \le x \le \pi; \\ 3\pi \le y \le 5\pi? \end{cases}$$

Ответ: $a = \pi n,\ n \in Z,\ -11 \le n \le -3.$

3. Найти целые числа x, y, z, для которых $z = \dfrac{xyz+1}{x^3+1}$. Указать среди них те, для которых $x + y + z = 3$.

Ответ:

1) (0; t; 1), $t \in Z$, (t; t^2; 1), $t \in Z$, $t \ne -1$, (1; 3; –1), (2; 5; –1), (–2; 3; –2);

2) (0; 2; 1), (1; 1; 1), (–2; 4; 1), (1; 3; –1).

4. Найти простые числа x и y, если сумма всех делителей числа $a = 2^7 \cdot x \cdot y$ в $\dfrac{27}{10}$ раза больше a.

Ответ: $x = 5,\ y = 7$ или $x = 7,\ y = 5.$

5. При каких значениях a уравнение $x + \left|ax^2 - 4\right| = 0$ имеет на отрезке $[-10; -1]$ единственное решение?

Ответ: $a \in (-0,06; 0,14) \cup (3; 5] \cup \left\{-\dfrac{1}{16}\right\}.$

6. Две окружности имеют один центр и радиусы 3 и 2. Две вершины квадрата принадлежат одной окружности, а две другие – другой. Найти площадь квадрата.

Ответ: $S = \dfrac{13 \pm \sqrt{119}}{2}.$

Вариант № 3

1. Числа $a_1,\ a_2,\ a_3 = \log_{\sqrt{5}-2}(9 + 4\sqrt{5})$ – первые три члена убывающей арифметической прогрессии. Известно, что число $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ является решением уравнения $\sqrt{x + 449} = 5 - 2x.$ Найти разность прогрессии.

Ответ: $d = -3.$

2. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x + y = a; \\ \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений в прямоугольнике

$$\begin{cases} -3\pi \le x \le 2\pi; \\ -2\pi \le y \le 2\pi? \end{cases}$$

Ответ: $a = \pi n,\ \ n \in Z,\ \ -4 \le n \le 3.$

3. Найти целые числа x, y, z, для которых $z = \dfrac{xyz+1}{x^4+1}$. Указать среди них те, для которых $x + y + z = 11$.

Ответ:

1) (0; t; 1), $(t; t^3; 1),\ \ t \in Z,$ (1; 3; –1), (2; 9; –1), (–2; –9; –1), (–1; –3; –1);

2) (0; 10; 1), (2; 8; 1).

4. Найти простые числа x и y, если сумма делителей числа $a = 3^5 \cdot x \cdot y$ в $\dfrac{26}{9}$ раза больше a.

Ответ: $x = 2,\ \ y = 7$ или $x = 7,\ \ y = 2.$

5. При каких значениях a уравнение $ax + \left|x^2 - 1\right| = 0$ имеет на отрезке $[-2; 0,5]$ единственное решение?

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right] \cup \{0\} \cup \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right).$

6. Две окружности имеют один центр и радиусы 5 и 4. Две вершины квадрата принадлежат одной окружности, а две другие – другой. Найти площадь квадрата.

Ответ: $S = \dfrac{41 \pm \sqrt{1519}}{2}.$

Вариант № 4

1. Числа $a_1,\ \ a_2,\ \ a_3$ – первые три члена убывающей арифметической прогрессии, причём $a_1 + a_2 = \log_{(2-\sqrt{3})^2}\left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)$. Известно,

что число $-a_1a_2a_3(a_1+a_2+a_3)$ является решением уравнения $\sqrt{256x+352}=256x+10$. Найти a_{32} член прогрессии.

Ответ. $a_{32}=-\frac{61}{4}$.

2. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x-y=a; \\ \operatorname{ctg}^2 x=\operatorname{ctg}^2 y \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений в прямоугольнике

$$\begin{cases} 2\pi \le x \le 7\pi; \\ -5\pi \le y \le -3\pi? \end{cases}$$

Ответ: $a=\pi n,\ \ n\in N,\ \ 6\le n\le 11$.

3. Найти целые числа x, y, z, для которых $z=\frac{xyz+1}{x^5+1}$. Указать среди них те, для которых $x+y+z=15$.

Ответ:

1) (0; t; 1), $t\in Z$, $(t;t^4;1)$, $t\in Z$, $t\ne -1$, (1; 3; –1), (2; 17; –1), (–2; 15; –1);

2) (0; 14; 1), (–2; 16; 1).

4. Найти простые числа x и y, если сумма всех делителей числа $a=3^4\cdot x\cdot y$ в $\frac{121}{45}$ раза больше a.

Ответ: $x=2,\ \ y=5$ или $x=5,\ \ y=2$.

5. При каких значениях a уравнение $a+\left|ax+x^2+4\right|=0$ имеет на отрезке $[2;5]$ единственное решение?

Ответ: $a\in\left[-8;-\frac{29}{4}\right)\cup\{-2;-2\sqrt{5}\}\cup\left[-\frac{29}{6};-\frac{8}{3}\right]$.

6. Две окружности имеют один центр и радиусы 5 и 3.Две вершины квадрата принадлежат одной окружности, а две другие – другой. Найти площадь квадрата.

Ответ: $S=17\pm\sqrt{161}$.

4.2. Заключительные туры

4.2.1. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 7 класс

Вариант № 1

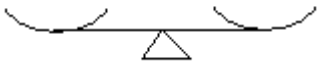
1. На кофту нужно пришить 3 пуговицы одинакового цвета. Имеется мешочек с пуговицами, одинаковыми по форме и различающимися только по цвету. Всего цветов – 4. Какое наименьшее количество пуговиц нужно высыпать из мешочка, чтобы быть уверенным, что среди них найдутся 3 пуговицы одного цвета?

2. Найти наименьшее целое число $a \geq 1000$, которое при делении на 35 и 45 дает одинаковые остатки, равные 1.

3. Саша и Даша придумали игру. В мешок сложили 2013 карточек, на которых написана двойка, и 1340 карточек, на которых написан нуль. Каждый из ребят, по очереди, берет из мешка вслепую две карточки, суммирует написанные на них числа, пишет результат на новую карточку и возвращает ее в мешок. Игра заканчивается, когда в мешке останется одна карточка. Какое число будет на ней написано? Кто ее обнаружит, если игру начинал Саша?

4. Сколько существует двузначных чисел, кратных трем и делящихся на сумму своих цифр? Найти наибольшее такое число.

5. У продавца имеется ограниченное число трехкилограммовых гирь и практически неограниченное число пятикилограммовых. Какое минимальное количество трехкилограммовых гирь должно быть у продавца, чтобы он мог взвесить на весах любой груз, содержащий целое число килограммов, если груз и гири могут располагаться на любых чашах весов?



Ответы и решения

1. Существует набор из 8 пуговиц, в котором нет трёх пуговиц одного цвета: по две пуговицы каждого цвета. В любом наборе из 9 пуговиц найдётся хотя бы одна тройка пуговиц одного цвета. Дей-

ствительно, если предположить противное: что одинаковых по цвету не более двух пуговиц, то всего таких пуговиц не более 8 шт., что противоречит условию.

Ответ: 9 пуговиц.

2. Из условия задачи следует, что искомое число a должно удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} a = 35n + 1; \\ a = 45m + 1, \end{cases} \quad \text{где} \quad n, m \in N.$$

Откуда получим уравнение в целых числах $35n = 45m$, или $7n = 9m$. Это уравнение имеет бесконечное число решений вида: $n = 9t$, $m = 7t$, $t \in Z$.

Тогда число a имеет вид: $a = 315t + 1$. Наименьшее значение t, при котором $a = 315t + 1 \geq 1000$, равно 4. Следовательно, $a_{\min} = a(4) = 1261$.

Ответ: 1261.

3. Заметим, что на каждом шаге игры сумма чисел, написанных на карточках в мешке, не меняется. В начале игры она составляла $2013 \cdot 2 = 4026$. Следовательно, на последней карточке будет написано число 4026.

Очевидно, что каждый шаг игры меняет чётность числа карточек в мешке, поскольку уменьшает их число на единицу. Первоначально общее число карточек в мешке нечётно, поэтому Саша будет делать свой ход, когда число карточек в мешке – нечётное, а Даша, когда число карточек в мешке чётное. Последний ход произойдёт, когда в мешке останется одна карточка, т.е. их число будет нечётное и обнаружит это Саша.

Ответ: 1) на последней карточке будет число 4026; 2) последнюю карточку обнаружит Саша.

4. Пусть x – число десятков, а y – число единиц искомого числа. Тогда для числа a, удовлетворяющего условиям задачи, справедливы равенства:

$$\begin{cases} a = 10x + y = 3k; \\ a = 10x + y = (x + y)m. \end{cases} \qquad (1)$$

Так как $12 \le a \le 99,$ то $4 \le k \le 33$. Из (1) следует

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{3k}{m}, \\ 10x + y = 3k, \end{cases} \qquad 4 \le k \le 33. \tag{2}$$

Решая эту систему получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{k(m-1)}{3m}; \\ y = \dfrac{k(10-m)}{3m}. \end{cases} \tag{3}$$

Так как $x > 0,\ \ y \ge 0,$ то $2 \le m \le 10.$ Рассмотрим каждое значение m.

В случае $m = 2$ получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{k}{6}; \\ y = \dfrac{4k}{3}. \end{cases}$$

Откуда следует, что $k = 6t$ и $x = t,\ y = 8t,\ \ t \in N$. Возможно только $t = 1$. Итак, в этом случае получим только одно число $a = 18$.

В случае $m = 3$ получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2k}{9}; \\ y = \dfrac{7k}{9}. \end{cases}$$

Откуда следует, что $k = 9t$ и $x = 2t,\ y = 7t,\ \ t \in N$. Возможно только значение $t = 1$, т.е. в этом случае получим только число $a = 27$.

В случае $m = 4$ получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{k}{4}; \\ y = \dfrac{k}{2}. \end{cases}$$

Откуда следует, что $k = 4t$ и $x = t,\ y = 2t,\ \ t \in N$. В этом случае t может принимать значения 1, 2, 3 и 4. Этим значениям t отвечает четыре числа $a = 12,\ a = 24,\ a = 36,\ a = 48$.

В случае $m = 5$ получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4k}{15}; \\ y = \dfrac{k}{3}. \end{cases}$$

Откуда следует, что $k = 15t$ и $x = 4t$, $y = 5t$, $t \in N$. В этом случае t может принимать единственное значение $t = 1$ и тогда получим единственное число $a = 45$.

В случае $m = 6$ получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{5k}{18}; \\ y = \dfrac{2k}{9}. \end{cases}$$

Откуда следует, что $k = 18t$ и $x = 5t$, $y = 4t$, $t \in N$. В этом случае t может принимать единственное значение $t = 1$ и тогда получим единственное число $a = 54$.

В случае $m = 7$ получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2k}{7}; \\ y = \dfrac{k}{7}. \end{cases}$$

Откуда следует, что $k = 7t$ и $x = 2t$, $y = t$, $t \in N$. В этом случае t может принимать значения 1, 2, 3, 4. Этим значениям t отвечает четыре числа $a = 21$, $a = 42$, $a = 63$, $a = 84$.

В случае $m = 8$ получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{7k}{24}; \\ y = \dfrac{k}{12}. \end{cases}$$

Откуда следует, что $k = 24t$ и $x = 7t$, $y = 2t$, $t \in N$. В этом случае t может принимать единственное значение $t = 1$. Этому значению t отвечает единственное число $a = 72$.

В случае $m = 9$ получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{8k}{27}; \\ y = \dfrac{k}{27}. \end{cases}$$

Откуда следует, что $k = 27t$ и $x = 8t$, $y = t$, $t \in N$. В этом случае t может принимать единственное значение $t = 1$ и ему отвечает единственное число $a = 81$.

В случае $m = 10$ получим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3k}{10}; \\ y = 0. \end{cases}$$

Откуда следует, что $k = 10t$ и $x = 3t$, $y = 0$, $t \in N$. В этом случае t может принимать значения 1, 2, 3 и этим значениям t отвечает три числа $a = 30$, $a = 60$, $a = 90$.

Ответ: 1) числа 12, 18, 21, 24, 27, 30, 36, 42, 45, 48, 54, 60, 63, 72, 81, 84, 90 удовлетворяют условиям задачи;

2) максимальное из этих чисел $a = 90$.

5. Укажем минимальное количество гирь по 3 кг для взвешивания грузов в 1, 2, 3 и 4 кг.

Для взвешивания груза в 1 кг нужно 2 гири по 3 кг. Действительно, для этого нужно на одну чашу весов положить 2 гири по 3 кг, а на другую чашу весов положить гирю в 5 кг и груз в 1 кг.

Для взвешивания груза в 2 кг нужна 1 гиря в 3 кг. Действительно, для этого нужно на одну чашу весов положить гирю в 5 кг, а на другую – гирю в 3 кг и груз в 2 кг.

Для взвешивания груза в 3 кг нужна 1 гиря в 3 кг. Действительно, для этого нужно на одну чашу весов положить 1 гирю в 3 кг, а на другую – груз в 3 кг.

Для взвешивания груза в 4 кг нужно 2 гири в 3 кг. Действительно, для этого нужно на одну чашу весов положить 2 гири по 5 кг , а на другую – 2 гири по 3 кг и груз в 4 кг.

Если нужно взвесить груз произвольного веса, то следует заметить, что вес произвольного груза при делении на 5 имеет в остатке числа 0, 1, 2, 3 и 4. Если остаток 0, то груз можно взвесить с по-

мощью гирь только в 5 кг. Если вес груза $5n + 1$ кг, то на одну чашу весов следует положить 2 гири по 3 кг и n гирь по 5 кг, а на другую – одну гирю в 5 кг и груз в $(5n + 1)$ кг.

Если вес груза $(5n + 2)$ кг, то на одну чашу весов следует положить $(n + 1)$ гирю по 5 кг, а на другую 1 гирю в 3 кг и груз в $(5n + 2)$ кг. Если вес груза $(5n + 3)$ кг, то на одну чашу весов следует положить 1 гирю в 3 кг и n гирь по 5 кг, а на другую – груз весом в $(5n + 3)$ кг. И, наконец, если вес груза $(5n + 4)$ кг, то на одну чашу весов следует положить $(n + 2)$ гири по 5 кг, а на другую чашу весов положить 2 гири по 3 кг и груз в $(5n + 4)$ кг. Таким образом, из приведённых выше рассмотрений следует, что для взвешивания любого груза достаточно двух гирь по 3 кг.

Ответ: для взвешивания любого груза достаточно двух гирь по 3 кг.

Вариант № 2

1. На кофту нужно пришить 4 пуговицы одинакового цвета. Имеется мешочек с пуговицами, одинаковыми по форме и различающимися только по цвету. Всего цветов – 5. Какое наименьшее количество пуговиц нужно высыпать из мешочка, чтобы быть уверенным, что среди них найдутся 4 пуговицы одного цвета?

Ответ: 16 пуговиц.

2. Найти наименьшее целое число $a \geq 2000$, которое при делении на 63 и 72 имеют одинаковые остатки, равные 12.

Ответ: 2028.

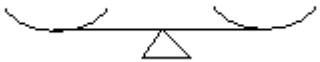
3. Петя и Маша придумали игру. В мешок сложили 2014 карточек, на которых написана тройка и 1922 карточки, на которых написан нуль. Каждый из ребят, по очереди, берет из мешка вслепую две карточки, суммирует написанные на них числа, пишет результат на новую карточку и возвращает ее в мешок. Игра заканчивается, когда в мешке останется одна карточка. Какое число будет на ней написано? Кто ее обнаружит, если игру начинала Маша?

Ответ: 1) на последней карточке будет число 6042; 2) последнюю карточку обнаружит Петя.

4. Сколько существует двузначных чисел, кратных четырем и делящихся на сумму своих цифр? Найти наименьшее такое число.

Ответ: 1) 10; 2) максимальное из этих чисел $a = 12$.

5. У продавца имеется ограниченное число трехкилограммовых гирь и практически неограниченное число семикилограммовых. Какое минимальное количество трехкилограммовых гирь должно быть у продавца, чтобы он мог взвесить на весах любой груз, содержащий целое число килограммов, если груз и гири могут располагаться на любых чашах весов?



Ответ: для взвешивания любого груза достаточно трёх гирь по 3 кг.

Вариант № 3

1. На кофту нужно пришить 5 пуговиц одинакового цвета. Имеется мешочек с пуговицами, одинаковыми по форме и различающимися только по цвету. Всего цветов – 6. Какое наименьшее количество пуговиц нужно высыпать из мешочка, чтобы быть уверенным, что среди них найдутся 5 пуговиц одного цвета?

Ответ: 25 пуговиц.

2. Найти наименьшее целое число $a \geq 3000$, которое при делении на 77 и 133 имеют одинаковые остатки, равные 3.

Ответ: 4392.

3. Дима и Вова придумали игру. В мешок сложили 1947 карточек, на которых написана четверка, и 998 карточек, на которых написан нуль. Каждый из ребят, по очереди, берет из мешка вслепую две карточки, суммирует написанные на них числа, пишет результат на новую карточку и возвращает ее в мешок. Игра заканчивается, когда в мешке останется одна карточка. Какое число будет на ней написано? Кто ее обнаружит, если игру начинал Вова?

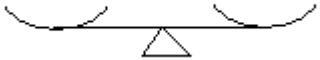
Ответ: 1) на последней карточке будет число 7788; 2) последнюю карточку обнаружит Вова.

4. Сколько существует двузначных чисел, кратных пяти и делящихся на сумму своих цифр? Найти среди них число с наименьшей суммой цифр.

Ответ: 1) 10; 2) минимальное из этих чисел $a = 10$.

