Задания первого очного отборочного тура
Отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом»
(олимпиада им.проф. И.В.Савельева)
Физика, 11 класс
23 октября 2016 г.

1. Болид формулы-1 проехал участок длиной l. Известно, что скорость болида в начале участка v, в конце - $2v$. За какое минимальное время болид может проехать участок, если его скорость на участке не уменьшалось, а ускорение не превышало значение a_0. Ответ обосновать.

Решение. Чтобы проехать участок за минимальное время, болид должен как можно быстрее набрать максимальную скорость. Поэтому стратегия болида должна заключаться в том, чтобы сначала двигаться равноускоренно до скорости $2v$, а затем – равномерно с этой скоростью. Время разгона болида до скорости $2v$ и пройденный за это время путь найдем из законов равноускоренного движения

$$\Delta t_1 = \frac{2v - v}{a_0} = \frac{v}{a_0}, \quad S = \frac{4v^2 - v^2}{2a_0} = \frac{3v^2}{2a_0}$$

Поскольку по условию болид за время разгона не успел проехать участок, на параметры задачи есть такое ограничение

$$S < l \qquad \Rightarrow \qquad 3v^2 < 2a_0 l$$

Равномерно болид должен будет пройти участок пути $l - S$ со скоростью $2v$. Поэтому на такое движение болид затратит следующее время

$$\Delta t_2 = \frac{l - S}{2v} = \frac{l}{2v} - \frac{3v}{4a_0}$$

А полное минимальное время движения болида по участку равно

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{v}{a_0} + \frac{l}{2v} - \frac{3v}{4a_0} = \frac{v}{4a_0} + \frac{l}{2v},$$ и должно быть выполнено условие $3v^2 < 2a_0 l$.

2. Вес сосуда, из которого откачан воздух, равен $P_1 = 1{,}02$ Н. Вес этого сосуда, заполненного воздухом при атмосферном давлении, равен $P_2 = 1{,}06$ Н, а неизвестным газом при атмосферном давлении - $P_3 = 1{,}10$ Н. Найти молярную массу неизвестного газа. Молярная масса воздуха - $\mu = 29$ г/моль. Газы считать идеальными, толщиной стенок сосуда пренебречь.

Решение. Пусть масса сосуда (без воздуха) - M, воздуха в сосуде при атмосферном давлении - m, неизвестного газа при атмосферном давлении - m_1. В первом случае на сосуд сила тяжести сосуда Mg и сила Архимеда, равная весу атмосферного воздуха в объеме сосуда - mg. Поэтому

$$P_1 = Mg - mg$$

Во втором случае сосуд содержит атмосферный воздух. Поэтому

$$P_2 = (M + m)g - mg = Mg$$

Отсюда находим

$$Mg = P_2,\; mg = P_2 - P_1$$

Аналогично для случая, когда в сосуде находится неизвестный газ, имеем

$$P_3 = (M + m_1)g - mg = Mg + (m_1 - m)g = Mg + mg\left(\frac{m_1}{m} - 1\right) = P_2 + (P_2 - P_1)\left(\frac{m_1}{m} - 1\right)$$

Из закона Клапейрона-Менделеева для воздуха и неизвестного газа в сосуде имеем

$$m = \frac{pV\mu}{RT},\; m_1 = \frac{pV\mu_1}{RT}$$

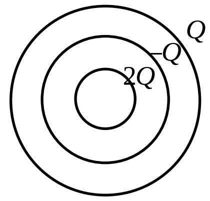
где p - атмосферное давление, V - объем сосуда, T - температура, R - универсальная газовая постоянная, μ и μ_1 - молярные массы воздуха и неизвестного газа. Отсюда заключаем, что отношение масс неизвестного газа и воздуха в сосуде (при одинаковых давлении и температуре) равно отношению молярных масс неизвестного газа и воздуха. Поэтому

$$P_3 = P_2 + (P_2 - P_1)\left(\frac{\mu_1}{\mu} - 1\right)$$

Выражая из этого соотношения молярную массу неизвестного газа, получим

$$\mu_1 = \mu\left(1 + \frac{P_3 - P_2}{P_2 - P_1}\right) = 58 \text{ г/моль}$$

3. Три металлических сферы с радиусами R, $2R$ и $3R$, имеющие общий центр, заряжены зарядами $2Q$, $-Q$, Q (см. рисунок). Найти разность потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_Q - \varphi_{-Q}$ между сферой с зарядом Q и сферой с зарядом $-Q$.



Решение. Потенциалы средней и внешней сферы определяются соотношениями

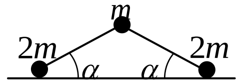
$$\varphi_{-Q} = \frac{k2Q}{2R} + \frac{k(-Q)}{2R} + \frac{kQ}{3R} = \frac{5kQ}{6R},\; \varphi_Q = \frac{k2Q}{3R} + \frac{k(-Q)}{3R} + \frac{kQ}{3R} = \frac{2kQ}{3R}$$

Отсюда находим

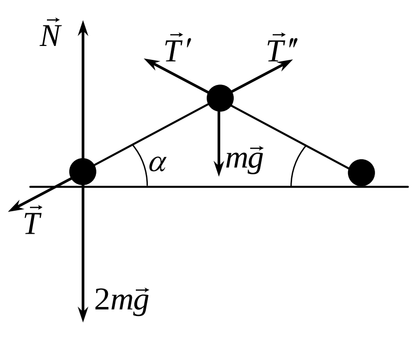
$$\Delta\varphi = \varphi_Q - \varphi_{-Q} = \frac{2kQ}{3R} - \frac{5kQ}{6R} = -\frac{kQ}{6R}$$

(k - постоянная закона Кулона).

