Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
математика, 11 класс, комплект 1
2017-2018 учебный год

1. Найти x, при которых числа $\log_2(6\sin x), \log_{2\cos x}(6\sin x)$ и $\log_{2\cos x} 4$ могут быть тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

2. Найти решения $(x;y)$ системы $\begin{cases} \sin(2x+y)=-1 \\ \cos(x-y)=1 \end{cases}$ в прямоугольнике $-\pi \le x \le \pi/2, -\pi/2 \le y \le \pi/2$.

3. Отрезок $[A;B]$ длины 5 двигается на координатной плоскости так, что его концы лежат на параболе $y=2x^2$. Точка M - середина отрезка $[A;B]$. Найти минимально возможное значение расстояния точки M до оси абсцисс, а также абсциссу точки M, при которой оно достигается.

4. Код замка состоит из трех цифр от 0 до 9. Замок открывается, если сумма цифр кода делится на 3. Найти вероятность того, что случайно набранный код откроет замок.

5. При каких a система уравнений $\begin{cases} \left|x\cos a + y\sin a - 3/\sqrt{2}\right| + \left|y\cos a - x\sin a\right| = 3/\sqrt{2} \\ |x-y|+|x+y|=8 \end{cases}$ имеет единственное решение?

6. В правильной четырехугольной пирамиде противоположные боковые грани перпендикулярны. Высота пирамиды равна h. Найти радиус шара, касающегося ребер основания и боковых ребер пирамиды или их продолжений.

Решения

Вариант 1

Задача 1 Ответ: $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$

Решение

Условие прогрессии: $\log_2(6\sin x)\cdot\log_{2\cos x}4=\left(\log_{2\cos x}(6\sin x)\right)^2$

Преобразование:

$$2\log_{(2\cos x)}(6\sin x)=\left(\log_{(2\cos x)}(6\sin x)\right)^2\rightarrow\log_{(2\cos x)}(6\sin x)\cdot\left(2-\log_{(2\cos x)}(6\sin x)\right)=0$$

Если $\log_{(2\cos x)}(6\sin x)=0$, то все члены прогрессии нулевые.

Случай $\log_{(2\cos x)}(6\sin x)\neq 0$.

$$\log_{(2\cos x)}(6\sin x)=2\rightarrow\begin{cases}\cos x>0,\ \cos x\neq 1/2\\ 6\sin x=4\cos^2 x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\cos x>0,\ \cos x\neq 1/2\\ 2\sin^2 x+3\sin x-2=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x>0\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$$

Задача 2 Ответ $\begin{cases}x_1=-\pi/6\\ y_1=-\pi/6\end{cases},\begin{cases}x_2=\pi/2\\ y_2=\pi/2\end{cases}$

Решение.

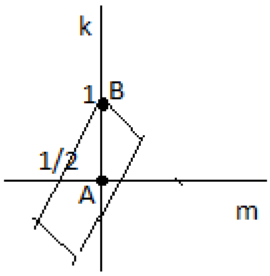
Переход к системе с целочисленными параметрами m и k: $\begin{cases}2x+y=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x-y=2\pi m\end{cases}$

Решение системы $\begin{cases}x=-\pi/6+2\pi(m+k)/3\\ y=-\pi/6+2\pi(k-2m)/3\end{cases}$.

Ограничение прямоугольника: $-\pi\leq x\leq\pi/2\rightarrow -5/4\leq m+k\leq 1$ (*)

$-\pi/2\leq y\leq\pi/2\rightarrow -1/2\leq k+2m\leq 1$ (**)

На плоскости параметров $(m;k)$ неравенства (*) и (**) ограничивают параллелограмм,



,

внутри которого только две точки $A(0;0)$ и $B(0,1)$ с целочисленными координатами.

Им соответствуют решения $\begin{cases}x_1=-\pi/6\\ y_1=-\pi/6\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2=\pi/2\\ y_2=\pi/2\end{cases}$.