5. У продавца имеется ограниченное число пятикилограммовых гирь и практически неограниченное число семикилограммовых.

Какое минимальное количество пятикилограммовых гирь должно быть у продавца, чтобы он мог взвесить на весах любой груз, содержащий целое число килограммов, если груз и гири могут располагаться на любых чашах весов?



Ответ: для взвешивания любого груза достаточно трёх гирь по 5 кг.

Вариант № 4

1. На кофту нужно пришить 6 пуговиц одинакового цвета. Имеется мешочек с пуговицами, одинаковыми по форме и различающимися только по цвету. Всего цветов – 7. Какое наименьшее количество пуговиц нужно высыпать из мешочка, чтобы быть уверенным, что среди них найдутся 6 пуговиц одного цвета?

Ответ: 36 пуговиц.

2. Найти наименьшее целое число $a \geq 4000$, которое при делении на 56 и 88 имеют одинаковые остатки, равные 4.

Ответ: 4344.

3. Паша и Егор придумали игру. В мешок сложили 1960 карточек, на которых написана 5, и 716 карточек, на которых написан 0. Каждый из ребят, по очереди, берет из мешка вслепую две карточки, суммирует написанные на них числа, пишет результат на новую карточку и возвращает ее в мешок. Игра заканчивается, когда в мешке останется одна карточка. Какое число будет на ней написано? Кто ее обнаружит, если игру начинал Паша?

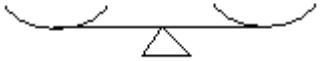
Ответ: 1) на последней карточке будет число 9800; 2) последнюю карточку обнаружит Егор.

4. Сколько существует двузначных чисел, кратных шести и делящихся на сумму своих цифр? Найти среди них числа с наибольшей суммой цифр.

Ответ: 1) 12; 2) $a = 48$ и $a = 84$.

5. У продавца имеется ограниченное число четырехкилограммовых гирь и практически неограниченное число девятикилограммовых. Какое минимальное количество четырехкилограммовых гирь должно быть у продавца, чтобы он мог взвесить на весах лю-

бой груз, содержащий целое число килограммов, если груз и гири могут располагаться на любых чашах весов?



Ответ: для взвешивания любого груза достаточно четырёх гирь по 4 кг.

4.2.2. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 8 класс

Вариант № 1

1. Возраст Пети, исчисляемый целым числом лет, в конце 2013 года равнялся сумме числа десятков и единиц в написании года его рождения. В каком году родился Петя?

2. Найти наибольшее двузначное, целое, положительное число, частное от деления которого на разность его цифр равно 21.

3. Если из некоторого числа вычесть 27, затем приписать первой цифрой 2, а последней – 9, то получится квадрат исходного числа. Найти это число.

4. Какое из чисел больше $\sqrt{2012}+\sqrt{2014}$ или $2\sqrt{2013}$? Ответ обосновать.

5. В параллелограмме с длинами диагоналей 1 и 2 расположен ромб так, что на каждой стороне параллелограмма лежит одна из вершин ромба, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найти длину стороны ромба.

Ответы и решения

1. Год рождения запишем в виде: $1000x+100y+10z+u$. По условию задачи:

$$2013-\left(1000x+100y+10z+u\right)=z+u\,. \qquad (1)$$

Возможны случаи, когда $x = 1$ и $x = 2$.

Рассмотрим отдельно каждый случай.

Пусть $x = 1$. Тогда

$$2u=1013-100y-11z. \qquad (2)$$

Так как $2u \le 18$, $11z \le 99$, то $2u + 11z \le 117$. Следовательно, $y = 9$. Тогда из (2) получим:

$$2u = 113 - 11z. \qquad (3)$$

Если $z \le 8$, то $113 - 11z \ge 25$ и это невозможно (так как $u \le 9$), т.е. $z = 9$. Тогда из (3) получим: $2u = 113 - 99 = 14$. Следовательно, $u = 7$.

Итак, в первом случае получим: Петя родился в 1997-м году.

Рассмотрим 2-й случай, когда $x = 2$. Тогда из (1) получим: $2u = 13 - 100y - 11z$, или $100y = 13 - (11z + 2u)$. Следовательно, $y = 0$. Тогда $11z + 2u = 13$. Откуда следует, что $z = 1$, $u = 1$. Таким образом, получим, что во втором случае год рождения Пети равен 2011.

Ответ: Петя мог родиться в 1997-м или 2011-м году.

2. Пусть x – число десятков, а y – число единиц искомого числа. Рассмотрим случай, когда $x > y$.

Тогда согласно условию задачи получим: $10x + y = 21(x - y)$. Откуда следует, что $11x = 22y$, или $x = 2y$. Из этого равенства имеем, что наибольшее y равно четырём. Следовательно, наибольшее число в этом случае равно 84.

Рассмотрим 2-й случай, когда $x \le y$. Тогда согласно условию задачи получим: $10x + y = 21(y - x)$, или $31x = 20y$. Это диофантово уравнение имеет бесконечное число решений вида:

$$\begin{cases} x = 20k; \\ y = 31k, \end{cases} \quad \text{где} \quad k \in Z.$$

Так как $0 < x \le 9$, $0 < y \le 9$, то такого двузначного числа не существует.

Ответ: число 84.

3. Ясно, что исходное число не более чем двузначное. Пусть x – число десятков, а y – число единиц искомого числа. Тогда искомое число a имеет вид: $a = 10x + y$. Согласно условию задачи имеем:

$$2 \cdot 1000 + (x - 2)100 + (y - 7)10 + 9 = (10x + y)^2.$$

Перепишем это равенство в виде:

$$(10x+y)^2-10(10x+y)=1739,$$

$$(10x+y)^2-2\cdot5(10x+y)+25=1764.$$

Тогда $(10x+y-5)^2=42^2$. Откуда получим: $10x+y-5=42$. Следовательно, $a = 10x + y = 47$.

Ответ: $a = 47$.

4. Запишем условие задачи в виде:

$$\sqrt{2012}+\sqrt{2014}\ \text{V}\ 2\sqrt{2013}.$$

По свойствам числовых неравенств:

$$\sqrt{2014}-\sqrt{2013}\ \text{V}\ \sqrt{2013}-\sqrt{2012},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2014}+\sqrt{2013}}\ \text{V}\ \frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2012}}.$$

Следовательно, $\sqrt{2014}+\sqrt{2013}>\sqrt{2013}+\sqrt{2012}$. Поскольку $\sqrt{2014}>\sqrt{2012}$, т.е. знак V соответствует знаку «меньше» (<).

Ответ: второе число больше первого.

5. Пусть $AB = a$, $BC = b$, $BD = d$, $AC = D$ (рис. 1). Обозначим за $x=\frac{BN}{NC}$. Тогда из подобия треугольников NCP и BCD получаем, что $\frac{NP}{d}=1-x$. Следовательно, $NP=(1-x)d$.

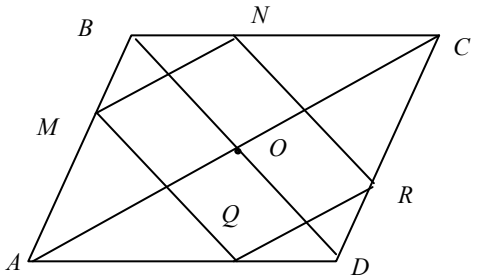


Рис. 1

Аналогично, из подобия ΔMBN и ΔABC имеем, что $\frac{MN}{D} = x$. Следовательно, $MN = xD$. Далее, так как $MNPG$ – ромб, то $NP = MN$ или $(1-x)d = xD$. Из этого равенства получим, что $x = \frac{d}{d+D}$. Тогда $MN = xD = \frac{dD}{d+D}$. Так как в нашем случае $d = 1$, а $D = 2$, то $MN = \frac{2}{3}$.

Ответ: сторона ромба равна $\frac{2}{3}$.

Вариант № 2

1. Возраст Пети, исчисляемый целым числом лет, в конце 2012 года был на три года больше, чем сумма числа десятков и единиц в написании года его рождения. В каком году родился Петя?

Ответ: Петя родился в 1995-м году.

2. Найти наименьшее двузначное, целое, положительное число, частное от деления которого на сумму его цифр равно 7.

Ответ: 21.

3. Если к некоторому числу прибавить 33, затем приписать первой цифрой 3, а последней – 9, то получится квадрат исходного числа. Найти это число.

Ответ: 63.

4. Какое из чисел меньше $\sqrt{1946}+\sqrt{1948}$ или $2\sqrt{1947}$? Ответ обосновать.

Ответ: второе число больше первого.

5. В параллелограмме с длинами диагоналей 3 и 4 расположен ромб так, что на каждой стороне параллелограмма лежит одна из вершин ромба, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найти отношение, в котором вершины ромба делят стороны параллелограмма.

Ответ: 3:4 и 4:3.

Вариант № 3

1. Возраст Пети, исчисляемый целым числом лет, в конце 1993 года был равен числу десятков в написании года его рождения. В каком году родился Петя?

Ответ: Петя родился в 1985-м году.

2. Найти наибольшее двузначное, целое, положительное число, частное от деления которого на разность его цифр равно 12.

Ответ: 48.

3. Если из некоторого числа вычесть 43, затем приписать первой цифрой 3, а последней – 6, то получится квадрат исходного числа. Найти это число.

Ответ: 56.

4. Какое из чисел больше $\sqrt{1971}+\sqrt{1973}$ или $2\sqrt{1972}$? Ответ обосновать.

Ответ: второе число больше первого.

5. В параллелограмме с длинами диагоналей 4 и 5 расположен ромб так, что на каждой стороне параллелограмма лежит одна из вершин ромба, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найти периметр ромба.

Ответ: 8:9.

Вариант № 4

1. Возраст Пети, исчисляемый целым числом лет, в конце 1980 года был равен сумме числа сотен и десятков в написании года его рождения. В каком году родился Петя?

Ответ: Петя родился в 1965-м году.

2. Найти наименьшее двузначное, целое, положительное число, частное от деления которого на сумму его цифр равно 4.

Ответ: 12.

3. Если к некоторому числу прибавить 1, затем приписать первой цифрой 5, а последней – 6, то получится квадрат исходного числа. Найти это число.

Ответ: 76.

4. Какое из чисел меньше $\sqrt{1995}+\sqrt{1997}$ или $2\sqrt{1996}$? Ответ обосновать.

Ответ: второе число больше первого.

5. В параллелограмме с длинами диагоналей 3 и 5 расположен ромб так, что на каждой стороне параллелограмма лежит одна из вершин ромба, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найти сумму квадратов диагоналей ромба.

Ответ: 225:16.

4.2.3. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 9 класс

Вариант № 1

1. У Пети было три палочки: первая длиной 5, вторая и третья – по 9. Из них он составил треугольник, причем ни один из его углов не равнялся $120°$. Чтобы образовать треугольник с углом $120°$, ему пришлось одинаково укоротить первую и третью палочки, а вторую – укоротить на величину в два раза большую. Насколько укоротил Петя третью палочку?

2. При каких целых значениях a и b многочлен $16x^4 + ax^3 + 25x^2 - 6x + b$ является квадратом квадратного трехчлена? Найти этот квадратный трехчлен.

3. Сумма квадратов n первых членов арифметической прогрессии $\{a_m\}$ равна $\dfrac{n(6n^2+3n-1)}{2}$ для любого натурального n. Найти a_{15} и разность прогрессии.

4. При каких значениях a все решения уравнения $\sqrt{x^2} + \sqrt[3]{(x-3)^3} = a$ – целые числа?

5. На продолжении стороны AB треугольника ABC выбрана точка D так, что $BD : AB = 2$. Точка F расположена на стороне AC и делит эту сторону в отношении $AF : FC = 1:3$. Прямая FD пересекает сторону BC в точке E. Найти отношение длин отрезков $BE : EC$.

1. Обозначим через x величину, на которую укоротили первую палочку. После укорачивания длины первой, второй и третьей палочек стали равными $5-x, 9-2x$ и $9-x$ соответственно. Из условия положительности длины стороны получаем ограничение на x: $0<x<4,5$. Так как в треугольнике против большего угла лежит сторона с большей длиной, то в образованном треугольнике против угла $120°$ лежит сторона, длина которой равна $9-x$. Запишем теорему косинусов для треугольника со сторонами $5-x,\ 9-2x,\ 9-x$ и углом $120°$ напротив стороны длиной $9-x$:

$$(9-x)^2=(5-x)^2+(9-2x)^2+(5-x)(9-2x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x^2-47x+70=0.$$

Решив это уравнение, получим $x=2$ и $x=\frac{35}{6}=5\frac{5}{6}$. Условию $0<x<4,5$ удовлетворяет $x=2$.

Ответ: 2.

2. Запишем условие задачи:

$$16x^4+ax^3+25x^2-6x+b=\left(Ax^2+Bx+C\right)^2.$$

Возведем в квадрат правую часть уравнения:

$$\left(Ax^2+Bx+C\right)^2=A^2x^4+2ABx^3+B^2x^2+2ACx^2+2BCx+C^2,$$

перенесем все слагаемые из правой части уравнения в левую часть и приведем подобные:

$$\left(16-A^2\right)x^4+\left(a-2AB\right)x^3+$$

$$+\left(25-B^2-2AC\right)x^2-\left(6+2BC\right)x+b-C^2=0,$$

Это равенство выполняется при любых x тогда и только тогда, когда коэффициенты при x^4, x^3, x^2, x и свободный член равны нулю, т.е.

$$\left(16-A^2\right)=0,\quad a-2AB=0,\quad 25-B^2-2AC=0,$$

$$6+2BC=0,\quad b-C^2=0.$$

Из первого уравнения имеем $A=\pm 4$.

Случай 1. $A=4$. Подставим $A=4$ в оставшиеся уравнения: $a=8B$, $B^2+8C-25=0$, $BC=-3$, $b=C^2$. Умножим уравнение $B^2+8C-25=0$ на B: $B^3+8BC-25B=0$. С учетом того, что $BC=-3$ имеем $B^3-25B-24=0$. Разложив левую часть уравнения на множители $B^3-B-24B-24=(B+1)\left(B^2-B-24\right)$, получим $B+1=0$ или $B^2-B-24=0$. Так как уравнение $B^2-B-24=0$ целых решений не имеет (его решения $B=\dfrac{1\pm\sqrt{577}}{2}$), то $B=-1$. Находим $C=3$, $a=-8$, $b=9$. Квадратный трехчлен имеет вид $4x^2-x+3$.

Случай 2. $A=-4$. Подставим $A=-4$ в оставшиеся уравнения: $a=-8B$, $B^2-8C-25=0$, $BC=-3$, $b=C^2$. После замены $\tilde{B}=-B$, $\tilde{C}=-C$ уравнения преобразуются к виду $a=8\tilde{B}$, $\tilde{B}^2-8\tilde{C}-25=0$, $\tilde{B}\tilde{C}=-3$, $b=\tilde{C}^2$. Эти уравнения совпадают с уравнениями, рассмотренными в случае 1. Следовательно, $\tilde{B}=-1$, $\tilde{C}=3$, $a=-8$, $b=9$. Квадратный трехчлен имеет вид: $-4x^2+x-3$.

Ответ:

1) $a=-8, b=9$, $4x^2-x+3$;

2) $a=-8, b=9$, $-4x^2+x-3$.

3. Для любого натурального n выполняется равенство

$$S_n^2\equiv a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=\frac{n(6n^2+3n-1)}{2}.$$

Возьмем $n=1$: $a_1^2=4\Rightarrow a_1=\pm 2$.

При $n=2$: $a_2^2+4=29\Rightarrow a_2=\pm 5$.

Таким образом, получаем четыре арифметические прогрессии.

Случай 1. $a_1=2,\ a_2=5$. Тогда $d=3,\ a_{15}=44$.

Случай 2. $a_1=-2,\ a_2=-5$. Тогда $d=-3,\ a_{15}=-44$.

Случай 3. $a_1=2,\ a_2=-5$. Тогда $d=-7,\ a_{15}=-96$.

Случай 4. $a_1=2,\ a_2=5$. Тогда $d=7,\ a_{15}=96$.

Осталось проверить, удовлетворяют ли полученные арифметические прогрессии условию задачи.

Воспользуемся методом математической индукции.

При $n=1$ утверждение верно (мы так выбирали a_1^2).

Индуктивное предположение: пусть утверждение верно при $n=k$, т.е. $S_k^2=\dfrac{k(6k^2+3k-1)}{2}$.

Докажем утверждение для $n=k+1$:

$$S_{k+1}^2=\frac{(k+1)(6(k+1)^2+3(k+1)-1)}{2}.$$

Рассмотрим $S_{k+1}^2-S_k^2$. С одной стороны,

$$S_{k+1}^2-S_k^2=\frac{(k+1)(6(k+1)^2+3(k+1)-1)}{2}-\frac{k(6k^2+3k-1)}{2}=$$
$$=9k^2+12k+4.$$

С другой стороны, $S_{k+1}^2-S_k^2=a_{k+1}^2$.

В арифметической прогрессии

$$a_{k+1}^2=(a_1+kd)^2=a_1^2+2a_1kd+k^2d^2.$$

В первом и во втором случаях $a_{k+1}^2=4+12k+9k^2$, утверждение верно. В третьем и четвертом случаях $a_{k+1}^2=4-28k+49k^2$, утверждение неверно.

