Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
математика, 11 класс, комплект 2
2017-2018 учебный год

1. Для каждого допустимого a найти наименьшее решение уравнения $2\log_a^2 x+\log_a x^3-3=\log_x a^2$.

2. Найти наименьшую длину отрезка числовой оси, содержащего три различных решения уравнения $\cos 2x-\sin 2x-ctg 2x\cdot \sin x+\sin x=0$.

3. Решить уравнение $\{2\sin x\}+[\cos 2x]=0$, где $[a]$ – целая часть числа a - наибольшее целое число не превосходящее a, $\{a\}$ – дробная часть числа a : $\{a\}=a-[a]$.

4. Робот может совершать равные по длине шаги по дорожке вперед и назад, при этом выбор направления движения каждого шага является случайным и равновозможным. Робот сделал 10 шагов и остановился. Найти вероятность того, что он окажется на расстоянии более двух шагов от начала движения.

5. При каких a уравнение $4\sin^2 x+4a\cos x-5a=0$ имеет решения на отрезке $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$?

6. Плоскости P и Q, параллельные основанию правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, пересекают ребро SA пирамиды в точках M и N. Длины отрезков SM, SN и SA являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии с знаменателем $q=3$. Найти двугранный угол при основании пирамиды, если известно, что в усеченную пирамиду с плоскостями оснований P и Q можно вписать шар.

Решения

Вариант 1

Задача 1 Ответ: $x_{\min}(a)=\begin{cases} a,\ a\in(0;1) \\ \dfrac{1}{a^2},\ \ a\in(1;+\infty)\end{cases}$

Решение

Преобразование: $a>0, a\neq 1, x>0$

$$2\log_a^2 x+3\log_a x-3=\frac{2}{\log_a x}\to 2\log_a^3 x+3\log_a^2 x-3\log_a x-2=0$$

Замена $t=\log_a x$ приводит к кубическому уравнению $2t^3+3t^2-3t-2=0$, имеющему три корня $t_1=1, t_2=-2, t_3=-\dfrac{1}{2}$. Им соответствуют три решения: $x_1=a,\ x_2=\dfrac{1}{a^2},\ x_3=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

На интервале $a\in(0;1)$ справедливо неравенства $a<\dfrac{1}{\sqrt{a}}<\dfrac{1}{a^2}\to x_{\min}(a)=a$. Аналогично, на полуоси $a\in(1;+\infty)$ выполнено неравенство $\dfrac{1}{a^2}<\dfrac{1}{\sqrt{a}}<a\to x_{\min}(a)=\dfrac{1}{a^2}$

Задача 2 Ответ: $L=\dfrac{\pi}{2}$

Решение

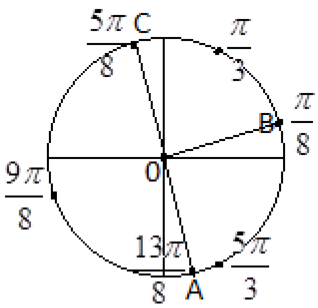
Преобразование:

$$\sin 2x\cdot(ctg 2x-1)-\sin x\cdot(ctg 2x-1)=0\to(ctg 2x-1)(\sin 2x-\sin x)=0\to$$
$$\sin x\cdot(2\cos x-1)\cdot(ctg 2x-1)=0$$

Множество решений уравнения:

$\sin x\neq 0$ (ОДЗ), $\left[\begin{array}{l} ctg 2x=1 \\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}k, k\in Z \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi m, m\in Z\end{array}\right.$

Для удобства изобразим это множество на тригонометрическом круге



Наименьшая дуга секторов, содержащих три решения, соответствует сектору AOB или BOC. Каждый из этих секторов имеет угол $\dfrac{\pi}{2}$ и длину дуги окружности, на которую он опирается, равную так же $\dfrac{\pi}{2}$.