4. Три маленьких шарика с массами $2m$, m и $2m$ соединены шарнирно одинаковыми невесомыми стержнями. Шарики поставили на гладкий горизонтальный пол так, что углы между стержнями и поверхностью равны α (см. рисунок). Шарики отпускают. Найти ускорения шариков сразу после этого. Трение отсутствует.



Решение. Силы, действующие на центральный и один из боковых шариков, показаны на рисунке (здесь $\vec{T}$, $\vec{T}'$ и $\vec{T}''$ - силы натяжения стержней, которые из-за симметрии задачи и невесомости стержней имеют одинаковые модули). Поэтому второй закон Ньютона для бокового и верхнего шарика в проекциях на горизонтальное направление для бокового шарика и на вертикальное – для



центрального, дает

$$\begin{aligned} 2ma_1 &= T\cos\alpha \\ ma_2 &= mg - 2T\sin\alpha \end{aligned} \qquad (*)$$

где a_1 и a_2 - ускорения бокового и центрального шариков соответственно.

Найдем связь между ускорениями шариков. За небольшое время Δt после начала движения (пока расположение стержней практически не изменяется) шарики приобретут скорости

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1\Delta t \\ v_2 &= a_2\Delta t \end{aligned} \qquad (**)$$

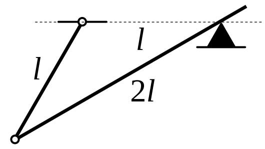
А поскольку стержни несжимаемые, проекции скоростей шариков на направление стержня одинаковы. Поэтому $v_1\cos\alpha = v_2\sin\alpha$, а из формулы (**) заключаем, что такая же связь будет и между ускорениями

$$a_1\cos\alpha = a_2\sin\alpha \qquad (***)$$

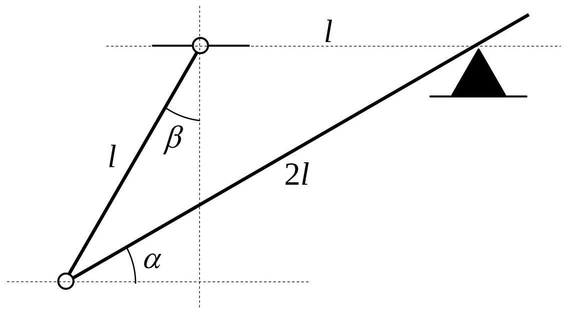
Решая систему уравнений (*), (***), получим

$$a_1 = \frac{g\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha},\ a_2 = \frac{g\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha}$$

5. Стержни, имеющие длины l и $2l$ и массы m и $2m$ соответственно, соединены шарниром. Короткий стержень подвешен шарнирно к потолку, а длинный опирается на точечную опору, расположенную на расстоянии l от точки крепления короткого стержня к потолку на одной с ней горизонтали. Найти угол, который составляет длинный стержень с горизонталью в равновесии. Трением пренебречь.



Решение. Проще всего положение равновесия системы стержней искать не из уравнений сил и моментов, а из условия минимума потенциальной энергии системы стержней.



Пусть, угол наклона длинного стержня к горизонтали равен α. Из равнобедренности треугольника, образованного стержнями и отрезком, соединяющем шарнир и опору, следует, что угол наклона короткого стержня к вертикали равен

$$\beta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha .$$

Потенциальную энергию системы стержней найдем как сумму потенциальных энергий каждого стержня, а последние – как потенциальные энергии материальных точек массой m и $2m$, расположенных в центрах масс стержней (т.е. посередине). Начало отсчета потенциальной энергии выберем в точке шарнира, к которому подвешен короткий стержень. Тогда потенциальная энергия короткого стержня есть

$$\Pi_1 = -mg\frac{l}{2}\cos\beta = -mg\frac{l}{2}\sin 2\alpha$$

Середина второго стержня находится ниже шарнира, к которому крепится короткий стержень, на расстоянии $l\cos\beta - l\sin\alpha$. Поэтому потенциальная энергия длинного стержня равна

$$\Pi_2 = -2mgl\left(\cos\beta - \sin\alpha\right) = -2mgl\left(\sin 2\alpha - \sin\alpha\right)$$

Отсюда находим потенциальную энергию системы стержней

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -\frac{5}{2}mgl\sin 2\alpha + 2mgl\sin\alpha$$

Для нахождения минимума дифференцируем и приравниваем производную к нулю

$$\Pi' = -5mgl\cos 2\alpha + 2mgl\cos\alpha = 0$$

Раскрывая косинус двойного угла и используя основное тригонометрическое тождество, получим квадратное уравнение относительно $\sin\alpha$

$$10\cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 5 = 0$$

Отсюда

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1+\sqrt{51}}{10}\right)$$

(второй корень квадратного уравнения является отрицательным).