Ответ:

1) $a_{15}=44,\ d=3;$

2) $a_{15}=-44,\ d=-3.$

4. Перепишем уравнение в виде $|x|+x-3=a.$

При $x\ge 0$ имеем $x+x-3=a.$ Отсюда находим $x=\dfrac{a+3}{2}$. Так как $x\ge 0$, то $a+3\ge 0$, т.е. $a\ge -3$. При $x<0$ имеем: $-x+x-3=a$, или $a=-3$. Это означает, что при $a=-3$ любой $x\in(-\infty;0)$ является решением уравнения, а при $a\ne -3$ уравнение не имеет отрицательных решений. Объединяя полученные результаты, запишем решение исходного уравнения в зависимости от параметра a:

$a<-3$ нет решений; $a=-3$ $x\in(-\infty;0]$; $a>-3$, $x=\dfrac{a+3}{2}$. Таким образом, все решения уравнения будут целыми числами, если $a>-3$ и $\dfrac{a+3}{2}=n$ – целое. Отсюда находим $a=2n-3$, $n\in Z$, $n\geq 1$.

Ответ: $a=2n-3$, $n\in Z$, $n\geq 1$.

5. *Случай 1.* Точка D расположена на прямой AB так, как это показано на рис. 1.

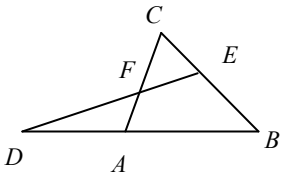


Рис. 1

По условию задачи $\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{1}{3}$. Так как $BD:AB=2$, то $AD=AB$ и, следовательно, $\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{2}{1}$. Воспользуемся теоремой Менелая: $\dfrac{AF}{FC}\cdot\dfrac{EC}{BE}\cdot\dfrac{BD}{AD}=1$.

Отсюда находим $\dfrac{BE}{EC}=\dfrac{AF}{FC}\cdot\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{1}=\dfrac{2}{3}$.

Случай 2. Расположение точки D указано на рис. 2.

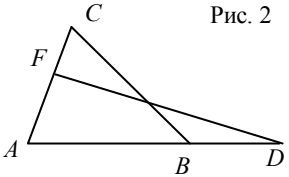


Рис. 2

По теореме Менелая имеем:

$$\frac{BE}{CE}\cdot\frac{FC}{AF}\cdot\frac{AD}{BD}=1.$$

Из условия $BD:AB=2$ находим $AD=3AB$ и, следовательно, $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{3}{2}$.

Тогда $\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{AF}{FC}\cdot\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$.

Ответ: 1) $2:3$; 2) $2:9$.

Вариант № 2

1. У Пети имелось три палочки: первая длиной 8, вторая – 11 и третья – 17. Из них он составил треугольник, причем ни один из его

углов не равнялся 120°. Чтобы образовать треугольник с углом 120°, ему пришлось укоротить вторую палочку на определенную величину, первую – укоротить на величину в два раза большую, а длину третьей – уменьшить на три таких величины. Насколько укоротил Петя вторую палочку?

Ответ: 1.

2. При каких целых значениях a и b многочлен $4x^4 + 4x^3 + ax^2 - 10x + b$ является квадратом квадратного трехчлена? Найти этот квадратный трехчлен.

Ответ:

1) $a = -19,\ b = 25$;

2) $2x^2 + x - 5,\ -2x^2 - x + 5.$

3. Сумма квадратов n первых членов арифметической прогрессии a_m равна $\dfrac{n(4n^2 - 12n + 11)}{3}$ для любого натурального n. Найти a_{12} и разность прогрессии.

Ответ:

1) $a_{12} = 21,\ d = 2;$

2) $a_{12} = -21,\ d = -2.$

4. При каких значениях a уравнение $\sqrt{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^3} = a$ не имеет ни одного целого решения?

Ответ: $a \neq 2n,\ n \in Z,\ n > 3$ и $a \in (-\infty; 6)$.

5. На продолжении стороны AB треугольника ABC выбрана точка D так, что $BD : AB = 2$. Точка F расположена на стороне AC и делит эту сторону в отношении $AF : AB = 2 : 5$. Прямая FD пересекает сторону BC в точке E. Найти отношение длин отрезков $BE : EC$.

Ответ:

1) $4 : 15;$

2) $4 : 5.$

Вариант № 3

1. У Пети имелось три палочки: первая длиной 10, вторая – 14 и третья – 19. Из них он составил треугольник, причем ни один из его

углов не равнялся 120°. Чтобы образовать треугольник с углом 120°, ему пришлось укоротить первую палочку на определенную длину, а вторую и третью – на величину в два раза большую. Насколько укоротил Петя первую палочку?

Ответ: 3.

2. При каких целых значениях a и b многочлен $25x^4 + ax^3 - 11x^2 - 12x + b$ является квадратом квадратного трехчлена? Найти этот квадратный трехчлен.

Ответ:

1) $a = 30,\ b = 4$;

2) $5x^2 + 3x - 2,\ -5x^2 - 3x + 2$.

3. Сумма квадратов n первых членов арифметической прогрессии a_m равна $\dfrac{n(16n^2 + 12n - 1)}{3}$ для любого натурального n. Найти a_9 и разность прогрессии.

Ответ:

1) $a_9 = -35,\ d = -4$;

2) $a_9 = 35,\ d = 4$;

3) $a_9 = 77,\ d = 10$;

4) $a_9 = -77,\ d = -10$.

4. При каких значениях a уравнение $\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt[3]{(x+2)^3} = a$ имеет хотя бы одно целое решение?

Ответ: $a = 2n - 1,\ n \in Z,\ n \geq 3$.

5. На продолжении стороны AB треугольника ABC выбрана точка D так, что $BD : AB = 2$. Точка F расположена на стороне AC и делит эту сторону в отношении $AF : FC = 3 : 4$. Прямая FD пересекает сторону BC в точке E. Найти отношение длин отрезков $BE : EC$.

Ответ:

1) $1 : 2$;

2) $3 : 2$.

Вариант № 4

1. У Пети имелось три палочки: первая длиной 15, вторая – 13 и третья – 15. Из них он составил треугольник, причем ни один из его углов не равнялся 120°. Чтобы образовать треугольник с углом 120°, ему пришлось укоротить вторую и третью палочки на одинаковую величину, а первую – укротить на величину в полтора раза большую. Насколько укоротил Петя вторую палочку?

Ответ: 8.

2. При каких целых значениях a и b многочлен

$$36x^4 + 24x^3 - 32x^2 + ax + b$$

является квадратом квадратного трехчлена? Найти этот квадратный трехчлен.

Ответ:

1) $a = -12,\ b = 9$;

2) $6x^2 + 2x - 3$.

3. Сумма квадратов n первых членов арифметической прогрессии a_m равна $\dfrac{n(4n^2 - 36n + 107)}{3}$ для любого натурального n. Найти a_{17} и разность прогрессии.

Ответ:

1) $a_{17} = -27,\ d = -2$;

2) $a_{17} = 27,\ d = 2$.

4. При каких значениях a уравнение $\sqrt{(x-5)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^3} = a$ имеет бесконечное число целых решений?

Ответ: $a = -3$.

5. На продолжении стороны AB треугольника ABC выбрана точка D так, что $BD : AB = 2$. Точка F расположена на стороне AC и делит эту сторону в отношении $AF : FC = 3 : 7$. Прямая FD пересекает сторону BC в точке E. Найти отношение длин отрезков $BE : EC$.

Ответ:

1) $2 : 7$;

2) $6 : 7$.

4.2.4. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 10 класс

Вариант № 1

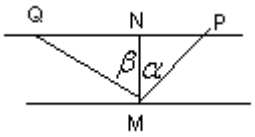
1. Числа a, b и c таковы, что они сами, а также числа $a-2$, $b-6$, $c-12$ являются последовательными членами двух геометрических прогрессий, а числа $a-10$, $b+5$ и $c-7$ могут составить три последовательных члена арифметической прогрессии. Найти числа a, b и c.

2. Найти минимальное значение выражения $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 y$, если $\sin^2 x+\sin^2 y=1$. При каких значениях $(x;\,y)$ оно достигается?

3. A – трехзначное, целое, положительное число, B – число, полученное из числа A путем зачеркивания его последней цифры, C – число, полученное из числа A зачеркиванием первой цифры. Известно, сумма цифр числа A равна 15, а $|B-C|=11$. Найти число A.

4. Найти формулу для вычисления суммы n членов последовательности $1,8+2,89+3,899+4,8999+\ldots$

5. Отрезок MN перпендикулярен границам бумажной полосы (см. рисунок). Прямые MP и MQ образуют с ним углы 60° и 45° соответственно. Полосу перегнули по отрезку MN так, что две ее половинки составили двугранный угол в 60°. Найти угол между отрезками MP и MQ в пространстве после перегиба.



Ответы и решения

1. Используя свойства последовательных членов геометрической и арифметической прогрессий, получаем систему уравнений для вычисления чисел a, b и c:

$$\begin{cases} b^2=ac, \\ (a-2)(c-12)=(b-6)^2, \\ a+c-17=2b+10, \end{cases} \quad \begin{cases} b^2=ac, \\ 6a+c=6b-6, \\ a+c=2b+27. \end{cases}$$

Выражаем числа a и c через b Получаем $a=\frac{1}{5}(4b-33)$, $c=\frac{1}{5}(6b+168)$. Подставляем эти значения в первое уравнение и получаем квадратное уравнение для вычисления числа b: $b^2-474b+5544=0,\ b_1=12, b_2=462$. Отсюда:

$$a_1=3, b_1=12, c_1=48;\ \ a_2=363, b_2=462, c_3=588.$$

Ответ: $3,12,48;\ 363,462,588$.

2. Запишем исходное выражение в виде:

$$\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 y=-2+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\sin^2 y}=-2+\frac{1}{\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)}.$$

Наибольшее значение $\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)$, а следовательно, минимальное значение $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 y$, достигается при $\sin^2 x=\frac{1}{2}$ и равно $\frac{1}{4}$. Получаем, что минимальное значение $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 y$ равно 2 и оно достигается при

$$\begin{cases}\sin^2 x=\frac{1}{2}, x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\\ \sin^2 y=\frac{1}{2}, x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m, m,k\in Z.\end{cases}$$

Ответ:

1) 2;

2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m, k,m\in Z.$

3. Пусть x,y,z – цифры числа A Тогда: $A=100x+10y+z$, $B=10x+y,\ C=10y+z.$ Рассмотрим два случая.

Случай 1. Если $B\ge C,$ то получаем систему

$$\begin{cases}x+y+z=15,\\ 10x-9y-z=11,\end{cases}\quad 11x-8y=26,\quad x=2+y-\frac{3y-4}{11}.$$

Так как x, y – цифры, то $\dfrac{3y-4}{11}$ будет целым числом, лишь при $y=5$. В этом случае $x=6, y=5, z=4, A=654$.

Случай 2. Если $B<C$, то получаем систему

$$\begin{cases} x+y+z=15, \\ 10x-9y-z=-11, \end{cases} \quad 11x-8y=4, \quad x=\frac{4(2y+1)}{11}.$$

Число $2y+1$ должно нацело делиться на 11, а так как y – цифра, то это возможно только при $y=5$. Тогда $x=6$, $z=4$. Следовательно, $A=456$.

Ответ: 456 и 654.

4. Запишем сумму n первых слагаемых в виде:

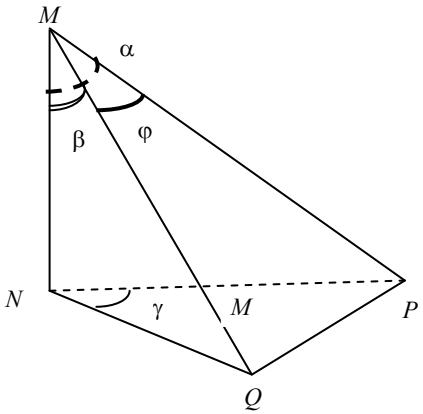
$$S_n = 1{,}9-0{,}1+2{,}9-0{,}01+3{,}9-0{,}001+\ldots+n+0{,}9-$$

$$-(10)^{-n} = 1+2+\ldots+n+0{,}9\cdot n-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{10^n}\right)=$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)}{2}+0{,}9\cdot n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right).$$

Ответ: $S_n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}+0{,}9\cdot n-\dfrac{1}{9}\left(1-\dfrac{1}{10^n}\right)$.

5. Рассмотрим образовавшийся после перегиба тетраэдр $MPNQ$ (см. рисунок). Имеем: $\angle NMP=\alpha=60°$, $\angle NMQ=\beta=45°$, $\angle PNQ=\gamma=60°$ (по условию). Требуется определить $\angle PMQ=\varphi$.



Пусть $MN = d$. Тогда

$$PN = d \cdot \operatorname{tg}\alpha, \quad QN = d \cdot \operatorname{tg}\beta, \quad PM = \frac{d}{\cos\alpha}, \quad QM = \frac{d}{\cos\beta}.$$

По теореме косинусов подсчитаем PQ^2 из ΔPMQ и ΔPNQ. Получим следующее равенство:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} - \frac{2}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \cdot \cos\varphi = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta -$$

$$- \frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \cdot \cos\gamma, \quad \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \cos\varphi.$$

Подставляя $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$, получим

$$\cos\varphi = \frac{1}{8}\left(2\sqrt{2} + \sqrt{6}\right).$$

Следовательно, искомый угол $\varphi = \arccos\frac{1}{8}\left(2\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$.

Ответ: $\varphi = \arccos\frac{1}{8}\left(2\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$.

Вариант № 2

1. Числа a, b и c таковы, что они сами, а также числа $a+3, b+5, c+7$ являются последовательными членами двух геометрических прогрессий, а числа $a+3, b+4$ и $c+1$ могут составить три последовательных члена арифметической прогрессии. Найти числа a, b, c.

Ответ: 1, 3, 9.

2. Найти максимальное значение выражения $\sin^2 x + \sin^2 y$, если $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 3$. При каких значениях $(x; y)$ оно достигается?

Ответ:

1) $a_{\max} = 1,2$;

2) $x = \pm\arccos\sqrt{0,4} + \pi k, \quad y = \pm\arccos\sqrt{0,4} + \pi m, k, m \in Z$.

3. A – трехзначное, целое, положительное число, B – число, полученное из числа A путем зачеркивания его последней цифры, C – число, полученное из числа A зачеркиванием первой цифры. Из-

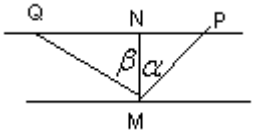
вестно, что сумма цифр числа A равна 18, а $|B-C|=35$. Найти число A.

Ответ: 738.

4. Найти формулу для вычисления суммы n членов последовательности $1,6+2,69+3,699+4,6999+\ldots$

Ответ: $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}+0,7n-\dfrac{1}{9}\left(1-\dfrac{1}{10^n}\right)$.

5. Отрезок MN перпендикулярен границам бумажной полосы (см. рисунок). Прямые MP и MQ образуют с ним углы 60° и 45° соответственно. Полосу перегнули по отрезку MN так, что две ее половинки составили двугранный угол в 60°. Найти угол между отрезками MP и MQ в пространстве после перегиба.



Ответ: $\varphi=\arccos\dfrac{1}{8}\left(\sqrt{6}+2\sqrt{3}\right)$.

Вариант № 3

1. Числа a, b и c таковы, что они сами, а также числа $a-1, b-2, c-2$ являются последовательными членами двух геометрических прогрессий, а числа $a-3, b+3$ и $c+1$ могут составить три последовательных члена арифметической прогрессии. Найти числа a, b, c.

Ответ: $2,6,18$; $50,30,18$.

2. Найти минимальное значение выражения $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^2 y$, если $\cos^2 x+\cos^2 y=\dfrac{3}{2}$. При каких значениях $(x;\,y)$ оно достигается?

Ответ:

1) $\dfrac{2}{3}$,

2) $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ \ y=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi m, k, m\in Z$.

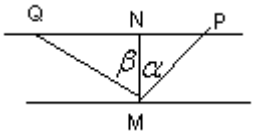
3. A – трехзначное, целое, положительное число, B – число, полученное из числа A путем зачеркивания его последней цифры, C – число, полученное из числа A зачеркиванием первой цифры. Известно, что сумма цифр числа A равна 16, а $|B-C|=12$. Найти число A.

Ответ: 457.

4. Найти формулу для вычисления суммы n членов последовательности $1,5+2,59+3,599+4,5999+\ldots$

Ответ: $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}+0,6n-\dfrac{1}{9}\left(1-\dfrac{1}{10^n}\right)$.

5. Отрезок MN перпендикулярен границам бумажной полосы (см. рисунок). Прямые MP и MQ образуют с ним углы 45° и 45° соответственно. Полосу перегнули по отрезку MN так, что две ее половинки составили двугранный угол в 30°. Найти угол между отрезками MP и MQ в пространстве после перегиба.



Ответ: $\varphi=\arccos\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}+2\right)$.

Вариант № 4

1. Числа a, b и c таковы, что они сами, а также числа $a-1, b+1, c+1$ являются последовательными членами двух геометрических прогрессий, а числа $a+5, b-4$ и $c+3$ могут составить три последовательных члена арифметической прогрессии. Найти числа a, b, c.

Ответ: $-1,3,-9$; $-49,-21,-9$.

2. Найти максимальное значение выражения $\cos^2 x+\cos^2 y$, если $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 y=\dfrac{2}{3}$. При каких значениях $(x;y)$ оно достигается?

Ответ:

1) 0,5;

2) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ y=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi m, k,m\in Z$.

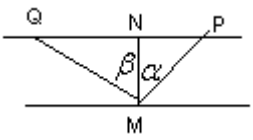
3. A – трехзначное, целое, положительное число, B – число, полученное из числа A путем зачеркивания его последней цифры, C – число, полученное из числа A зачеркиванием первой цифры. Известно, что сумма цифр числа A равна 20, а $|B-C|=21$. Найти число A.

Ответ: 578.

4. Найти формулу для вычисления суммы n членов последовательности $1,4+2,49+3,499+4,4999+\ldots$

Ответ: $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}+0,5n-\dfrac{1}{9}\left(1-\dfrac{1}{10^n}\right)$.