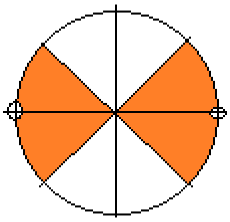
Задача 3 Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$

Решение

Дробная часть числа a может быть целым числом только, если $\{a\}=0$. Тогда

$$\begin{cases}\{2\sin x\}=0 \\ [\cos 2x]=0\end{cases}\to\begin{cases}\sin x=\{0,\pm 1/2,\pm 1\} \\ 0\leq\cos 2x<1\end{cases}$$

Решение неравенства изображено на рис.

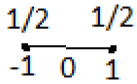


Решением системы является $\sin x = \pm\frac{1}{2} \to x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Задача 4 Ответ: $P(A) = 1 - \frac{C_{10}^{4} + C_{10}^{5} + C_{10}^{6}}{2^{10}} = \frac{11}{32}$

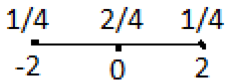
Решение

Если шагов всего один, то робот может остановиться в двух положениях, условно изображенных на рис

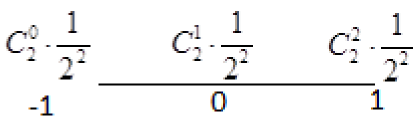


Здесь 0 – начало движения, -1 – шаг назад, 1 – шаг вперед. Вероятность попасть в положения -1 и 1 одинаковая и равна $\frac{1}{2}$.

Если шагов два, то существует три возможных положения робота в конце движения, условно обозначенных на рис



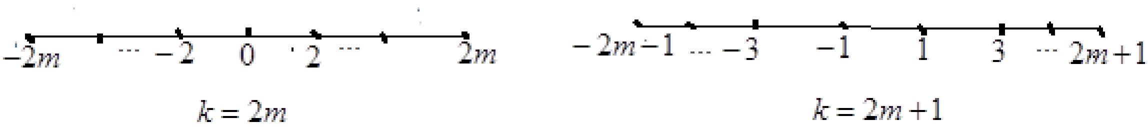
В положение -2 можно попасть из положения -1 после первого шага, совершив шаг назад. Таким образом, вероятность попадания в положение -2 за два шага равна $1/4 = C_2^0 \cdot \frac{1}{2^2}$. В положение 0 можно попасть из положений -1 и 1 после первого шага, совершив шаги вперед и назад соответственно. Тогда вероятность попадания в положение 0 после двух шагов равна $2 \cdot \frac{1}{4} = C_2^1 \cdot \frac{1}{2^2}$. В положение 2 после второго шага возможно попасть только из положения 1, делая один шаг вперед. Вероятность попадания в 2 за два шага равна $1/4 = C_2^2 \cdot \frac{1}{2^2}$.



Далее образование коэффициентов при степенях $1/2$ определяется треугольником Паскаля.

Предположим, что робот сделал до остановки k шагов. Тогда существует $k+1$ возможных положений, в которых он может остановиться. Крайние из них находятся на расстоянии k шагов от начального положения движения. Расстояние между соседними положениями равно двум шагам.

На рис. изображены эти положения для четных и нечетных k.



Для $k = 2m$ вероятность остановки в положении 0 равна $C_k^m \cdot \frac{1}{2^k}$, в положении ± 2 (на расстоянии 2 шага от начала движения) эта вероятность равна $C_k^{m-1} \cdot \frac{1}{2^k}$, в положение ± 4 (на расстоянии 4 шага от начального положения) – $C_k^{m-2} \cdot \frac{1}{2^k}$ и т.д. в положении $\pm 2m$ эта вероятность равна $C_k^0 \cdot \frac{1}{2^k}$. В варианте 1 $m = 5$. Вероятность остановится в положении, отстоящем от начального не более двух шагов, равна $P(\bar{A}) = \frac{1}{2^{10}}\left(C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6\right) = \frac{21}{32}$, а вероятность противоположного события $P(A) = \frac{11}{32}$.