Задача 3 Ответ: 1) $d_{min}=\dfrac{19}{8}$ 2) $x_{\min}=\pm\dfrac{3}{4}$

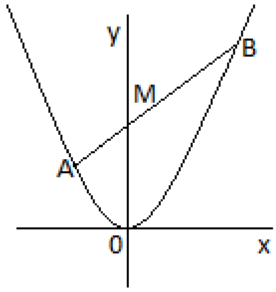
Вариант 0

Отрезок $[A;B]$ длины l двигается на координатной плоскости так, что его концы лежат на параболе $y=kx^2$. Точка M - середина отрезка $[A;B]$. Найти минимально возможное расстояние точки M до оси абсцисс, а также абсциссу точки M, при которой оно достигается.

Ответ: При $|k|l \geq 1$ $d_{\min} = \frac{l}{2} - \frac{1}{4|k|}$ для $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{|k|l-1}}{2|k|}$

При $|k|l < 1$, $d_{\min} = \frac{|k|l^2}{4}$ для $x = 0$.

Решение.



$$A(x_1; y_1),\ B(x_2; y_2),\ M(x; y) = M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)\ y_1 = kx_1^2,\ y_2 = kx_2^2,\ (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 = l^2,$$

$$(x_2-x_1)^2 + (kx_2^2 - kx_1^2)^2 = l^2 \to (x_2-x_1)^2 + k^2(x_2-x_1)^2(x_2+x_1)^2 = l^2$$

$$(x_2-x_1)^2\left(k^2(x_2+x_1)^2+1\right) = l^2 \to (x_1^2+x_2^2-2x_1x_2)(4k^2x^2+1) = l^2$$

$$\left(\frac{y_1+y_2}{k} - 2x_1x_2\right)(4k^2x^2+1) = l^2 \to \frac{2y}{k} = 2x_1x_2 + \frac{l^2}{(4k^2x^2+1)}(*)$$

Выразим $2x_1x_2$ из равенства $4x^2 = (x_1+x_2)^2 = \frac{2y}{k} + 2x_1x_2 \to 2x_1x_2 = 4x^2 - \frac{2y}{k}$. Подставляя его в (*), получим $\frac{4y}{k} = 4x^2 + \frac{l^2}{(4k^2x^2+1)} \to y = kx^2 + \frac{k\cdot l^2}{4(4k^2x^2+1)}(**)$. Это ордината точки M.

Преобразуем выражение (**): $|y| = |k|x^2 + \frac{|k|\cdot l^2}{4(4k^2x^2+1)} = \frac{1}{4|k|}\left(4k^2x^2+1\right) + \frac{|k|\cdot l^2}{4(4k^2x^2+1)} - \frac{1}{4|k|}$

Обозначим через $t = \left(4k^2x^2+1\right) \geq 1$. Тогда расстояние точки M до оси абсцисс равно $|y| = \frac{t}{4|k|} + \frac{|k|l^2}{4t} - \frac{1}{4|k|}$. Поскольку $a = \frac{t}{4|k|} > 0,\ b = \frac{|k|l^2}{4t} > 0$, то по неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$|y| + \frac{1}{4|k|} = a + b \geq 2\sqrt{ab} = \frac{l}{2}$. Равенство достигается при $a = b \to \frac{t}{4|k|} = \frac{|k|l^2}{4t} \to t_{\text{крит}} = |k|\cdot l$.

Если $|k|l \geq 1$, то минимальное расстояние равно $|y_{\min}| = \frac{l}{2} - \frac{1}{4|k|}$ достигается при

$$t = |k|l \to 4k^2x^2 + 1 = |k|l \to x^2 = \frac{|k|\cdot l - 1}{4k^2} \to x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{|k|\cdot l-1}}{2|k|}.$$

Если $|k|l < 1$, то с учетом роста функции $|y|$ на полуоси $t \in \left[|k|l; +\infty\right]$ и принимает минимальное значение $|y_{\min}| = \frac{|k|l^2}{4}$ с учетом ограничения $t \geq 1$ при $t = 1$ для $x = 0$.