5. Отрезок MN перпендикулярен границам бумажной полосы (см. рисунок). Прямые MP и MQ образуют с ним углы 30° и 30° соответственно. Полосу перегнули по отрезку MN так, что две ее половинки составили двугранный угол в 90°. Найти угол между отрезками MP и MQ в пространстве после перегиба.



Ответ: $\varphi=\arccos\dfrac{3}{4}$.

4.2.5. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 1

Вариант № 1

1. Найти такие числа x, что $\lg|\sin(x+|x|)|$, $\lg|\sin 3(x+|x|)|$ и $\lg|\sin 5(x+|x|)|$ являются последовательными членами арифметической прогрессии с ненулевой разностью.

2. Найти наибольшее число $l>0$, для которого существует интервал длины l числовой оси, не содержащий решений уравнения:

$$32\sin^6 x-48\sin^4 x+22\sin^2 x-3=0\ .$$

3. Написать уравнение окружности с центром в начале координат, на которой лежат все точки с координатами $(x;y)$ – решениями системы

$$\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\dfrac{35}{13}, \\ x+y=5. \end{cases}$$

4. Папа, мама и Петя 2 ч сидели за праздничным столом и вели беседу. Мама из каждой пятиминутки говорила первую, вторую и третью минуты, папа на каждом семиминутном интервале говорил четвертую и пятую минуты, а Петя на каждом временном интервале в девять минут говорил третью и четвертую минуты. Сколько минут за столом папа и мама говорили одновременно, а Петя молчал?

5. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x-y=a, \\ \sin(x+2y)=\sin x \end{cases}$$

имеет единственное решение в квадрате

$$\begin{cases} -\pi \le x \le 0, \\ -\pi \le y \le 0? \end{cases}$$

6. Математический бильярд имеет форму параллелограмма $ABCD$. На сторонах AD и CD соответственно расположены точки E и F так, что $AE:ED=1:2$, а $DF:FC=1:3$. Шар находится в точке M пересечения прямых BF и CE. Известно, что шар, направленный в точку N борта BC, отразившись от четырех различных бортов, вернулся в точку M и, продолжив свое движение, повторил свою предыдущую траекторию. Найти величину отношения $BN:NC$.

Ответы и решения

1. Если $x \le 0$, то $x+|x|=0$, а $\lg|\sin 0|$ не определён, значит, по ОДЗ $x>0$, тогда $x+|x|=2x$. Характеристическое свойство арифметической прогрессии $a_1=\lg|\sin 2x|$, $a_2=\lg|\sin 6x|$, $a_3=\lg|\sin 10x|$:

$$2a_2=a_1+a_3, \quad 2\lg|\sin 6x| = \lg|\sin 2x| + \lg|\sin 10x|,$$

откуда

$$\sin^2 6x = |\sin 2x \cdot \sin 10x|. \qquad (*)$$

1. При $\sin 2x \cdot \sin 10x > 0$ имеем из равенства (*):

$$\frac{1-\cos 12x}{2} = \frac{\cos 8x - \cos 12x}{2}, \quad \cos 8x = 1, \quad x = \frac{\pi n}{4},\ n \in N.$$

Числа $x = \frac{\pi n}{2}, n \in N$ не подходят по ОДЗ $(\sin 2x = 0)$, а числа $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in N$ не подходят, так как тогда

$$|\sin 2x| = |\sin 6x| = |\sin 10x| = 1 \quad \text{и} \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0,$$

а разность арифметической прогрессии по условию должна быть ненулевой.

2. При $\sin 2x \cdot \sin 10x < 0$ имеем из (*):

$$\frac{1-\cos 12x}{2} = -\frac{\cos 8x - \cos 12x}{2}, \quad \frac{1+\cos 8x}{2} = \cos 12x,$$

$$\cos^2 4x = \cos(3 \cdot 4x), \quad \cos^2 4x = 4\cos^3 4x - 3\cos 4x,$$

$$4\cos^3 4x - \cos^2 4x - 3\cos 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos 4x = 0, & (1) \\ \cos 4x = 1, & (2) \\ \cos 4x = -\frac{3}{4}. & (3) \end{array}\right.$$

(1): $\cos 4x = 0, \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in N$ – не подходят, так как тогда $|\sin 2x| = |\sin 6x|$ и $a_1 = a_2$;

(2): $\cos 4x = 1, \quad x = \frac{\pi n}{2}, n \in N$ – не подходят по ОДЗ;

(3): $\cos 4x = -\frac{3}{4}, \quad x = \pm\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{\pi n}{2}, n \in N.$

Мы исходили из уравнения $\sin^2 6x = -\sin 2x \cdot \sin 10x$. Для найденных решений уравнения $\cos 4x = -\frac{3}{4}$ также справедливо это равенство, причём $\sin 6x \neq 0, \ \sin^2 6x > 0,$ а так как

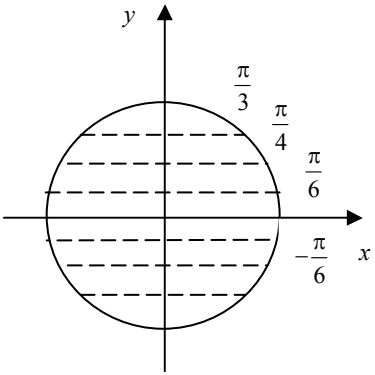
$$\sin^2 6x = -\sin 2x \cdot \sin 10x,$$

то и $-\sin 2x \cdot \sin 10x > 0$. С учётом ОДЗ $x > 0$ получаем ответ.

Ответ:

$$x=\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{\pi n}{2},\ n\in N\cup\{0\},$$

$$x=-\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{\pi n}{2},\ n\in N.$$



2. Сделав замену

$$\sin^2 x=t\in[0;1],$$

решим соответствующее уравнение

$$32t^3-48t^2+22t-3=0.$$

Получим:

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{4}, \\ t=\frac{1}{2}, \\ t=\frac{3}{4}. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sin x=\pm\frac{1}{2}, \\ \sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos 4x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

В силу симметрии расположения решений наибольший интервал, не содержащий решений заданного уравнения, есть $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$, его длина $\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

3. Заданная система – симметрическая относительно x и y. Введем новые переменные: $x+y=u,\ x\cdot y=\upsilon$. Поскольку

$$(x+y)^2=x^2+2x\cdot y+y^2,$$

то

$$x^2+y^2=u^2-2\upsilon,$$

а

$$x^3+y^3=(x+y)\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)=\ u\cdot\left(u^2-3\upsilon\right)=u^3-3u\upsilon.$$

В результате система уравнений преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{u^3 - 3u\upsilon}{u^2 - 2\upsilon} = \dfrac{35}{13}, \\ u = 5, \end{cases}$$

откуда $\upsilon = 6$. Находим $x^2 + y^2 = u^2 - 2\upsilon = 13$.

Ответ: $x^2 + y^2 = 13$.

4. Схематично отметим крестиками минуты разговора мамы (М), папы (П) и ребёнка (Р):

М	×	×	×						
П				×	×				
Р			×	×					

Найдём номера минут, когда мама и папа говорили одновременно.

Пусть мама говорила из каждой пятиминутки первую минуту $(5n+1)$ раз, а папа из каждой 7-минутки – 4-ю минуту $(7k+4)$ раза. По условию $5n+1 = 7k+4$, т.е. $5n - 7k = 3$. Это диофантово уравнение имеет решения: $\begin{cases} n = 2 + 7t, \\ k = 1 + 5t, \end{cases}$ $t \in Z$, причём совпадения будут при $5n+1 = 7k+4 = 35t+11 \in [\,0;120\,] \Rightarrow t \in \{0;1;2;3\}$, т.е. это минуты с номерами 11, 46, 81 и 116.

Пусть теперь мама говорила из каждой пятиминутки первую минуту $(5n+1)$, а папа из каждой 7-минутки – 5-ю минуту $(7k+5)$: $5n+1 = 7k+5$, $5n - 7k = 4$, тогда

$$\begin{cases} n = 5 + 7t, \\ k = 3 + 5t, \end{cases} \quad t \in Z,$$

$$5n+1 = 7k+5 = 35t + 26, \quad t \in \{1;2;3\},$$

это минуты с номерами 26, 61, и 96.

Аналогично:

$$5n + 2 = 7k + 4, \quad 5n - 7k = 2,$$

тогда

$$\begin{cases} n=-1+7t, \\ k=-1+5t, \end{cases} t\in Z, \quad 5n+2=7k+4=35t-3, \quad t\in\{1;2;3\},$$

это минуты с номерами 32, 67, 102.

$$5n+2=7k+5, \quad 5n-7k=3,$$

тогда

$$\begin{cases} n=2+7t, \\ k=1+5t, \end{cases} t\in Z, \quad 5n+2=7k+5=35t+12, \quad t\in\{0;1;2;3\},$$

это минуты с номерами 12, 47, 82, 117.

$$5n+3=7k+4, \quad 5n-7k=1,$$

тогда

$$\begin{cases} n=3+7t, \\ k=2+5t, \end{cases} t\in Z, \quad 5n+3=7k+4=35t+18, \quad t\in\{0;1;2\},$$

это минуты с номерами 18, 53, 88.

$$5n+3=7k+5, \quad 5n-7k=2,$$

тогда

$$\begin{cases} n=-1+7t, \\ k=-1+5t, \end{cases} t\in Z, \quad 5n+3=7k+5=35t-2, \quad t\in\{1;2;3\},$$

это минуты с номерами 33, 68, 103.

Итак, на протяжении 20 найденных (подчёркнутых) минут мама и папа говорили одновременно.

Петя говорил на минутах с номерами $(9n+3)$ и $(9n+4)$, которые не должны совпадать с найденными выше 20 мин (если будут совпадения, то такие минуты исключаем). Числа $(9n+3)$ кратны 3 и поэтому не могут совпадать с числами, не кратными 3. Из чисел, кратных 3, только два окажутся «плохими»: 12 и 102: $9n+3=12$, $n=3$; $9n+3=102$, $n=11$.

Остается 18 мин. Выпишем числа вида $(9n+4)$: 4, 13, 22, 31, 40, 49, 58, 67, 76, 85, 94, 103, 112. Из них выделим два числа (67 и 103), которые находятся среди рассматриваемых 18 чисел – их надо исключить. Таким образом, остаётся 16 мин, когда мама и папа говорили, а Петя молчал.

Ответ: 16 мин.

5. Решим тригонометрическое уравнение системы

$$\begin{cases} x - y = a, \\ \sin(x + 2y) = \sin x: \end{cases} \quad \sin(x + 2y) = \sin x \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x + 2y = x + 2\pi n, & n \in Z; \\ x + 2y = \pi - x + 2\pi n, & n \in Z; \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y = 2\pi n, & n \in Z; \\ y = \dfrac{\pi}{2} - x + \pi n, & n \in Z. \end{bmatrix}$$

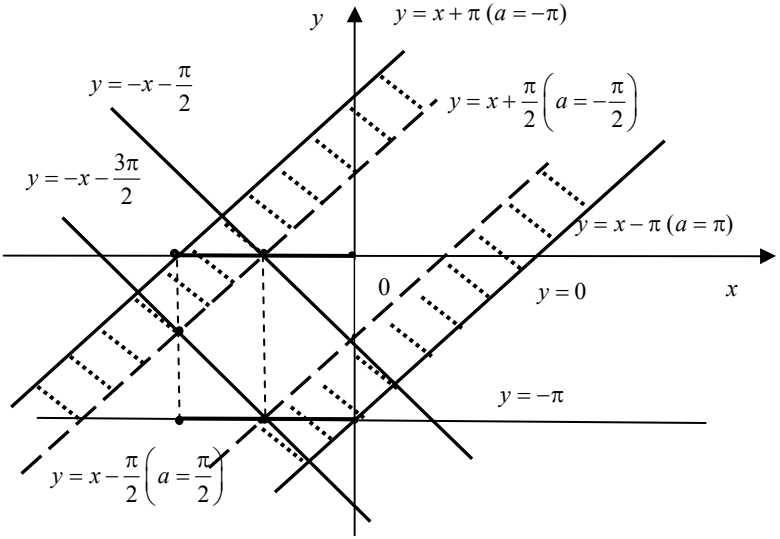


Рис. 1

Изобразим на плоскости *Oxy* эти решения и выделим те их части, которые попадают в требуемый квадрат:

$$\begin{cases} -\pi \le x \le 0; \\ -\pi \le y \le 0. \end{cases}$$

Прямая вида $y = x - a$ имеет ровно одну общую точку с множеством решений тригонометрического уравнения при прохождении через заштрихованные области (рис. 1). Отсюда получаем ответ.

Ответ: $a \in \left[-\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

6. Сначала докажем, что $ABCD$ – прямоугольник (рис. 1). Пусть $\angle A = \angle C = \alpha$, $\angle RNC = \varphi$, тогда $\angle B = \angle D = \pi - \alpha$, $\angle BNP = \varphi$.

В ΔPBN:

$$\angle BPN = \pi - (\varphi + \pi + \alpha) = \alpha - \varphi, \quad \angle APQ = \angle BPN = \alpha - \varphi.$$

В ΔAPQ:

$$\angle AQP = \pi - (\alpha + \alpha - \varphi) = \pi - 2\alpha + \varphi, \quad \angle AQP = \angle RQD = \pi - 2\alpha + \varphi.$$

В ΔRDQ:

$$\angle QRD = \pi - (\pi - 2\alpha + \varphi) - (\pi - \alpha) = 3\alpha - \pi - \varphi,$$

$$\angle QRD = \angle NRC = 3\alpha - \pi - \varphi.$$

В ΔNRC:

$$(3\alpha - \pi - \varphi) + \varphi + \alpha = \pi, \quad 4\alpha = 2\pi, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

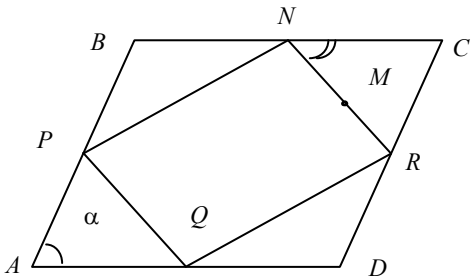


Рис. 1

Не ограничивая общности, пусть прямоугольник $ABCD$ лежит в первой четверти плоскости Oxy (рис. 2), стороны $AB = 4a$ и $AD = 3b$ лежат на координатных осях, точка A совпадает с началом координат, тогда $C(3b; 4a)$, $E(b; 0)$, $B(0; 4a)$, $F(3b; a)$. Легко найти уравнения прямых CE и BF. Имеем CE: $y = \frac{2a}{b}x - 2a$, BF: $y = -\frac{a}{b}x + 4a$. Их точка пересечения M имеет координаты $M(2b; 2a)$.

Запишем уравнение прямой NR (угловой коэффициент $(-\operatorname{tg}\varphi)$, содержит точку $M(2b;2a)$):

$$y = 2a - \operatorname{tg}\varphi(x-2b).$$

Абсциссу точки N находим из условия $y = 4a$:

$$4a = 2a - \operatorname{tg}\varphi(x-2b),$$
$$x = 2b - 2a\operatorname{ctg}\varphi.$$

Тогда $BN = 2b - 2a\operatorname{ctg}\varphi$. Ординату точки R находим из условия $x = 3b$:

$$y = 2a - b\operatorname{tg}\varphi,$$

т.е. $R(3b;\ 2a - b\operatorname{tg}\varphi)$.

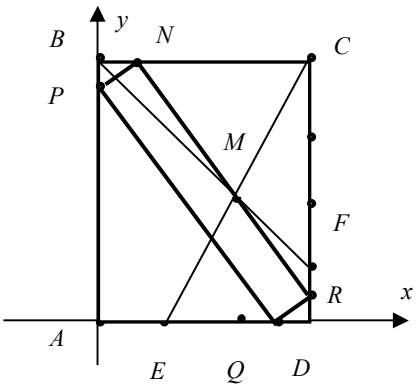


Рис. 2

Запишем уравнение прямой RQ (угловой коэффициент $\operatorname{tg}\varphi$, содержит точку $R(3b;\ 2a - b\operatorname{tg}\varphi)$):

$$y = 2a + \operatorname{tg}\varphi(x-4b).$$

Абсциссу точки Q находим из условия $y = 0$:

$$0 = 2a + \operatorname{tg}\varphi(x-4b), \quad x = 4b - 2a\operatorname{ctg}\varphi.$$

Тогда $QD = 2a\operatorname{ctg}\varphi - b.$

Поскольку $\Delta PBN = \Delta RDQ$, то $BN = QD$. Получаем уравнение: $2b - 2a\operatorname{ctg}\varphi = 2a\operatorname{ctg}\varphi - b$. Из этого уравнения находим $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{3b}{4a}$.

Тогда $BN = 2b - \dfrac{3b}{2} = \dfrac{b}{2}$, а $NC = BC - BN = 3b - \dfrac{b}{2} = \dfrac{5b}{2}$. Следовательно, $BN : CN = 1:5$.

Ответ: $BN : CN = 1:5$.

Вариант № 2

1. Найти такие числа x, что $\lg\left|\cos(x+|x|)\right|$, $\lg\left|\cos 2(x+|x|)\right|$ и $\lg\left|\cos 3(x+|x|)\right|$ являются последовательными членами арифметической прогрессии с ненулевой разностью.