Для $k = 2m+1$ вероятность остановки в положении ± 1 равна $C_k^m \cdot \frac{1}{2^k}$, в положении ± 3 (на расстоянии 3 шага от начала движения) – $C_k^{m-1} \cdot \frac{1}{2^k}$, и т.д. остановка в положении $\pm(2m+1)$ происходит с вероятностью $C_k^0 \cdot \frac{1}{2^k}$.

Задача 5 Ответ: $a \in [0,8;1]$

Решение.

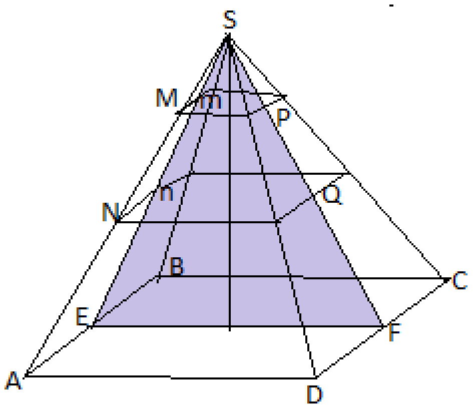
Искомые a принадлежат области значений функции $a = \frac{4\sin^2 x}{5 - 4\cos x} = \frac{4(1-\cos^2 x)}{5-4\cos x}$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$. Замена $t = \cos x$ приводит к задаче нахождения области значений функции $a = \frac{4(1-t^2)}{5-4t}$ на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

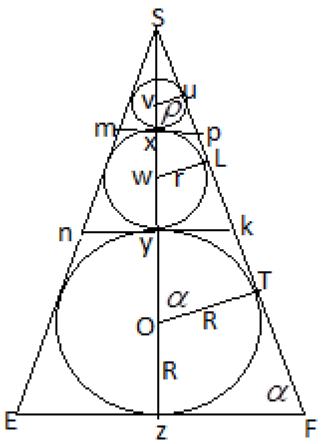
Исследование функции:

Производная $a' = 8\frac{(2t-1)(t-2)}{(5-4t)^2}$ неотрицательная на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, поэтому $a_{\min} = a(0) = \frac{4}{5}$, $a_{\max} = a(0,5) = 1$

Задача 6 Ответ: $\alpha = 60^0$

Решение. В пирамиде проведено осевое сечение, перпендикулярное стороне основания.





По условию $Sn = Sm \cdot q$, $SE = Sn \cdot q = Sm \cdot q^2$. Тогда $\triangle Smp \sim \triangle Snk$ с коэффициентом подобия q и $\triangle Smp \sim \triangle SEF$ с коэффициентом подобия q^2.

По условию, в усеченную пирамиду можно вписать шар, а значит, в трапецию $mnpk$ можно вписать окружность. Так как образом при преобразовании подобия с центром в точке S и коэффициентом подобия q отрезка mp является отрезок nk, а отрезок nk переходит в отрезок EF, то окружность радиуса r с центром в точке w переходит в окружность радиуса $R = r \cdot q$ с центром в точке O, вписанную в трапецию $EnkF$. Аналогично, окружность с центром в точке w является образом окружности радиуса ρ, вписанной в треугольник Smp.

Из подобия треугольников OTS и FzS имеем $(H-R)\cos\alpha = R \to R = \frac{H\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, где $H = Sz$.

Если $Sy = h$, то

$$h + 2R = H = hq \to h(q-1) = 2R = \frac{2H\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2hq\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \to q\left(1 - \frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\right) = 1 \to q = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

По условию, $q = 3 \to \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = 3 \to \cos\alpha = \frac{1}{2} \to \alpha = 60^0$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: $x_{\max}(a)=\begin{cases}\frac{1}{a},\ a\in(0;1)\\ a^2,\ \ a\in(1;+\infty)\end{cases}$

