Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
математика, 10 класс
2017-2018 учебный год

1. Может ли соотношение $x_{n+2} \cdot x_{n+1} = x_{n+1} \cdot x_n - 2,\ \ x_1 = 2, x_2 = 2017$ определять члены последовательности x_n для всех n? Найти n, для которого $x_n = 0$.

2. Найти наибольшее значение выражения $\sin x + \sin y + \sin z$, если x, y и z - неотрицательные числа, для которых $x + y + z = \dfrac{3\pi}{4}$.

3. При каких целых k выражение $k \cdot \left(k^2 - 1\right)\left(k^2 - 9\right)$ делится на 1680?

4. Найти числа x, являющиеся решениями уравнения $|x - a| + |x - 2a + 3| = 1$ хотя бы при одном значении $a \in [3;4]$.

5. Длины сторон параллелограмма равны 3 и 2. Биссектрисы всех его внутренних углов ограничивают на плоскости многоугольник. Найти отношение его площади к площади параллелограмма.

Решения

Вариант 1

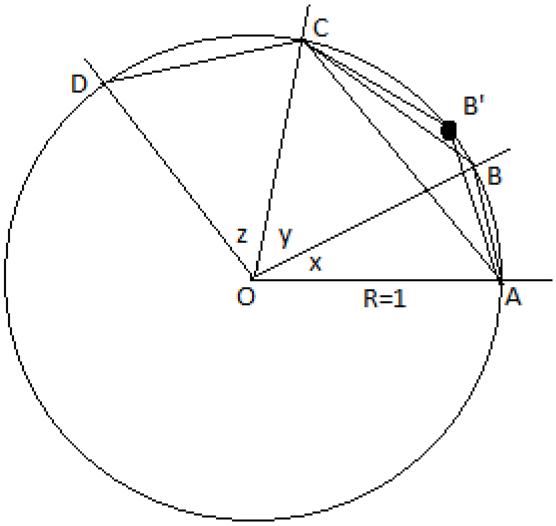
Задача 1 Ответ: 1) не может; 2) $n = 2019$

Решение

Обозначим $y_n = x_{n+1} \cdot x_n$. Тогда $y_{n+1} = x_{n+2} \cdot x_{n+1}$, $y_{n+1} - y_n = -2$ и последовательность y_n – арифметическая прогрессия со знаменателем $d = -2$ и $y_1 = x_2 \cdot x_1 = 2017 \cdot 2 = 4034$, $y_n = y_1 + d(n-1) = 4034 - 2(n-1)$. Если $y_n \neq 0$, то $x_n \neq 0$, $x_{n+1} \neq 0$ и $x_{n+1} = \dfrac{y_n}{x_n}$, $x_n \neq 0$. Значение $y_n = 0$ достигается при $n = 2018$. Тогда $x_{2018} \neq 0$, а $x_{2019} = 0$. Последующие члены последовательности x_n, $n \geq 2020$ не определяются рекуррентным соотношением.

Задача 2 Ответ: $(\sin x + \sin y + \sin z)_{\max} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ достигается при $x = y = z = \dfrac{\pi}{4}$

Решение варианта 1.1



Радиус окружности 1. $\dfrac{1}{2}(\sin x + \sin y + \sin z) = S_{OABCD} \to \max$

Пусть $x, y, z -$ искомые числа. Докажем, что $x = y$. Если $x \neq y$, то для $B' -$ середины дуги AC - площадь $S_{AB'C} > S_{ABC}$, поскольку треугольник $AB'C$ имеет большую высоту, чем треугольник ABC. Тогда $S_{OAB'CD} > S_{OABCD}$ и тогда при $x, y, z -$ не достигается максимум. Аналогично доказывается, что в точке максимума $x = z$. Если $x = y = z = \dfrac{\pi}{4}$, то $(\sin x + \sin y + \sin z)_{\max} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Задача 3 Ответ:

$k = 2m+1,\ m \in Z,\ m \neq 7t+2,\ m \neq 7t+4, t \in Z$

$k = 16m, m \in Z,\ m \neq 7t \pm 1, t \in Z$

Решение варианта 1.