Ответ:

$$x = \pm\frac{1}{4}\arccos\left(\frac{\sqrt{17}-1}{8}\right)+\frac{\pi n}{2},\quad n\in N,$$

$$x = \pm\frac{1}{4}\arccos\left(\frac{-\sqrt{17}-1}{8}\right)+\frac{\pi n}{2},\quad n\in N,$$

$$x = \frac{1}{4}\arccos\left(\frac{-\sqrt{17}-1}{8}\right),\quad x = \frac{1}{4}\arccos\left(\frac{\sqrt{17}-1}{8}\right).$$

2. Найти наименьшее число $l > 0,$, для которого любой отрезок длины l числовой оси содержит хотя бы одно решение уравнения $8\cos^6 x - 2\cos^4 x - 15\cos^2 x + 9 = 0.$

Ответ: $l = \frac{2\pi}{3}.$

3. Написать уравнение окружности с центром в начале координат, на которой лежат все точки с координатами $(x; y)$ – решениями системы

$$\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^3+y^3}=\dfrac{34}{9};\\ x+y=6.\end{cases}$$

Ответ: $x^2 + y^2 = 20.$

4. Папа, мама и Маша 2 ч сидели за праздничным столом и вели беседу. Мама на каждом шестиминутном интервале говорила третью, четвертую и пятую минуты, папа на каждом семиминутном интервале говорил первую и вторую минуты, а Маша на каждом временном интервале в четыре минуты говорила только четвертую минуту. Сколько минут за столом папа молчал, а мама и Маша говорили одновременно?

Ответ: 7 мин.

5. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases}x+y=a;\\ \cos(x+2y)=\cos 2y\end{cases}$$

имеет единственное решение в квадрате

$$\begin{cases} 0 \le x \le \pi; \\ -\pi \le y \le 0? \end{cases}$$

Ответ: $a \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \{0\} \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

6. Математический бильярд имеет форму параллелограмма *ABCD*. На сторонах *AD* и *CD*, соответственно, расположены точки *E* и *F* так, что $AE : ED = 2 : 3$, а $DF : FC = 1 : 5$. Шар находится в точке *M* пересечения прямых *BF* и *CE*. Известно, что шар, направленный в точку *N* борта *BC*, отразившись от четырех различных бортов, вернулся в точку *M* и, продолжив свое движение, повторил свою предыдущую траекторию? Найти величину отношения $BN : NC$.

Ответ: $BN : CN = 1 : 8$.

Вариант № 3

1. Найти такие числа *x*, что $\lg\left|\sin(x - |x|)\right|$, $\lg\left|\sin 2(x - |x|)\right|$ и $\lg\left|\sin 3(x - |x|)\right|$ являются последовательными членами арифметической прогрессии с ненулевой разностью.

Ответ:

$$x = \frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z, \ n \le -1,$$

$$x = -\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z, \ n \le 0.$$

2. Найти наибольшее число $l > 0$, для которого существует интервал длины *l* числовой оси, содержащий ровно одно решение уравнения $81\operatorname{tg}^6 x - 24\operatorname{tg}^4 x - 85\operatorname{tg}^2 x + 28 = 0$.

Ответ: $l = \frac{7\pi}{12}$.

3. Написать уравнение окружности с центром в начале координат, на которой лежат все точки с координатами $(x; y)$ – решениями системы

$$\begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\dfrac{41}{5}; \\ x+y=4. \end{cases}$$

Ответ: $x^2+y^2=10$.

4. Папа, мама и Юля 2 ч сидели за праздничным столом и вели беседу. Мама на каждом восьмиминутном интервале говорила третью, четвертую и пятую минуты, папа на каждом шестиминутном интервале говорил первую и вторую минуты, а Юля на каждом семиминутном временном интервале говорила шестую и седьмую минуты. Сколько минут за столом папа говорил, а все остальные молчали?

Ответ: 16 мин.

5. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x+2y=a; \\ \operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(2x+y) \end{cases}$$

имеет единственное решение в квадрате

$$\begin{cases} 0\le x\le \pi; \\ 0\le y\le \pi? \end{cases}$$

Ответ: $a\in[\pi;2\pi]\cup\{0;3\pi\}$, $a\ne\dfrac{3\pi}{2}$.

6. Математический бильярд имеет форму параллелограмма $ABCD$. На сторонах AD и CD, соответственно, расположены точки E и F так, что $AE:ED=2:1$, а $DF:FC=2:3$. Шар находится в точке M пересечения прямых BF и CE.

Известно, что шар, направленный в точку N борта BC, отразившись от четырех различных бортов, вернулся в точку M и, продолжив свое движение, повторил свою предыдущую траекторию. Найти величину отношения $BN:NC$.

Ответ: $BN:CN=1:2$.

Вариант № 4

1. Найти такие числа x, что $\lg\left|\cos(x-|x|)\right|$, $\lg\left|\cos 3(x-|x|)\right|$ и $\lg\left|\cos 5(x-|x|)\right|$ являются последовательными членами арифметической прогрессии с ненулевой разностью.

Ответ:

$$x=\frac{1}{4}\arccos\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z,\ n\le -1,$$

$$x=-\frac{1}{4}\arccos\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z,\quad n\le 0.$$

2. Найти наименьшее число $l>0,$, для которого любой отрезок длины l числовой оси содержит не менее двух решений уравнения $9\operatorname{ctg}^6 x+3\operatorname{ctg}^4 x-17\operatorname{ctg}^2 x+5=0.$

Ответ: $l=\frac{7\pi}{12}.$

3. Написать уравнение окружности с центром в начале координат, на которой лежат все точки с координатами $(x; y)$ – решениями системы

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{x^3-y^3}=\dfrac{5}{9};\\ x-y=3.\end{cases}$$

Ответ: $x^2+y^2=5.$

4. Папа, мама и Коля 2 ч сидели за праздничным столом и вели беседу. Мама из каждой десятиминутки говорила с четвертой по восьмую минуты, папа на каждом восьмиминутном интервале говорил вторую и третью минуты, а Коля на каждом временном интервале в шесть минут говорил третью, четвертую и пятую минуты. Сколько минут за столом Коля говорил, а мама и папа молчали?

Ответ: 24 мин.

5. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases}x-y=a;\\ \operatorname{ctg}(x+y)=\operatorname{ctg}(3x+2y)\end{cases}$$

имеет единственное решение в квадрате

$$\begin{cases} -\pi \le x \le 0; \\ 0 \le y \le \pi? \end{cases}$$

Ответ: $a \in \left(-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

6. Математический бильярд имеет форму параллелограмма *ABCD*. На сторонах *AD* и *CD*, соответственно, расположены точки *E* и *F* так, что $AE:ED = 1:4$, а $DF:FC = 3:5$. Шар находится в точке *M* пересечения прямых *BF* и *CE*.

Известно, что шар, направленный в точку *N* борта *BC*, отразившись от четырех различных бортов, вернулся в точку *M* и, продолжив свое движение, повторил свою предыдущую траекторию. Найти величину отношения $BN:NC$.

Ответ: $BN:CN = 1:3$.

4.2.6. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 2

Вариант № 1

1. При каких *x* и *a* числа $b_1 = 3|x|, b_2 = \sqrt{5x+2}, b_3 = \sqrt{x+2}$ являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а их логарифмы с основанием *a* – последовательными членами арифметической прогрессии с разностью $d = -0{,}5$?

2. Точка *A* расположена на плоскости и имеет координаты (2; 3). Точка *B* лежит на оси *OX* и ее абсцисса *x* удовлетворяет уравнению: $4\cos^3 x \cdot \sin 3x - 6\cos^2 4x + 4\sin^3 x \cdot \cos 3x + 3 = 0$. Найти абсциссу точки *B*, минимально удаленной от точки *A*.

3. Пол в комнате имеет форму прямоугольника *ABCD* со сторонами 3 и 4 м. По комнате бегают две мыши. Первая мышь бегает по периметру комнаты со скоростью 0,2 м/с, вторая – по диагонали *AC* со скоростью 0,5 м/с. В начале движения первая мышь находилась в точке *A*, вторая – в точке *C*. Через какое время они встретятся и где? Сколько раз они встретятся в течении часа после начала движения?

4. Положительное, целое число x при делении на 7 имеет остаток 2, а его квадрат x^2 при делении на 49 имеет в остатке 39. Сколько таких чисел находится на отрезке $[100;1000]$?

5. При каких значениях φ система уравнений

$$\begin{cases} (x-3)^2+\left(y-3\sqrt{3}\right)^2=9; \\ (x-4\cos\varphi)^2+(y-4\sin\varphi)^2=1 \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

6. Три кубика с ребрами 1, 2 и 3 лежат на плоскости. Центры квадратов оснований, лежащих на плоскости, являются вершинами правильного треугольника со стороной 4. Провести плоскость в пространстве так, что она пересекает кубы и делит их на две равновеликие части. Найти двугранный угол, образованный плоскостью сечения и плоскостью основания.

Ответы и решения

1. Найдем значение переменной x из условия $b_1 \cdot b_3 = b_2^2$. Имеем:

$$\begin{cases} 3|x|\cdot\sqrt{x+2}=5x+2, \\ 5x+2\geq 0, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} 9x^3-7x^2-20x-4=0, \\ x\geq -0,4. \end{cases}$$

Решениями кубического уравнения являются числа: $x_1=-1$ (посторонний корень), $x_2=-\frac{2}{9}, x_3=2.$

Случай 1. Пусть $x_2=-\frac{2}{9}$. Тогда: $b_1=\frac{2}{3}, b_2=\frac{2\sqrt{2}}{3}, b_3=\frac{4}{3}, q=\sqrt{2}$ (знаменатель прогрессии). По условию: $\log_a\frac{2}{3}, \log_a\frac{2\sqrt{2}}{3}, \log_a\frac{4}{3}$ – арифметическая прогрессия с разностью $d=-0,5$. Получаем уравнения: $\log_a\frac{2\sqrt{2}}{3}-\log_a\frac{2}{3}=\log_a\frac{4}{3}-\log_a\frac{2\sqrt{2}}{3}=-0,5.$ Отсюда: $\log_a\sqrt{2}=-0,5,$ т.е. $a=0,5$ (отметим, что $d=\log_a q$).

Случай 2. Аналогично рассматриваем случай $x=2$. Получаем, $q=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $d=\log_a\frac{1}{\sqrt{3}}=-0{,}5$, т.е. $a=3$.

Ответ: 1) $x=-\frac{2}{9}$, $a=0{,}5$; 2) $x=2$, $a=3$.

2. Так как точка B лежит на оси абсцисс, то ее расстояние от точки A будет наименьшим в том случае, если ее абсцисса будет отклонена на наименьшее расстояние от абсциссы точки A. Таким образом, задача сводится к нахождению решения тригонометрического уравнения, наименее удаленного от числа $x=2$.

Решаем тригонометрическое уравнение, используя равенства: $4\cos^3 x=\cos 3x+3\cos x$, $4\sin^3 x=3\sin x-\sin 3x$. Получаем

$$\sin 3x\left(\cos 3x+3\cos x\right)+\cos 3x(3\sin x-\sin 3x)-6\left(1-\sin^2 4x\right)+3=0,$$

откуда

$$6\sin^2 4x+3\sin 4x-3=0, \quad \text{т.е.} \quad 2\sin^2 4x+\sin 4x-1=0.$$

Решаем это квадратное уравнение. Имеем:

$$\sin 4x=-1\Rightarrow x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z;$$

$$\sin 4x=\frac{1}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}n,\\ x=\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{2}m,\end{array}\right. n,m\in Z.$$

Находим решение, наименее удаленное от числа 2. Рассматриваем числа:

$$x_1=\pi-\frac{\pi}{8}=\frac{7\pi}{8}; \quad x_2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{24}=\frac{13\pi}{24} \quad \text{и} \quad x_3=\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{24}=\frac{17\pi}{24}.$$

Ответ: $\frac{17\pi}{24}$.

3. Возможны два случая: встреча в точке A или встреча в точке C. Рассмотрим оба этих случая.

Случай 1. Пусть встреча произошла в точке A, тогда первая мышь должна целое число раз обежать прямоугольник по перимет-

ру, потратив на это $\frac{1,4}{0,2}\cdot m = 70m$ секунд $(m \in N)$, а вторая – пробежать нечетное число раз диагональ AC, потратив на это $\frac{5}{0,5}+\frac{10}{0,5}\cdot n = 10+20n$ секунд $(n \in N)$. В моменты их встреч должно выполняться равенство: $70\cdot m = 10+20n$, т.е. $7m = 1+2n$. Так как 7 – простое число, то $2n+1$ должно делиться на 7 нацело. Это выполнено при $n = 3+7k, m = 2k+1, \quad k = 0,1,2,\ldots$ Первая встреча произойдет через 70 с $(k = 0, m = 1)$, а повторяться они будут через 140 с. Число таких встреч равно 26.

Случай 2. Встреча в точке C приводит к равенству $\frac{7}{0,2}+\frac{1,4}{0,2}\cdot m = \frac{10}{0,5}\cdot n$, $35+70m = 20n$, т.е. $7 = 4n-14m$, $n, m \in N$. Это уравнение решений не имеет, так как число $(4n-14m)$ – четное.

Ответ: 1) первая встреча через 70 с в вершине A; 2) число встреч за час – 26.

4. Пусть $x = 7m+2$. Тогда $x^2 = 49m^2+28m+4 = 49n+39$, т.е. $7n = 7m^2+4m+5$ $(n, m \in N)$. Правая часть делится нацело на 7 в том и только том случае, если $4m-5$ делится на 7. Первое такое число равно 7 (при $m = 3$), а далее $m = 3+7k, \quad k = 0,1,2,\ldots$. Для x получаем: $x = 7\cdot(7k+3) = 49k+23, \quad 49k+23 \in [100;1000]$ при $k = 2,3,4,\ldots,19$. Всего 18 решений.

Ответ: 18.

5. Уравнение $(x-3)^2+\left(y-3\sqrt{3}\right)^2 = 9$ – уравнение окружности с центром в точке $A_1\left(3;3\sqrt{3}\right)$ и радиусом $R_1 = 3$, а второе уравнение системы – также уравнение окружности с центром в точке $A_2(4\cos\varphi;4\sin\varphi)$ и радиусом $R_2 = 1$. Расстояние между центрами окружностей

$$d = |A_1A_2| = \sqrt{\left(3-4\cos\varphi\right)^2 + \left(3\sqrt{3}-4\sin\varphi\right)^2}.$$

Для того, чтобы окружности пересекались ровно в двух точках, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2,$$

т.е. в нашем случае

$$2 < \sqrt{\left(3-4\cos\varphi\right)^2 + \left(3\sqrt{3}-4\sin\varphi\right)^2} < 4.$$

Решаем эту систему неравенств. Получаем

$$4 < 52 - 24\left(\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi\right) < 16, \quad \text{откуда} \quad \frac{3}{4} < \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) < 1.$$

Следовательно,

$$\varphi - \frac{\pi}{3} \in \left(-\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k; 2\pi k\right) \cup \left(2\pi k; \arccos\frac{3}{4} + 2\pi k\right).$$

Ответ:

$$\varphi \in \left(\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{3}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) \cup$$

$$\cup\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + \arccos\frac{3}{4} + 2\pi k\right), k \in Z.$$

6. Пусть A, B, C – центры оснований кубиков с ребрами 1, 2 и 3 соответственно (рис. 1), а M, N, K – центры самих этих кубиков. Искомая плоскость проходит через точки M, N и K.

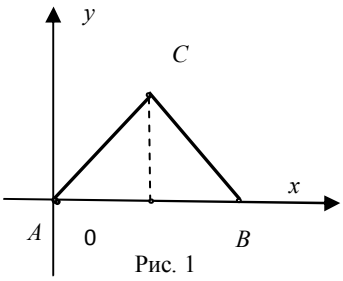


Рис. 1

Выберем систему координат $Oxyz$ так, что A, B и C лежат на плоскости Oxy и имеют координаты $A(0,0,0)$, $B(4,0,0)$ и $C\left(2,2\sqrt{3},0\right)$. Тогда $M\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$, $N(4,0,1)$, $K\left(2,2\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$. Найдем угол между плоскостью Oxy и плоскостью (MNK). Для этого найдем вектор, перпендикулярный век-

торам $\overrightarrow{MK}=\left\{2;2\sqrt{3};1\right\}$ и $\overrightarrow{MN}=\left\{4;0;\frac{1}{2}\right\}$ (рис. 2). Пусть это $\overrightarrow{MP}=\left\{x;y;z-\frac{1}{2}\right\}$. Тогда

$$\begin{cases}\left(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MK}\right)=2x+2\sqrt{3}y+z-\frac{1}{2}=0;\\ \left(\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MN}\right)=4x+\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)=0.\end{cases}$$

Кроме того,

$$\left|\overrightarrow{MP}\right|=x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1.$$

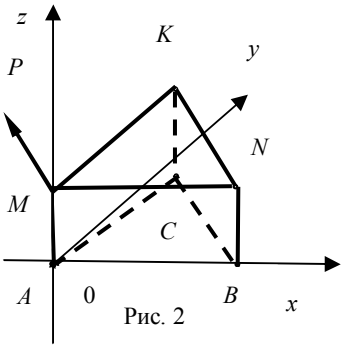


Рис. 2

Получаем:

$$\begin{cases}-z+\frac{1}{2}=8x;\\ y=\sqrt{3}x;\\ x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1.\end{cases}$$

Отсюда,

$$x^2=\frac{1}{68},\quad x=-\frac{1}{2\sqrt{17}},\quad y=-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{17}},\quad z-\frac{1}{2}=\frac{4}{\sqrt{17}},$$

тогда $\overrightarrow{MP}=\left\{-\frac{1}{2\sqrt{17}};-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{17}};\frac{4}{\sqrt{17}}\right\}$.

Угол между этими векторами и ортом $\vec{k}=\{0;0;1\}$ оси *Oz* равен искомому углу между плоскостью *Oxy* и плоскостью (*MNK*). Имеем: $\left(\overrightarrow{MP},\vec{k}\right)=\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}$. Следовательно, $a=\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Ответ: $a=\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Вариант № 2

1. При каких *x* и *a* числа $b_1=2|x-1|, b_2=\sqrt{5x+2}, b_3=\sqrt{x+1}$ являются тремя последовательными членами геометрической про-

грессии, а их логарифмы с основанием a – последовательными членами арифметической прогрессии с разностью $d = 0{,}5$?