Задача 4 Ответ: $P(A) = 0,334$, $m_3 = 334$, $n = 10^3$

Решение

Пусть x, y и $z -$ первая, вторая и третья цифры кода. Количество решений уравнения $x + y = t$, где $t -$ целое число на интервале $0 \leq t \leq 18$ обозначим через $p(t)$. Заметим, что

$$p(t)=\begin{cases} t+1, t\in[0;9] \\ 19-t, t\in[10;18] \end{cases}$$

С помощью этой формулы легко заполнить таблицу числа различных решений уравнения $x+y=3k-z$ для допустимых значений $k=0,1,...,9$ и $z=0,1,...,9$

K \ z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	4	3	2	1						
2	7	6	5	4	3	2	1			
3	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
4	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4
5	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7
6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7				1	2	3	4	5	6	7
8							1	2	3	4
9										1

Пустые клетки таблицы можно заполнить нулями (решений уравнение не имеет). Сумма чисел по всем клеткам таблицы равна количеству кодов, сумма цифр которых делится на 3. Подсчет этой суммы осуществляется с учетом симметрии таблицы (сумма чисел в первых пяти строках равна сумме чисел в последних пяти), а также формулой суммы членов арифметической прогрессии. Число благоприятных кодов $m_3=334$. Общее число кодов равно $n_3=10^3$. Тогда

$$P_3(A)=\frac{334}{1000}=0,334.$$

Задача 5 Ответ: $a=\pm\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$ или $a=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\pi k}{2}, a=\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$

Решение

Множество точек на плоскости с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими второму уравнению системы, является границей квадрата с центром в начале координат и сторонами, параллельными координатным осям рис 1. Множество точек, координаты которых удовлетворяют второму уравнению системы, является границей квадрата $ABOD$ рис 2 с диагональю длины $3\sqrt{2}$. Координаты его вершин

$$A(3\sqrt{2}\cos\alpha;3\sqrt{2}\sin\alpha),\ B\left(3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right);3\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right),\ D\left(3\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right);3\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right);O(0;0)$$

С ростом a «малый» квадрат (со стороной 3) вращается относительно начала координат. На рис 2 отмечено его положение при $\alpha=\alpha_1$, когда вершина A находится на стороне «большого» квадрата (со стороной 8).

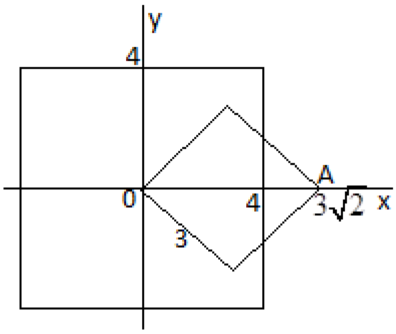


Рис 1

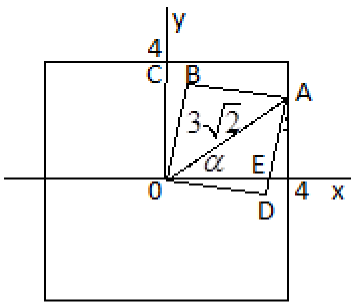


Рис 2

$$3\sqrt{2}\cos a_1=4\rightarrow\cos a_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}\rightarrow a_1=\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Все остальные вершины «малого» квадрата при $a=a_1$ находятся внутри большого:

$$\mathrm{R}COB=\frac{\pi}{4}-a_1\rightarrow 3\cos\left(\frac{\pi}{4}-a_1\right)=3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos a_1+\sin a_1)=3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{4+\sqrt{2}}{2}<4$$

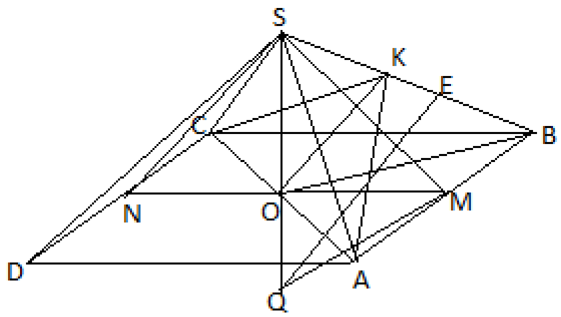
$$\mathrm{R}EOD=\frac{\pi}{4}-a_1\rightarrow EO=3/\cos\left(\frac{\pi}{4}-a_1\right)=\frac{18}{4+\sqrt{2}}<4$$

и система имеет единственное решение. По симметрии, при увеличении a точка A появится на другой стороне большого квадрата при $a = a_2 = \frac{\pi}{2} - a_1 = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$, когда система снова имеет единственное решение. При $a \in (a_1; a_2)$ система решений не имеет. При увеличении a на число кратное $\frac{\pi}{2}$ картина повторяется. Итак, система имеет единственное решение при $a = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi k}{2}$, $a = \arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$ или в другой форме записи

$$a = \pm a_1 + \frac{\pi k}{2} = \pm\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi k}{2}.$$

Задача 6 Ответ: $R_{1,2} = 2h\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$

Решение.