Разложим число 1680 на простые множители: $1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

1. Выражение делится на 3 при любых k:

   $A = (k-3)(k-1)k(k+1)(k+3)$. Если $k = 3n$, то делятся первый, третий и пятый сомножители. Если $k = 3n+1$, то делится третий сомножитель. Если $k = 3n+2$, то делится четвертый сомножитель.
2. Выражение делится на 5 при любых k:

Если $k = 5n$, то делится третий. Если $k = 5n+1$, то делится второй. Если $k = 5n+2$, то делится пятый. Если $k = 5n+3$, то делится первый. Наконец, если $k = 5n+4$, то делится четвертый.

3. Выражение делится на 2^4 при нечетных $k = 2m+1, m \in Z$ и $k = 16n, n \in Z$.

   Если $k = 2m$, то в выражении $A = (2m-3)(2m-1)2m(2m+1)(2m+3)$ все сомножители, кроме третьего, нечетные, поэтому для делимости на 16 необходимо, чтобы $m = 8n$.

Если $k=2m+1,\ m\in Z$, то $A=(2m-2)2m(2m+1)(2m+2)(2m+4)=2^4(m-1)m(2m+1)(m+1)(m+2)$ и выражение делится на 16 при любых m.

4. Выражение делится на 7 при $k\neq 7n+2$ и $k\neq 7n+5,\ \ n\in Z$.

Если $k=7n$, то в выражении третий сомножитель делится на 7. Если $k=7n+1$, то второй делится на 7. Если $k=7n+2$, то ни один из сомножителей не делится на 7. Если $k=7n+3$, то первый делится на 7. Если $k=7n+4$, то пятый делится на 7. Если $k=7n+5$, то ни один из сомножителей не делится на 7. Наконец, если $k=7n+6$, то четвертый делится на 7.

5. Решение задачи для четных k.

Если $k=16m,\ m\in Z$ и $k=7n+2$, то $16m-7n=2\rightarrow\begin{cases}m=1+7t\\ n=2+16t\end{cases}$, т.е. $k=16m$ является решением, если $m\neq 7t+1,\ t\in Z$. Если $k=16m$ и $k=7n+5$, то $16m-7n=5\rightarrow\begin{cases}m=-1+7t\\ n=-3+16t\end{cases}$ т.е. $k=16m$ является решением, если $m\neq 7t-1,\ t\in Z$.

6. Решение задачи для нечетных k.

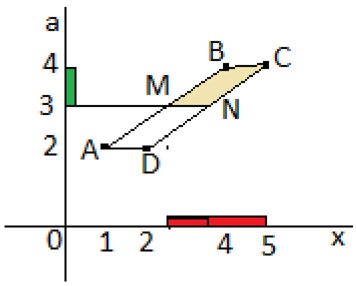
Если $k=2m+1,\ m\in Z$ и $k=7n+2$, то $2m-7n=1\rightarrow\begin{cases}m=4+7t\\ n=1+2t\end{cases}$, т.е. $k=2m+1,\ m\in Z$ является решением, если $m\neq 7t+4,\ t\in Z$.

Если $k=2m+1,\ m\in Z$ и $k=7n+5$, то $2m-7n=4\rightarrow\begin{cases}m=2+7t\\ n=2t\end{cases}$, т.е. $k=2m+1,\ m\in Z$ является решением, если $m\neq 7t+2,\ t\in Z$.

Задача 4 Ответ: $x\in\left[\frac{5}{2};5\right]$

Решение

Множеством точек на плоскости с координатами $(x;a)$, удовлетворяющими уравнению $|x-a|+|x-2a+3|=1$, является параллелограмм $ABCD$, изображённый на рис.



Модули, раскрытые по правилу $(++)$, приводят к уравнению $2x-3a+2=0$ прямой DC.

Модули, раскрытые по правилу $(--)$, приводят к уравнению $2x-3a+4=0$ прямой AB.

Модули, раскрытые по правилу $(-+)$, приводят к уравнению $a=2$ прямой AD.

Модули, раскрытые по правилу $(+-)$, приводят к уравнению $a=4$ прямой BC.

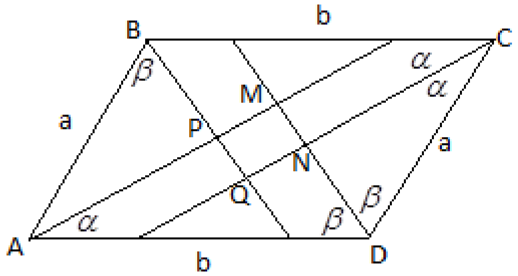
Координаты вершин параллелограмма $A(1;2),\ B(4;4),\ C(5;4),\ D(2;2)$.