Ответ: 1) $x = 0,\ a = 0{,}5;$ 2) $x = 8,\ a = \frac{3}{7}.$

2. Точка $A\,(3;\,5)$ расположена на плоскости. Точка B лежит на оси OX и ее абсцисса x удовлетворяет уравнению:

$$4\cos^3 x \cdot \sin 3x + 6(2+\sqrt{3})\cos^2 4x + 4\sin^3 x \cdot \cos 3x - 3 = 0\,.$$

Найти абсциссу точки B, минимально удаленной от точки A.

Ответ: $\frac{11\pi}{12}.$

3. Пол в комнате имеет форму правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 2 м. По комнате бегают две мыши. Первая мышь бегает по периметру комнаты со скоростью 0,2 м/с, вторая – по диагонали AD со скоростью 1/6 м/с. В начале движения первая мышь находилась в точке A, вторая – в точке D. Через какое время они встретятся и где? Сколько раз они встретятся в течении трех часов после начала движения?

Ответ: 1) первая встреча через 120 с в вершине A; 2) число встреч за три часа – 45.

4. Положительное, целое число x при делении на 5 имеет остаток 3, а его квадрат x^2 при делении на 25 имеет в остатке 9. Сколько таких чисел находится на отрезке $[1000;\,2000]$?

Ответ: 40.

5. При каких значениях φ система уравнений

$$\begin{cases} (x-1)^2 + \left(y - 2\sqrt{2}\right)^2 = 4; \\ (x - 3\cos\varphi)^2 + (y - 3\sin\varphi)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ:

$$\varphi = (-1)^k \frac{\pi}{6} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k, k \in Z,$$

$$\varphi = (-1)^k \arcsin\frac{17}{18} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k, k \in Z.$$

6. Три кубика с ребрами 1, 3 и 5 лежат на плоскости. Центры квадратов оснований, лежащих на плоскости, являются вершинами правильного треугольника со стороной $4\sqrt{3}$. Провести плоскость в пространстве так, что она пересекает кубы и делит их на две равновеликие части. Найти двугранный угол, образованный плоскостью сечения и плоскостью основания.

Ответ: $\alpha = \arccos\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

Вариант № 3

1. При каких x и a числа

$$b_1 = 3|x+1|,\ b_2 = \sqrt{2(5x-2)},\ b_3 = \sqrt{2x-1}$$

являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а их логарифмы с основанием a – последовательными членами арифметической прогрессии с разностью $d = -1$?

Ответ

1) $x = 1,\ a = \sqrt{6}$;

2) $x = \dfrac{5}{2},\ a = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$;

3) $x = \dfrac{5}{9},\ a = \sqrt{14}$.

2. Точка $A\,(4; -1)$ расположена на плоскости. Точка B лежит на оси OX и ее абсцисса x удовлетворяет уравнению:

$$8\cos^3 x \cdot \sin 3x - 12(1+\sqrt{2})\cos^2 4x + 8\sin^3 x \cdot \cos 3x + 3(2+3\sqrt{2}) = 0\,.$$

Найти абсциссу точки B, минимально удаленной от точки A.

Ответ: $\dfrac{19\pi}{16}$.

3. Пол в комнате имеет форму прямоугольного треугольника ABC (угол C – прямой) с катетами 5 и 12 м. По комнате бегают две мыши. Первая мышь бегает по периметру комнаты со скоростью $1/13$ м/с, вторая – по медиане CO (точка O – середина AB) со скоростью $1/12$ м/с. В начале движения первая мышь находилась в точке C, вторая – в точке O. Через какое время они встретятся и

где? Сколько раз они встретятся в течении двух часов после начала движения?

Ответ: 1) первая встреча через 390 с в вершине C; 2) число встреч за два часа – 9.

4. Положительное, целое число x при делении на 9 имеет остаток 8, а его квадрат x^2 при делении на 81 имеет в остатке 10. Сколько таких чисел находится на отрезке $[1500; 2500]$?

Ответ: 11.

5. При каких значениях φ система уравнений

$$\begin{cases} \left(x-4\sqrt{3}\right)^2+\left(y-4\right)^2=9 \\ \left(x-9\cos\varphi\right)^2+\left(y-9\sin\varphi\right)^2=1 \end{cases}$$

не имеет решений?

Ответ:

$$\varphi\in\left(-\frac{\pi}{3}+\arcsin\frac{23}{48}+2\pi k;\frac{2\pi}{3}-\arcsin\frac{23}{48}+2\pi k\right)\cup$$

$$\cup\left(\frac{2\pi}{3}-\arcsin\frac{19}{48}+2\pi k;\frac{7\pi}{3}+\arcsin\frac{19}{48}+2\pi k\right),k\in Z.$$

5. Три кубика с ребрами 1, 2 и 4 лежат на плоскости. Центры квадратов оснований, лежащих на плоскости, являются вершинами правильного треугольника со стороной $8\sqrt{21}$. Провести плоскость в пространстве так, что она пересекает кубы и делит их на две равновеликие части. Найти двугранный угол, образованный плоскостью сечения и плоскостью основания.

Ответ: $\alpha=\arccos\frac{24}{\sqrt{577}}$.

Вариант № 4

1. При каких x и a числа $b_1=3\left(x+3\right), b_2=\sqrt{10x+2}, b_3=\sqrt{x}$ являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а их логарифмы с основанием a – последовательными членами арифметической прогрессии с разностью $d=-0,25$?

Ответ:

1) $x=1,\ \ a=144;$

2) $x=4,\ \ a=\dfrac{441}{4};$

3) $x=\dfrac{1}{9},\ \ a=784.$

2. Точка $A(-1;\ 4)$ расположена на плоскости. Точка B лежит на оси OX и ее абсцисса x удовлетворяет уравнению:

$$4\cos^3 x\cdot\sin 3x+3\left(\sqrt{2}-2\right)\cos^2 4x+4\sin^3 x\cdot\cos 3x-3=0\ .$$

Найти абсциссу точки B, минимально удаленной от точки A.

Ответ: $-\dfrac{3\pi}{8}.$

3. Пол в комнате имеет форму ромба $ABCД$ с острым углом 60° при вершине B и стороной 4 м. По комнате бегают две мыши. Первая мышь бегает по периметру комнаты со скоростью 1/3 м/с, вторая – по диагонали AC со скоростью 1/4 м/с. В начале движения первая мышь находилась в точке A, вторая – в точке C. Через какое время они встретятся и где? Сколько раз они встретятся в течение часа после начала движения?

Ответ: 1) первая встреча через 48 с в вершине A; 2) число встреч за час – 38.

4. Положительное, целое число x при делении на 8 имеет остаток 5, а его квадрат x^2 при делении на 64 имеет в остатке 41. Сколько таких чисел находится на отрезке $\left[2000;\ 3000\right]$?

Ответ: 31.

5. При каких значениях φ система уравнений

$$\begin{cases}\left(x+5\right)^2+\left(y-5\right)^2=16;\\ \left(x-5\cos\varphi\right)^2+\left(y-5\sin\varphi\right)^2=25\end{cases}$$

имеет не менее одного решения?

Ответ:

$$\varphi\in\left[\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{50}+2\pi k;\frac{5\pi}{4}+\arcsin\frac{3\sqrt{2}}{50}+2\pi k\right],k\in Z.$$

6. Три кубика с ребрами 1, 3 и 6 лежат на плоскости. Центры квадратов оснований, лежащих на плоскости, являются вершинами правильного треугольника со стороной $4\sqrt{57}$. Провести плоскость в пространстве так, что она пересекает кубы и делит их на две равновеликие части. Найти двугранный угол, образованный плоскостью сечения и плоскостью основания.

Ответ: $\alpha = \arccos\dfrac{12}{\sqrt{145}}$.

4.2.7. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 3

Вариант № 1

1. Все члены геометрической прогрессии – целые числа. Сумма квадратов первых трех ее членов равна 2275. Найти третий член прогрессии.

2. Найти сумму первых 128 неотрицательных решений уравнения $3\left(\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x\right) + 4\sin x = 0.$

3. Путевой обходчик идет по перегону от станции *A* до станции *B* с постоянной скоростью. Каждые 14 мин он встречает поезд, идущий ему навстречу со станции *B*, и каждые 7 мин его обгоняет поезд, идущий со станции *A*. Скорость движения обходчика составляет 1/14 скорости поезда, которая постоянна для всех поездов на этом перегоне. Каков временной интервал движения попутных поездов через станцию *A* и встречных поездов через станцию *B*?

4. Найти все пары целых чисел x и y, для которых $3y = 3^{y/x}$. Найти наибольшее возможное значение выражения $\log_x y$.

5. При каких значениях α система уравнений

$$\begin{cases} \left(x - 4\cos\alpha\right)^2 + \left(y - 4\sin\alpha\right)^2 = 1; \\ x + y - \sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

6. Вершина правильной четырехугольной пирамиды совпадает с центром сферы радиусом *R*, проходящей через вершины основа-

ния. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение объема пирамиды.

Ответы и решения

1. Пусть b_1 – первый член геометрической прогрессии, а q – ее знаменатель. Запишем второй и третий члены прогрессии: $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_1 q^2$. Выразим $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ через b_1 и q:

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_1^2\left(1 + q^2 + q^4\right).$$

По условию задачи все члены прогрессии целые числа и $b_1^2\left(1 + q^2 + q^4\right) = 2275$. Разложим число 2275 на множители: $2275 = 25 \cdot 13 \cdot 7$. Так как b_1 и q – целые числа, то из равенства $b_1^2\left(1 + q^2 + q^4\right) = 25 \cdot 13 \cdot 7$ следует, что $b_1^2 = 5$, а $1 + q^2 + q^4 = 13 \cdot 7 = 91$. Для нахождения q^2 решим последнее уравнение. Оно преобразуется к виду $q^4 + q^2 - 90 = 0$. Отсюда находим $q_1^2 = 9$, $q_2^2 = -10$ – посторонний корень. С учетом того, что $b_1 = \pm 5$, получаем $b_3 = b_1 \cdot q^2 = \pm 45$.

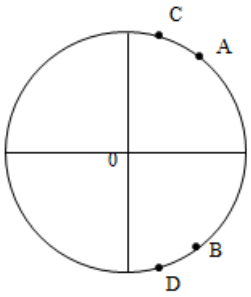
Ответ: $b_3 = \pm 45$.

2. С учетом того, что

$$\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = -\frac{\sin x}{\sin 2x \cdot \sin x} = -\frac{1}{\sin 2x}, \quad x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z,$$

исходное уравнение преобразуется к виду: $-\frac{3}{\sin 2x} + 4\sin x = 0$, или $4\sin x \cdot \sin 2x - 3 = 0$. Применив формулу $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, получим $8\sin^2 x \cdot \cos x - 3 = 0$. Выразив $\sin^2 x$ через $\cos^2 x$, имеем $8\left(1 - \cos^2 x\right) \cdot \cos x - 3 = 0$ или $8\cos^3 x - 8\cos x + 3 = 0$. Введем новую переменную $t = 2\cos x, t \in [-2; 2]$, тогда уравнение примет вид: $t^3 - 4t + 3 = 0$. Видно, что $t_1 = 1$ – корень этого уравнения. Разделив $t^3 - 4t + 3 = 0$ на $t - 1$, получим квадратное уравнение: $t^2 + t - 3 = 0$.

Его корни равны: $t_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ и $t_3 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$. Последний корень не принадлежит отрезку $[-2;2]$. Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\cos x = \frac{-1+\sqrt{13}}{4}$. На единичном круге точками A и B отмечены решения, соответствующие $\cos x = \frac{-1+\sqrt{13}}{4}$, а точками C и D решения уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$.



На каждом отрезке

$$[2\pi(k-1); 2\pi k], k \in Z,$$

содержится четыре решения. Первые четыре неотрицательных решения находятся на отрезке $[0; 2\pi]$ и их сумма равна 4π. При переходе к следующим четырем решениям их сумма увеличивается на $2\pi \cdot 4 = 8\pi$. Получаем арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 4\pi$, разностью $d = 8\pi$ и числом членов $n = \frac{128}{4} = 32$. Искомая сумма равна:

$$S = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{8\pi + 31 \cdot 8\pi}{2} \cdot 32 = 4096\pi.$$

Ответ: 4096π.

3. Пусть T_A – интервал движения попутных обходчику поездов, проходящих через станцию A. Расстояние между поездами равно $T_A \cdot \upsilon$, где υ – скорость поезда. Относительно обходчика это расстояние преодолевается со скоростью $\upsilon\left(1 - \frac{1}{14}\right) = \frac{13\upsilon}{14}$ за время

$\frac{14T_A\upsilon}{13\upsilon}$. По условию задачи это время равно 7 мин. Получаем уравнение: $\frac{14T_A\upsilon}{13\upsilon}=7$. Отсюда находим $T_A=\frac{13}{2}=6{,}5$. Аналогично, для встречного поезда расстояние $T_B\cdot\upsilon$ преодолевается со скоростью $\upsilon\left(1+\frac{1}{14}\right)=\frac{15\upsilon}{14}$ за время 14 мин. Тогда $T_B=\frac{15}{14}\cdot 14=15$.

Ответ: $T_A=6{,}5$ мин, $T_B=15$ мин.

4. Перепишем уравнение в виде $y=3^{y/x-1}$. Заметим, что выражение $3^{\frac{y}{x}-1}$ будет целым только в случае, когда $\frac{y}{x}-1=m,\ \ m\in Z,$ $m\ge 0$. Тогда имеем $y=3^m$, а $x=\frac{3^m}{m+1}$. Выражение $\frac{3^m}{m+1}$ будет целым, если $m+1=3^k,\ \ k\ge 0,\ \ k\le m,\ \ k\in Z$. Подставляя $m=3^k-1$ в выражения для *x* и *y*, получаем все целые решения уравнения:

$$\begin{cases} x=3^{3^k-1-k}; \\ y=3^{3^k-1}, \end{cases} \quad k\ge 0, \quad k\in Z$$

(при $k\ge 0$ условие $k\le m$ выполняется).

Найдем наибольшее значение функции $\log_x y$ на найденном выше множестве целых решений исходного уравнения, входящих в область допустимых значений $\log_x y$. Это все решения, кроме решения (1; 1), отвечающего $k=0$. Выразим $\log_x y$ через *k*:

$$\log_x y=\frac{\log_3 y}{\log_3 x}=\frac{3^k-1}{3^k-1-k}, \quad k\ge 1, \quad k\in Z.$$

Введем функцию $f(t)=\frac{3^t-1}{3^t-1-t}$. Ее производная равна: $f'(t)=\frac{3^t(1-t\ln 3)-1}{(3^t-1-t)^2}$. Так как при $t\ge 1\ \ f'(t)<0,$ то функция $f(t)$ убывает на промежутке $t\in[1;+\infty)$ и достигает наибольшего значе-

ния при $t=1$ Отсюда следует, что функция $\frac{3^k-1}{3^k-1-k}$ достигает наибольшего значения при $k=1$. Это значение равно: $\frac{3-1}{3-1-1}=2$.

Ответ:

1) $\begin{cases} x=3^{3^k-1-k}; \\ y=3^{3^k-1}, \end{cases} \quad k\geq 0, \quad k\in Z;$

2) $(\log_x y)_{\max}=2$ при $k=1$.

5. Приведем два способа решения этой задачи.

Способ 1 (аналитический). Выразим y из второго уравнения системы и подставим в первое уравнение системы:

$$(x-4\cos\alpha)^2+\left(\sqrt{2}-x-4\sin\alpha\right)^2=1.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим:

$$2x^2+2\left(4\sin\alpha+4\cos\alpha-\sqrt{2}\right)x+17-8\sqrt{2}\sin\alpha=0.$$

Для того чтобы система уравнений имела ровно два решения, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант полученного квадратного уравнения был больше нуля. Вычислим $D/4$:

$$D/4=\left(4\sin\alpha+4\cos\alpha-\sqrt{2}\right)^2-2\left(17-8\sqrt{2}\sin\alpha\right)=$$

$$=8\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)-32\sin\alpha\cos\alpha-16.$$

Получаем неравенство:

$$\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)-4\sin\alpha\cos\alpha-2>0.$$

Введем новую переменную $t=\sin\alpha+\cos\alpha$. С учетом того, что $2\sin\alpha\cos\alpha=t^2-1$, неравенство преобразуется к виду:

$$2t^2-\sqrt{2}t<0, \quad \text{или} \quad t\left(2t-\sqrt{2}\right)<0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, находим $t\in\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Отсюда следует, что

$$\begin{cases} \sin\alpha + \cos\alpha > 0; \\ \sin\alpha + \cos\alpha < \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Для решения этой системы неравенств применим метод введения вспомогательного аргумента, а именно представим $\sin\alpha + \cos\alpha$ в виде $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) > 0; \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решая эту систему неравенств, получим:

$$\frac{\pi}{4} + \alpha \in \left(2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right), \quad k \in Z.$$

Отсюда находим α:

$$\alpha \in \left(2\pi k - \frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{12} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{7\pi}{12} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right), \quad k \in Z.$$

Способ 2 (геометрический). При фиксированном α первое уравнение задает окружность радиуса 1 с центром в точке $(4\cos\alpha; 4\sin\alpha)$. Второе уравнение задает прямую $x + y - \sqrt{2} = 0$. Система уравнений имеет два решения, когда прямая пересекает окружность в двух точках. Прямая пересекает окружность в двух точках в случае, когда расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности. Воспользуемся формулой для вычисления расстояния d от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$: $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. В нашем случае это расстояние равно:

$$d = \frac{\left|4\cos\alpha + 4\sin\alpha - \sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}}.$$

В результате приходим к неравенству:

$$\frac{\left|4\cos\alpha+4\sin\alpha-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}}<1.$$

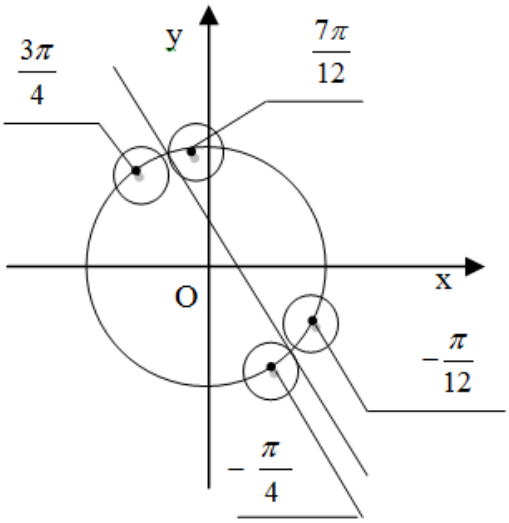
Это неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases}4\cos\alpha+4\sin\alpha-\sqrt{2}>-\sqrt{2};\\ 4\cos\alpha+4\sin\alpha-\sqrt{2}<\sqrt{2}.\end{cases}$$

После приведения подобных членов и сокращения на 4 получаем систему:

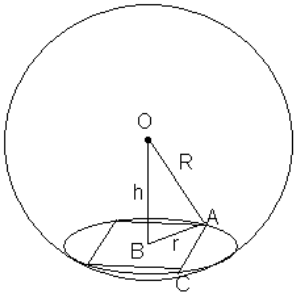
$$\begin{cases}\cos\alpha+\sin\alpha>0;\\ \cos\alpha+\sin\alpha<\dfrac{1}{\sqrt{2}},\end{cases}$$

решение которой приведено выше (см. решение способом 1). Ниже приведен рисунок, иллюстрирующий способ 2.