Обозначения:

$SO = h$, $OM = a$, $N, M -$ середины сторон основания, $\mathrm{R}MSN = 90^0 \rightarrow h = a, AB = 2a = 2h$,

$Q -$ центр искомого шара; OK - перпендикуляр к ребру SB; QE - параллельно OK; $OQ = x$;

$OA = h\sqrt{2} = SM$, $SB = h\sqrt{3}$, $\mathrm{R}SBO = \alpha = \mathrm{R}SOK$; $\mathrm{R}AKO = \varphi$

Из площади треугольника SAB:

$$2\sqrt{2}h^2 = AK \cdot h\sqrt{3} \rightarrow AK = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}h, \ \sin\varphi = \frac{OA}{AK} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi = 60^0$$

Из прямоугольного треугольника SOK:

$$OK^2 = \frac{8}{3}h^2 - 2h^2 = \frac{2}{3}h^2 \rightarrow \cos\alpha = \frac{OK}{OS} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$QS = h + x$, $QE = QM = R -$ радиус искомого шара. $\mathrm{R}SQE = \alpha$

Уравнение для $R: (h+x)\cos\alpha = \sqrt{h^2 + x^2} \rightarrow \frac{2}{3}(h+x)^2 = h^2 + x^2 \rightarrow x^2 - 4hx + h^2 = 0 \rightarrow x = h\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$

Тогда $R^2 = x^2 + h^2 = 4xh = 4h^2\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \rightarrow R_{1,2} = 2h\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ (касание ребер или их продолжений)

Вариант 2

Задача 1 Ответ: $x \in \varnothing$

Задача 2 Ответ $\begin{cases} x_1 = \pi \\ y_1 = \pi/2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = \pi/2 \end{cases}$

Задача 3 Ответ: 1) $d_{min} = \frac{19}{20}$ 2) $x_{\min} = \pm\frac{3}{10}$

Задача 4 Ответ: $m_4 = 254,\ n_4 = 10^3, P(A) = 0,254$

K \ z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	5	4	3	2	1					
2	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
3	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4
4	3	4	5	6	7	8	9	10	9	8
5			1	2	3	4	5	6	7	8
6						1	2	3	4	5

Задача 5 Ответ:

$a \in \left(\arccos\frac{3}{4} + \pi \right.$

Задача 6 Ответ:

$R = \frac{\sqrt{3}}{2}b$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Задача 2 Ответ $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} \\ y = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

Задача 3 Ответ: 1) $d_{min} = \frac{51}{52}$ 2) $x_{\min} = \pm\frac{5}{26}$

Задача 4 Ответ: $m_5 = 200,\ n_5 = 10^3,\ P(A) = 0,2$

K \ z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	6	5	4	3	2	1				
2	9	10	9	8	7	6	5	4	3	2
3	4	5	6	7	8	9	10	9	8	7
4			1	2	3	4	5	6	7	8
5								1	2	3

Задача 5 Ответ:

$a \in \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{6} \right.$

Задача 6

Ответ: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Задача 2 Ответ $\begin{cases} x = -\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases};,$

Задача 3 Ответ: 1) $d_{min} = \dfrac{99}{20}$ 2) $x_{\min} = \pm\dfrac{7}{10}$

Задача 4 Ответ: $m_6 = 167,\ n_6 = 10^3, P(A) = 0{,}167$

K \ z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	7	6	5	4	3	2	1			
2	7	8	9	10	9	8	7	6	5	4
3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4							1	2	3	4

Задача 5
Ответ:
$a = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in$

Задача 6
Ответ: $V = \dfrac{4\left(7 + 5\sqrt{2}\right)}{3} r^3$