Прямая $a=3$ пересекает параллелограмм в точках M и N с координатами $M\left(\frac{5}{2};3\right),\ N\left(\frac{7}{2};3\right)$.

Для $x\in\left[\frac{5}{2};5\right]$ найдется хотя бы одно значение $a\in[3;4]$, при которых точка $P(x;a)$ принадлежит параллелограмму, т.е. решением задачи является отрезок $x\in\left[\frac{5}{2};5\right]$.

Задача 5 Ответ: $\dfrac{(a-b)^2}{2ab} = 1:12$

Решение:



На рис. изображен параллелограмм $ABCD$ с острым углом 2α и четырехугольник $MNPQ$, образованный биссектрисами внутренних углов. Поскольку $\alpha+\beta=90^0$ четырехугольник $MNPQ$ - прямоугольник. Вычислим его стороны.

$$MN = DM - DN = b\sin\alpha - a\sin\alpha = (b-a)\sin\alpha$$
$$QN = CQ - CN = b\cos\alpha - a\cos\alpha = (b-a)\cos\alpha$$

Тогда

$$S_{MNPQ} = MN\cdot QN = (b-a)^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{(b-a)^2}{2}\sin 2\alpha$$
$$S_{ABCD} = a\cdot b\cdot\sin 2\alpha$$
$$S_{MNPQ} : S_{ABCD} = \frac{(b-a)^2}{2ab}$$

В варианте 1 $a=2,\ b=3$ $S_{MNPQ} : S_{ABCD} = 1:12$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: 1) не может; 2) $n = 2020$

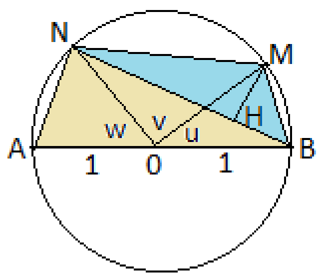
Задача 2 Ответ: $(\cos x+\cos y+\cos z)_{\min} = 2$ достигается при $x=\dfrac{\pi}{2}, y=z=0$

Решение

Выражение $\cos x+\cos y+\cos z = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right) = \sin u+\sin v+\sin w = 2\cdot S_{ANMB}$,

где $u=\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\ge 0,\ v=\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)\ge 0,\ w=\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)\ge 0,\ u+v+w=\dfrac{\pi}{2}$

Покажем, что тройка $(x;y;z)$, $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}, x>0, y>0, z>0$ не может быть искомой для минимума. Действительно, при этих условиях $u>0, v>0, w>0$ и площадь четырехугольника $ANMB$ (см рис.) может быть уменьшена



движением точки M по дуге $\overset{\smile}{NB}$ и уменьшением высоты MH. Следовательно, для искомой тройки $(x;y;z)$, реализующей минимум, по крайней мере одно из чисел x, y, z равно нулю. Без ограничения общности, полагаем, что $z=0$.

Тогда выражение

$$\cos x+\cos y+\cos z = 1+\cos x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 1+\sin x+\cos x = 1+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right), x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

принимает минимальное значение при $x=0$ или $x=\frac{\pi}{2}$, равное $(\cos x+\cos y+\cos z)_{\min}=2$

Задача 3 Ответ:
При четных $k=2m,\ \ m\neq 7t\pm 3,\ \ t\in Z$. При нечетных $k=2m+1, m\neq 7t, m\neq 7t+6$
Решение
$168=2^3\cdot 3\cdot 7$
Случай 1. $k=2m$

$$(k-3)(k-2)k(k+2)(k+3)=(2m-3)(2m-2)2m(2m+2)(2m+3)=$$
$$=2^3(m-1)m(m+1)(2m-3)(2m+3)$$

Выражение делится на 2^3 и 3 при любом $m\in Z$. Его деление на 7 возможно при любых m , кроме m вида $m=7t+3$ и $m=7t+4$.
Случай 2. $k=2m+1$

$$(k-3)(k-2)k(k+2)(k+3)=(2m-2)(2m-1)(2m+1)(2m+3)(2m+4)=$$
$$=2^2(m-1)(m+2)(2m-1)(2m+1)(2m+3)$$