Ответ: $\alpha\in\left(2\pi k-\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{12}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{7\pi}{12}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right),\ k\in Z.$

6. Пусть h – длина высоты пирамиды, $h \in (0; R)$. Основанием пирамиды является квадрат, вписанный в окружность радиусом $r = \sqrt{R^2 - h^2}$. Длина стороны квадрата



$$a = \frac{2\sqrt{R^2 - h^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2R^2 - 2h^2}.$$

Объем пирамиды

$$V = V(h) = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{2}{3}(R^2 - h^2)h = \frac{2}{3}R^2 h - \frac{2}{3}h^3.$$

Максимальное значение функции $V(h)$ найдем с помощью производной

$$V'(h) = \frac{2}{3}R^2 - 2h^2 = -2\left(h - \frac{R}{\sqrt{3}}\right)\left(h + \frac{R}{\sqrt{3}}\right).$$

Так как при $h = \frac{R}{\sqrt{3}} \in (0; R)$ $V'(h) = 0$, при $h < \frac{R}{\sqrt{3}}$ $V'(h) > 0$, а при $h > \frac{R}{\sqrt{3}}$ $V'(h) < 0$, то $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ является точкой максимума функции $V(h)$. Следовательно,

$$V_{\max} = V\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3}\left(R^2 - \frac{R^2}{3}\right)\frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{4R^3}{9\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}R^3}{27}.$$

Ответ: $V_{\max} = \frac{4\sqrt{3}}{27}R^3$.

Вариант № 2

1. Все члены геометрической прогрессии – целые числа. Сумма квадратов первых трех ее членов равна 1029. Найти пятый член прогрессии.

Ответ: $b_5 = \pm 112$.

2. Найти сумму первых 36 неотрицательных решений уравнения $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x + 4\sin x = 0$.

Ответ: $\dfrac{487\pi}{3}+\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}+\arccos\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

3. Путевой обходчик идет по перегону от станции A до станции B с постоянной скоростью. Каждые 20 мин он встречает поезд, идущий ему навстречу со станции B, и каждые 10 мин его обгоняет поезд, идущий со станции A. Скорость движения обходчика составляет 1/10 скорости поезда, которая постоянна для всех поездов на этом перегоне. Каков временной интервал движения попутных поездов через станцию A и встречных поездов через станцию В?

Ответ: $T_A=9$ мин, $T_B=22$ мин.

4. Найти все пары целых чисел x и y, для которых $2x=2^{y/x}$. Найти наименьшее возможное значение выражения $\log_2(xy)$.

Ответ:

1) $\begin{cases} x=2^m; \\ y=(m+1)2^m, \end{cases}$ $m\ge 0,\quad m\in Z;$

2) $(\log_2 xy)_{\min}=0$ при $m=0$.

5. При каких значениях α система уравнений

$$\begin{cases}(x-4\cos\alpha)^2+(y-4\sin\alpha)^2=2;\\ x+\sqrt{3}y-2\sqrt{2}=0\end{cases}$$

имеет единственное решение?

Ответ: $\alpha=\dfrac{7\pi}{12}+2\pi k,\quad \alpha=\dfrac{\pi}{12}+2\pi k,\quad \alpha=-\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in Z.$

6. Вершина конуса совпадает с центром сферы радиусом R, содержащей окружность основания. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение объема конуса.

Ответ: $V_{\max}=\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{27}R^3$.

Вариант № 3

1. Все члены геометрической прогрессии – целые числа. Сумма квадратов первых трех ее членов равна 2457. Найти седьмой член прогрессии.

Ответ: $b_7 = \pm 12288$.

2. Найти сумму первых 30 неотрицательных решений уравнения $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} x + 4\cos 3x = 0$.

Ответ: 90π.

3. Путевой обходчик идет по перегону от станции A до станции B с постоянной скоростью. Каждые 6 мин он встречает поезд, идущий ему навстречу со станции B, и каждые 9 мин его обгоняет поезд, идущий со станции A. Скорость движения обходчика составляет 1/12 скорости поезда, которая постоянна для всех поездов на этом перегоне. Каков временной интервал движения попутных поездов через станцию A и встречных поездов через станцию B?

Ответ: $T_A = 8,25$ мин, $T_B = 6,5$ мин.

4. Найти все пары целых чисел x и y, для которых $\dfrac{x}{2} = 2^{x/y}$. Найти наибольшее возможное значение выражения $\log_x y$.

Ответ:

1) $\begin{cases} x = 2^{2^k+1}; \\ y = 2^{2^k+1-k}, \end{cases} \quad k \geq 0, \quad k \in Z;$

2) $(\log_x y)_{\max} = 1$ при $k = 0$.

5. При каких значениях α система уравнений

$$\begin{cases} (x - 5\cos\alpha)^2 + (y - 5\sin\alpha)^2 = 1; \\ \sqrt{3}x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

не имеет решений?

Ответ:

$$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right) \cup$$

$$\cup \left(-\frac{\pi}{6} + \arccos\frac{1}{10} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} - \arccos\frac{1}{10} + 2\pi(k+1) \right), \quad k \in Z.$$

6. Вершина правильной треугольной пирамиды совпадает с центром сферы радиусом R, проходящей через вершины основания. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение объема пирамиды.

Ответ: $V_{\max} = \frac{1}{6}R^3$.

Вариант № 4

1. Все члены геометрической прогрессии – целые числа. Сумма квадратов первых трех ее членов равна 1701. Найти девятый член прогрессии.

Ответ: $b_9 = \pm 2304$.

2. Найти сумму первых 40 неотрицательных решений уравнения $3(\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg} x) + 4\cos x = 0$.

Ответ: 420π.

3. Путевой обходчик идет по перегону от станции *A* до станции *B* с постоянной скоростью. Каждые 22 мин он встречает поезд, идущий ему навстречу со станции *B*, и каждые 11 мин его обгоняет поезд, идущий со станции *A*. Скорость движения обходчика составляет 1/11 скорости поезда, которая постоянна для всех поездов на этом перегоне. Каков временной интервал движения попутных поездов через станцию *A* и встречных поездов через станцию *B*?

Ответ: $T_A = 10$ мин, $T_B = 24$ мин.

4. Найти все целые числа x и y, для которых $\frac{y}{3} = 3^{x/y}$. Найти наименьшее возможное значение выражения $\log_x y^2$.

Ответ:

1) $\begin{cases} x = (m-1)3^m; \\ y = 3^m, \end{cases} \quad m \geq 0, \quad m \in Z;$

2) $(\log_y x^2)_{\max} = 2$ при $m = 2$.

5. При каких значениях α система уравнений

$$\begin{cases} (x - 6\cos\alpha)^2 + (y - 6\sin\alpha)^2 = 1; \\ x - \sqrt{3}y - 4 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Ответ:

$$\alpha \in \left[-\frac{5\pi}{6} + \arcsin\frac{1}{6} + 2\pi k; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right] \cup$$

$$\cup \left[2\pi k; \frac{\pi}{6} - \arcsin\frac{1}{6} + 2\pi k \right], \quad k \in Z.$$

6. Центр окружности верхнего основания прямого кругового цилиндра совпадает с центром сферы радиусом R, содержащей окружность нижнего основания. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение объема цилиндра.

Ответ: $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9} R^3$.

4.2.8. Заключительный тур олимпиады «Росатом», 11 класс, комплект 4

Вариант № 1

1. Найти x и y, для которых числа $\log_{\pi - x - 3y}(2x + y)$, $2\log_{3x+5y}(2x + y)$ и $4\log_{3x+5y}(\pi - x - 3y)$ являются последовательными членами геометрической прогрессии, а числа $\sin x$, $\cos 0,5(x - y)$ и $\sin y$ – последовательными членами арифметической прогрессии.

2. Числа x являются решениями уравнения

$$\lg\frac{\cos^2 x}{27} - 4\lg\left(2\sin^2 x\right) = 4\lg\operatorname{tg} x + \lg 4.$$

Найти наибольшее значение выражения $\frac{x}{x^2 + 1}$.

3. При каких n сумма n членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 3/5$ и разностью $d = 2/9$ является целым числом?

4. Найти наименьший радиус круга, содержащего все точки M на плоскости, координаты $(x; y)$ которых целые числа, удовлетворяющие уравнению $x^2 + 4x - 32 = 4^y$.

5. При каких значениях a система

$$\begin{cases} |\sin x| = \cos y; \\ |x| + |y| = a \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений?

6. На плоскости лежат 3 одинаковых конуса так, что: 1) их вершины находятся в одной точке плоскости; 2) каждый конус касается плоскости по образующей; 3) каждый конус касается двух соседних конусов по образующей. Найти угол осевого сечения конусов.

Ответы и решения

1. Так как числа $\log_{\pi-x-3y}(2x+y)$, $2\log_{3x+5y}(2x+y)$ и $4\log_{3x+5y}(\pi-x-3y)$ являются последовательными членами геометрической прогрессии, то они удовлетворяют уравнению

$$4\log_{\pi-x-3y}(2x+y)\cdot\log_{3x+5y}(\pi-x-3y) = 4\log^2{}_{3x+5y}(2x+y).$$

Запишем ОДЗ уравнения

$$\begin{cases} \pi-x-3y>0; \\ \pi-x-3y\neq 1; \\ 3x+5y>0; \\ 3x+5y\neq 1; \\ 2x+y>0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+3y<\pi; \\ x+3y\neq \pi-1; \\ 3x+5y>0; \\ 3x+5y\neq 1; \\ 2x+y>0. \end{cases}$$

Преобразуем левую часть уравнения

$$4\log_{\pi-x-3y}(2x+y)\cdot\log_{3x+5y}(\pi-x-3y) =$$

$$= 4\frac{\log_{3x+5y}(2x+y)}{\log_{3x+5y}(\pi-x-3y)}\cdot\log_{3x+5y}(\pi-x-3y) = 4\log_{3x+5y}(2x+y).$$

В результате уравнение перепишется в виде

$$\log_{3x+5y}(2x+y) = \log^2{}_{3x+5y}(2x+y).$$

Отсюда находим

$$\left[\begin{array}{l}\log_{3x+5y}(2x+y)=0;\\ \log_{3x+5y}(2x+y)=1.\end{array}\right.$$

Рассмотрим сначала уравнение $\log_{3x+5y}(2x+y)=0$. Его решение $2x+y=1$, но тогда и $\log_{\pi-x-3y}(2x+y)=0.$ Отсюда следует, что все члены прогрессии равны нулю, в том числе и $4\log_{3x+5y}(\pi-x-3y)=0.$ Решение последнего уравнения $\pi-x-3y=1$ не входит в ОДЗ. Перейдем к уравнению $\log_{3x+5y}(2x+y)=1.$ Его решение $2x+y=3x+5y$. Отсюда получаем $x=-4y.$ Подставляя $x=-4y$ в ОДЗ исходного уравнения, находим ОДЗ переменной y:

$$\left\{\begin{array}{l}-\pi<y<0;\\ y\neq 1-\pi, y\neq -\dfrac{1}{7}.\end{array}\right.$$

По условию задачи числа $\sin x,\ \cos 0{,}5(x-y)$ и $\sin y$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, поэтому они удовлетворяют уравнению

$$\sin x+\sin y=2\cos\frac{x-y}{2}.$$

Перепишем уравнение в виде

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=2\cos\frac{x-y}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x-y}{2}=0;\\ \sin\dfrac{x+y}{2}=1.\end{array}\right.$$

Решаем $\cos\dfrac{x-y}{2}=0:\ x-y=\pi+2\pi k,\ \ k\in Z.$

Решаем $\sin\dfrac{x+y}{2}=1:\ x+y=\pi+4\pi m, m\in Z.$

В результате для нахождения x и y мы получаем совокупность двух систем:

$$\begin{cases} x=-4y; \\ x-y=\pi+2\pi k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4y; \\ -5y=\pi+2\pi k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4\pi}{5}+\dfrac{8\pi k}{5}; \\ y=-\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{2\pi k}{5} \end{cases} \qquad (1)$$

и

$$\begin{cases} x=-4y; \\ x+y=\pi+4\pi m, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4y; \\ -3y=\pi+4\pi m, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{16\pi m}{3}; \\ y=-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{4\pi m}{3}. \end{cases} \qquad (2)$$

Отберем решения, для которых переменная y входит в ОДЗ, найденную выше:

$$(1):\ \begin{cases} -\pi<-\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{2\pi k}{5}<0; \\ -\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{2\pi k}{5}\neq 1-\pi; \\ -\dfrac{\pi}{5}-\dfrac{2\pi k}{5}\neq -\dfrac{1}{7}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}<k<2; \\ k\neq 2-\dfrac{5}{2\pi}; \\ k\neq -\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{14\pi}, \end{cases} \Leftrightarrow k\in\{0;1\};$$

$$(2):\ \begin{cases} -\pi<-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{4\pi m}{3}<0; \\ -\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{4\pi m}{3}\neq 1-\pi; \\ -\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{4\pi m}{3}\neq -\dfrac{1}{7}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{4}<m<\dfrac{1}{2}; \\ m\neq \dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4\pi}; \\ m\neq -\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{28\pi}, \end{cases} \Leftrightarrow m\in\{0\}.$$

Таким образом, система (1) имеет два таких решения $\left(\dfrac{4\pi}{5};-\dfrac{\pi}{5}\right)$ и $\left(\dfrac{12\pi}{5};-\dfrac{3\pi}{5}\right)$, а система (2) – одно решение $\left(\dfrac{4\pi}{3};-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{4\pi}{5};-\frac{\pi}{5}\right), \left(\frac{12\pi}{5};-\frac{3\pi}{5}\right), \left(\frac{4\pi}{3};-\frac{\pi}{3}\right).$

2. Найдем ОДЗ уравнения:

$$\begin{cases}\cos^2 x \neq 0;\\ \sin^2 x \neq 0;\\ \operatorname{tg} x > 0,\end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right), k \in Z.$$

Воспользуемся свойствами логарифмической функции и перепишем уравнение в виде

$$\lg\frac{\cos^6 x}{27} = \lg\left(2^6 \cdot \sin^{12} x\right).$$

Отсюда получаем $\cos^6 x = 27 \cdot 2^6 \cdot \sin^{12} x$. Это уравнение эквивалентно уравнению $\cos^2 x = 12\sin^4 x$. Используя основное тригонометрическое тождество, получим

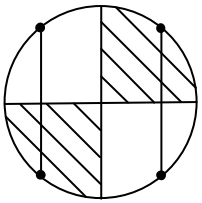
$$\cos^2 x = 12\left(1-\cos^2 x\right)^2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных имеем

$$12\cos^4 x - 25\cos^2 x + 12 = 0.$$

Это биквадратное уравнение относительно $\cos^2 x$. Его решения: $\cos^2 x = \frac{4}{3}$ (посторонний корень) и $\cos^2 x = \frac{3}{4}$.

В результате получаем два простейших тригонометрических уравнения $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Их решения –



$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{и} \quad x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$$

С учетом ОДЗ имеем $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Так как при отрицательных значениях x эта функция отрицательна, а при положительных зна-

чениях x она положительна, то точку максимума функции нужно искать на множестве $x \in [0; +\infty)$. Найдем производную $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{1 - x^2}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{\left(x^2 + 1\right)^2}.$$

При $x < 1$ $f'(x) > 0$, следовательно, на $[0; 1]$ $f(x)$ возрастает.

При $x > 1$ $f'(x) < 0$, следовательно, на $[1; +\infty)$ $f(x)$ убывает. Это означает, что функция имеет максимум в точке $x = 1$.

Среди чисел $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$, наиболее близкими к 1 являются $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{7\pi}{6}$. Вычислим

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{6\pi}{\pi^2 + 36} \approx 0,41 \quad \text{и} \quad f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{42\pi}{49\pi^2 + 36} \approx 0,25.$$

Отсюда следует, что наибольшее значение функции равно $\frac{6\pi}{\pi^2 + 36}$.