Поскольку одно из чисел $(m-1),(m+2)$ четное при любом m , выражение всегда делится на 2^3. Произведение $(2m-1)(2m+1)(2m+3)$ делится на 3 при любых m . Выражение делится на 7 для всех m , кроме $m=7t$ и $m=7t+6, t\in Z$

Задача 4 Ответ: $x\in\left[\frac{3}{2};4\right]$

Задача 5 Ответ: $S=\pi(a+b)^2/4=\frac{49\pi}{4}$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: 1) не может; 2) $n=1010$

Задача 2 Ответ: $(\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z)_{\min}=\frac{3\left(2-\sqrt{3}\right)}{4}$ достигается при $x=y=z=\frac{\pi}{12}$

Решение

$$\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z\right)\to\min \text{ при } 2x+2y+2z=\frac{\pi}{2}$$

Это равносильно тому, что $\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z\to\max$ при $2x+2y+2z=\frac{\pi}{2}$.

$$\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2z\right)=\sin u+\sin v+\sin w\to\max$$

при условии $u+v+w=\pi$. Следуя задаче варианта 1 максимум достигается при $u=v=w=\frac{\pi}{3}$ и равен $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$(\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z)_{\min}=\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\left(2-\sqrt{3}\right)}{4}$$

Задача 3 Ответ: для всех $k\neq 7t\pm 3,\ \ t\in Z$

Решение. $420=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$

Выражение $(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)$ представляет собой произведение пяти последовательных целых чисел, поэтому оно делится на 4, 3 и 5 при любых k . Его деление на 7 возможно при любых k , кроме k вида $k=7t+3, k=7t+4, t\in Z$.

Задача 4 Ответ: $x\in\left[-\frac{7}{2};-\frac{1}{4}\right]$

Задача 5 Ответ: $\dfrac{(a+b)^2}{2ab}=81:40$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: 1) не может; 2) $n=1211$

Задача 2 Ответ: $\left(\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z\right)_{\min}=\dfrac{5}{2}$ достигается при $x=\dfrac{\pi}{4}, y=z=0$

Решение

$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z\right)\to\min$ при условии $x+y+z=\dfrac{\pi}{4}$.

Последнее равносильно условию: $\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z\to\min$ при $2x+2y+2z=\dfrac{\pi}{2}$

Согласно условию варианта 2

$\left(\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z\right)_{\min}=2$, поэтому $\left(\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z\right)_{\min}=\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}$

Задача 3 Ответ: При четных k вида $k=4n+2, n\neq 5t\pm 2, t\in Z$. При нечетных $k=2m+1, m\neq 5t+2, t\in Z$

Решение. $120=2^3\cdot 3\cdot 5$

Выражение $(k-3)(k-2)(k-1)(k+2)(k+3)$ содержит три последовательных целых числа, поэтому всегда делится на 3.

Случай 1. $k=2m$ – четное число.

$(k-3)(k-2)(k-1)(k+2)(k+3)=(2m-3)(2m-2)(2m-1)(2m+2)(2m+3)=$

$=2^2(m-1)(m+1)(2m-3)(2m-1)(2m+3)$

При $m=2n$ –четном выражение не делится на 8, поэтому $m=2n+1$ – может быть только нечетным числом.

$2^2(m-1)(m+1)(2m-3)(2m-1)(2m+3)=2^2\cdot 2n(2n+2)(4n-1)(4n+1)(4n+5)=$

$=2^4 n(n+1)(4n-1)(4n+1)(4n+5)$

Оно делится на 2^3 при любых n. Его делимость на 5 возможна при любых n, кроме n вида $n=5t+2$ и $n=5t+3$

Случай 2. $k=2m+1$ – нечетное число

$(k-3)(k-2)(k-1)(k+2)(k+3)=(2m-2)(2m-1)\cdot 2m\cdot(2m+3)(2m+2)=$

$=2^3(m-1)m(m+1)(2m-1)(2m+3)$

Выражение делится на 5 при всех m, кроме m вида $m=5t+2, t\in Z$

Задача 4 Ответ: $x\in\left[-\dfrac{5}{2};1\right]$

Задача 5 Ответ: $2\left(a-b\right)^2=8$