Ответ: $\frac{6\pi}{\pi^2 + 36}$.

3. Для арифметической прогрессии справедлива формула суммы n первых членов

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n.$$

По условию задачи $a_1 = \frac{3}{5}$, $d = \frac{2}{9}$, тогда $S_n = \frac{(5n + 22)n}{45}$. Для того чтобы S_n была целым числом, $(5n + 22)n$ должно делиться на 45. Так как $5n + 22$ не делится на 5, то n делится на 5, т.е. $n = 5k$ и $S_n = \frac{(25k + 22)k}{9}$. Следовательно, число $(25k + 22)k$ должно делиться на 9.

Рассмотрим все возможные случаи:

1) $k = 9t$, условия задачи выполнены, в этом случае $n = 45t$;

2) $k = 9t + 1$, число $5(9t+1)(9\cdot 25t + 47)$ не делится на 9;

3) $k = 9t + 2$, число $5(9t+2)(9\cdot 25t + 72)$ делится на 9, в этом случае $n = 45t + 10$;

4) $k = 9t + 3$, число $5(9t+3)(9\cdot 25t + 97)$ не делится на 9;

5) $k = 9t + 4$, число $5(9t+4)(9\cdot 25t + 122)$ не делится на 9;

6) $k = 9t + 5$, число $5(9t+5)(9\cdot 25t + 147)$ не делится на 9;

7) $k = 9t + 6$, число $5(9t+6)(9\cdot 25t + 172)$ не делится на 9;

8) $k = 9t + 7$, число $5(9t+7)(9\cdot 25t + 197)$ не делится на 9;

9) $k = 9t + 8$, число $5(9t+8)(9\cdot 25t + 222)$ не делится на 9.

Таким образом, условия задачи выполнены при $n = 45t$, $t \in N$, и при $n = 45t + 10$, $t > 0$, $t \in Z$.

Ответ: $n = 45t$, $t \in N$; $n = 45t + 10$, $t \geq 0$, $t \in Z$.

4. Так как левая часть уравнения – целое число, то 4^y также целое число. Отсюда следует, что $y = n$, $n \geq 0$, $n \in Z$. Перепишем уравнение в виде $(x+8)(x-4) = 2^{2n}$, $n \in Z$, $n \geq 0$. Возможны два случая.

Случай 1. Пусть $x + 8 = 2^m$, $m \geq 0$, $m \in Z$. Тогда получаем систему

$$\begin{cases} x + 8 = 2^m; \\ x - 4 = 2^{2n-m}. \end{cases}$$

Вычтем из верхнего уравнения нижнее: $12 = 2^m - 2^{2n-m}$. Перепишем это уравнение в виде: $2^{2n-m}(2^{2m-2n} - 1) = 2^2 \cdot 3$.

Равенство возможно, если $2^{2n-m} = 2^2$, а $2^{2m-2n} - 1 = 3$. Приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} 2n - m = 2; \\ 2m - 2n = 2. \end{cases}$$

Решение этой системы – $m = 4$, $n = 3$. Тогда $x = 8$, $y = 3$ – первое решение исходного уравнения.

Случай 2. Пусть $x + 8 = -2^m$, $m \geq 0$, $m \in Z$. Тогда получаем систему

$$\begin{cases} x+8=-2^m; \\ x-4=-2^{2n-m}. \end{cases}$$

Вычтем из верхнего уравнения нижнее: $12=2^{2n-m}-2^m$. Перепишем это уравнение в виде: $2^m(2^{2n-2m}-1)=2^2\cdot 3$.

Равенство возможно, если $2^m=2^2$, а $2^{2n-2m}-1=3$. Приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} m=2; \\ 2n-2m=2. \end{cases}$$

Решение этой системы – $m=2$, $n=3$. Тогда $x=-12$, $y=3$ – второе решение исходного уравнения.

Расстояние между полученными решениями (8; 3) и (–12; 3) равно 20. Наименьший радиус круга $R_{\min}$, содержащего эти точки, равен половине этого расстояния, следовательно, $R_{\min}=10$.

Ответ: $R_{\min}=10$.

5. Перепишем первое уравнение системы уравнений в виде:

$$\begin{cases} \cos y \geq 0; \\ \left[\begin{array}{l} \sin x=\cos y; \\ \sin x=-\cos y. \end{array}\right. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала уравнение $\sin x=\cos y$. Оно эквивалентно уравнению $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos y$. Его решения $y=\pm\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\pi k$, $k\in Z$. Теперь рассмотрим уравнение $\sin x=-\cos y$. Оно эквивалентно уравнению $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos y$. Его решения $y=\pm\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+2\pi k$, $k\in Z$. Таким образом, множество решений первого уравнения состоит из участков прямых $y=\pm\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\pi k$, $y=\pm\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+2\pi k$, $k\in Z$, для которых $\cos y\geq 0$. На рис. 1 изо-

бражено множество точек на плоскости, соответствующих первому уравнению системы.

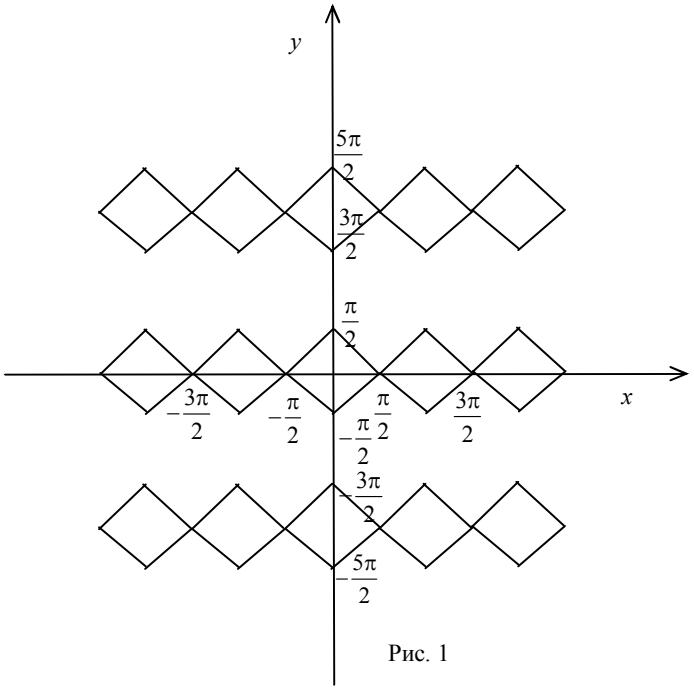


Рис. 1

Перейдем к рассмотрению второго уравнения системы $|x|+|y|=a$. При $a<0$ это уравнение не имеет решений. При $a=0$ оно имеет решение (0; 0). Решим уравнение при $a>0$.

Случай 1. $x\ge 0,\ \ y\ge 0$. Получаем $x+y=a$.

Случай 2. $x\ge 0,\ \ y<0$. Получаем $x-y=a$.

Случай 3. $x<0,\ \ y\ge 0$. Получаем $-x-y=a$.

Случай 4. $x<0,\ \ y<0$. Получаем $x+y=a$.

Множество точек, соответствующих решениям второго уравнения в системе, изображено на рис. 2.

Из сопоставление рисунков видно, совмещение части рисунков по множеству, содержащему бесконечное число точек, возможно при $a=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \ k\ge 0,\ \ k\in Z$.

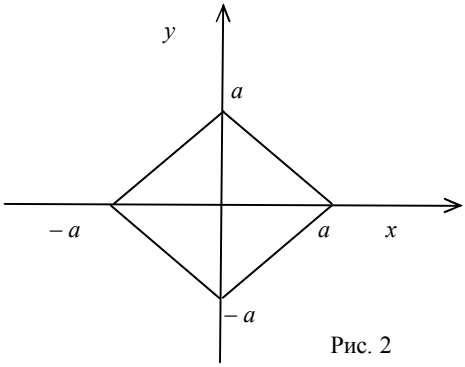


Рис. 2

Ответ: $a = \frac{\pi}{2} + \pi k, \;\; k \geq 0, \;\; k \in Z.$

6. Пусть h – высота конуса, l – образующая конуса, α – угол осевого сечения конуса, d – расстояние между центрами оснований двух конусов.

На рис. 1 приведены два касающихся конуса.

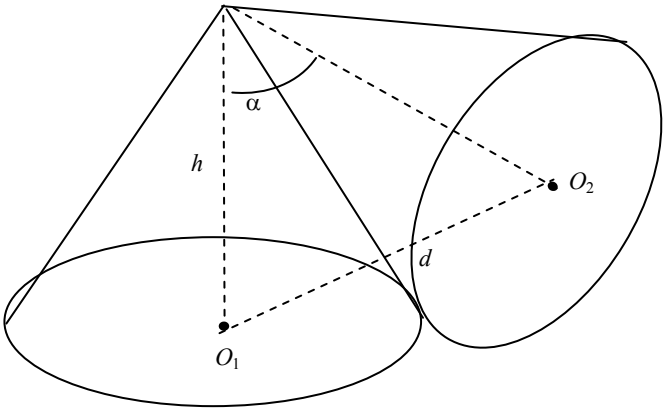


Рис. 1

Заметим, что угол между высотами соседних конусов равен углу α осевого сечения конуса. Вычислим расстояние между центрами оснований двух конусов:

$$d = 2h\sin\frac{\alpha}{2} = 2l\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

На рис. 2 изображен вид сбоку на конус, лежащий на плоскости. Обозначим через $\tilde{O}_1$ проекцию центра основания конуса O_1 на плоскость, на которой лежит конус.

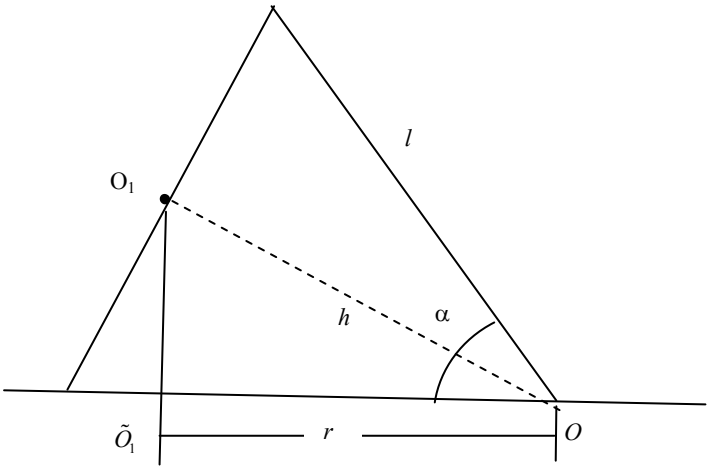


Рис. 2

Найдем расстояние от $\tilde{O}_1$ до вершины конуса O:

$$r = h\cos\frac{\alpha}{2} = l\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

На рис. 3 изображены проекции центров оснований трех одинаковых конусов на плоскость. Из треугольника $\tilde{O}_1\tilde{O}_2O$ находим $d = r\sqrt{3}$. Подставляя в эту формулу d и r, выраженные через α, получаем уравнение: $2l\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}\,l\cos^2\frac{\alpha}{2}$ или $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}2$. Тогда $\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

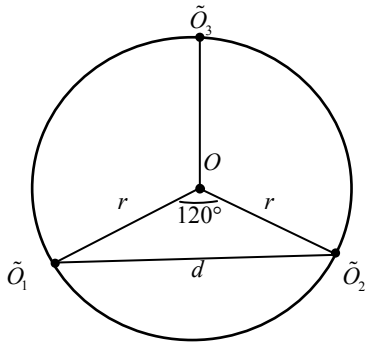


Рис. 3

Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант № 2

1. Найти x и y, для которых числа $2\log_{6\pi-x-2y}(2x-y)$, $\sqrt{2}\log_{x+3y}(2x-y)$ и $\log_{x+3y}(6\pi-x-2y)$ являются последовательными членами геометрической прогрессии, а числа $\cos x$, $0{,}5\cos 0{,}5(x-y)$ и $\cos y$ – последовательными членами арифметической прогрессии.

Ответ: $\left(\dfrac{4\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{8\pi}{15};\dfrac{2\pi}{15}\right)$, $\left(\dfrac{56\pi}{15};\dfrac{14\pi}{15}\right)$, $\left(\dfrac{8\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

2. Числа x являются решениями уравнения

$$3\lg\cos^2 x - 2\lg(\sin^2 x) = 2\lg\operatorname{ctg} x - \lg 12.$$

Найти наименьшее значение выражения $\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Ответ: $-\dfrac{12\pi}{4\pi^2+9}$.

3. При каких n сумма n членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 2/3$ и разностью $d = 2/7$ является целым числом?

Ответ: 1) $n = 21t,\ t \in N$; 2) $n = 21t + 15,\ t \geq 0,\ t \in Z$.

4. Найти наименьший радиус круга, содержащего все точки M на плоскости, координаты $(x; y)$ которых целые числа, удовлетворяющие уравнению $x^2 - 22x + 40 = 3^y$.

Ответ: $R_{\min} = 18$.

5. При каких значениях a система

$$\begin{cases} |\sin y| = \cos 2x; \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

Ответ: $a = \dfrac{\pi^2}{4}$.

6. На плоскости лежат четыре одинаковых конуса так, что: 1) их вершины находятся в одной точке плоскости; 2) каждый конус касается плоскости по образующей; 3) каждый конус касается двух соседних конусов по образующей. Найти угол осевого сечения конусов.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Вариант № 3

1. Найти x и y, для которых числа $-\log_{4\pi - x - y}(x - 3y)$, $\log_{2x+y}(x - 3y)$ и $-\log_{2x+y}(4\pi - x - y)$ являются последовательными членами геометрической прогрессии, а числа $\sin^2 x$, $\sin x - \sin y$ и $-\sin^2 y$ – последовательными членами арифметической прогрессии.

Ответ: $\left(\dfrac{8\pi}{5}; -\dfrac{2\pi}{5}\right)$, $\left(\dfrac{16\pi}{5}; -\dfrac{4\pi}{5}\right)$, $\left(\dfrac{24\pi}{5}; -\dfrac{6\pi}{5}\right)$, $\left(\dfrac{4\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{3}\right)$, $(4\pi; -\pi)$.

2. Числа x являются решениями уравнения

$$\lg \sin x + \lg \cos^2 x = 4 \lg \operatorname{tg} x + \lg \frac{27}{8}.$$

Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{4x^2+1}$.

Ответ: $\dfrac{3\pi}{2(\pi^2+9)}$.

3. При каких n сумма n членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 3/8$ и разностью $d = 5/18$ является целым числом?

Ответ: 1) $n = 72t,\ t \in N$; 2) $n = 72t + 64,\ t \geq 0,\ t \in Z$.

4. Найти наименьший радиус круга, содержащего все точки M на плоскости, координаты $(x; y)$ которых целые числа, удовлетворяющие уравнению $x^2 + 14x - 95 = 5^y$.

Ответ: $R_{\min} = 13$.

5. При каких значениях a система

$$\begin{cases} |\cos 2x| = \sin y; \\ 2|x| + \left|y - \dfrac{\pi}{2}\right| = a \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

Ответ: $a \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$.

6. На плоскости лежат шесть одинаковых конусов так, что: 1) их вершины находятся в одной точке плоскости; 2) каждый конус касается плоскости по образующей; 3) каждый конус касается двух соседних конусов по образующей. Найти угол осевого сечения конусов.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$.

Вариант № 4

1. Найти x и y, для которых числа $\log_{2\pi - x + 2y}(2x + 3y)$, $\log_{x-y}(2x + 3y)$ и $\log_{x-y}(2\pi - x + 2y)$ являются последовательными членами геометрической прогрессии, а числа $\cos^2 x$, $\cos x + \cos y$ и $-\cos^2 y$ – последовательными членами арифметической прогрессии.

Ответ: $\left(\frac{4\pi}{5}; -\frac{\pi}{5}\right)$.

2. Числа x являются решениями уравнения

$$3\lg\sin^2 x + \lg\cos x = 4\lg\operatorname{ctg}^2 x - \lg 8\sqrt{2}.$$

Найти наименьшее значение выражения $\frac{2x}{4x^2+1}$.

Ответ: $-\frac{2\pi}{\pi^2+4}$.

3. При каких n сумма n членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 3/2$ и разностью $d = 4/7$ является целым числом?

Ответ: 1) $n = 14t,\ t \in N$; 2) $n = 14t + 8,\ t \geq 0,\ t \in Z$.

4. Найти наименьший радиус круга, содержащего все точки M на плоскости, координаты $(x; y)$ которых целые числа, удовлетворяющие уравнению $x^2 + 6x - 432 = 7^y$.

Ответ: $R_{\min} = 28$.

5. При каких значениях a система

$$\begin{cases} |\cos x| = \sin 2y; \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно три решения?

Ответ: $a = \frac{\pi^2}{16}$.

6. На плоскости лежат восемь одинаковых конусов так, что: 1) их вершины находятся в одной точке плоскости; 2) каждый конус касается плоскости по образующей; 3) каждый конус касается двух соседних конусов по образующей. Найти угол осевого сечения конусов.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Т.И. Бухарова, В.Е. Волков, С.А. Гришин, Н.В. Мирошин,
С.Е. Муравьев, О.В. Нагорнов, Д.Г. Орловский, Е.Х. Садекова,
Е.Б. Сандаков, В.М. Простокишин

Отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом»

В помощь школьникам 7–11 классов

Учебно-методическое пособие

Под редакцией О.В. Нагорнова

Редактор М.В. Макарова
Оригинал-макет подготовлен М.В. Макаровой

Подписано в печать 02.06.2016. Формат 60x84 1/16
Уч.-изд. л. 15,75. Печ. л. 15,75. Тираж экз.
Изд. № 003-1. Заказ №

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
Типография НИЯУ МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31