Задача 2 Ответ: $L=\frac{5\pi}{18}$

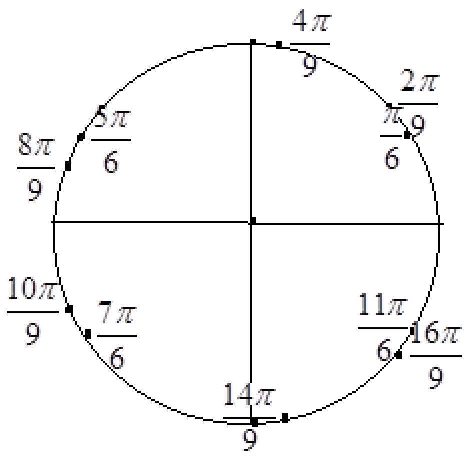
Решение

Преобразование:

$$2\cos 3x\cdot\left(3\sin^2 x-\cos^2 x\right)+4\sin^2 x-1=0\rightarrow 2\cos 3x\cdot\left(4\sin^2 x-1\right)+4\sin^2 x-1=0\rightarrow$$

$$\left(4\sin^2 x-1\right)\left(2\cos 3x+1\right)=0$$

Решения $\left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in Z\\ x=\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi m}{3},\ \ m\in Z\end{array}\right.$



Задача 3 Ответ: $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k, x=\pi k, x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$

Задача 4 Ответ: $P(A)=\frac{C_9^3+C_9^4+C_9^5+C_9^6}{2^9}=\frac{105}{128}$

Задача 5 Ответ: $a\in\left[-1;-\frac{3}{7}\right]$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: $x_{\min}(a)=\begin{cases} a^2,\ a\in(0;1)\\ \frac{1}{\sqrt{a}},\ \ a\in(1;+\infty)\end{cases}$

Задача 2 Ответ: $L=\frac{\pi}{3}$

Решение

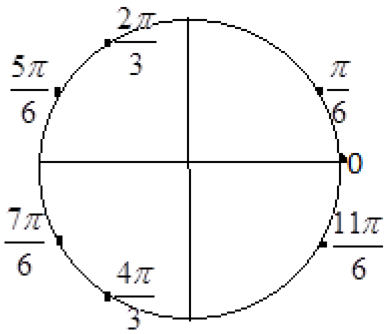
Преобразование:

$$4\sin^2 2x(\cos 3x+3\cos x)-3\left(\cos 3x+3\cos x\right)-(3cosx+1)(4\sin^2 2x-3)=0\rightarrow$$

$$(4\sin^2 2x-3)(\cos 3x+3\cos x)-(3cosx+1)(4\sin^2 2x-3)=0\rightarrow$$

$$(4\sin^2 2x-3)(\cos 3x-1)=0$$

Решения $\left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi k}{3}, k\in Z \\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in Z \end{array}\right.$



Задача 3 Ответ: $x=\frac{\pi k}{2}, x=-\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$

Задача 4 Ответ: $P(A)=\frac{C_8^4}{2^8}=\frac{35}{128}$

Задача 5 Ответ: $a\in\left[\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right]$

Задача 6 Ответ: $V=\frac{a^3\sqrt{5}}{12}$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: $x_{\min}(a)=\begin{cases} \frac{1}{a}, a\in(0;1) \\ a,\ \ a\in(1;+\infty) \end{cases}$

Задача 2 Ответ: $L=\frac{2\pi}{9}$

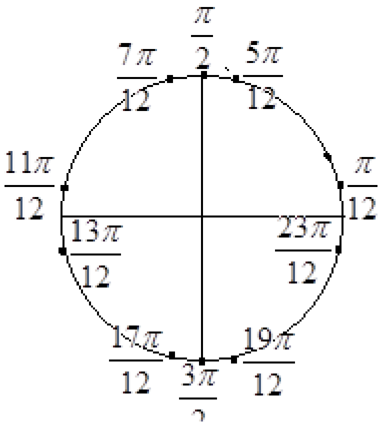
Решение

Преобразование:

$$\cos 2x\left(4\sin^2 3x-1\right)-2\cos 6x+1=0\to\cos 2x\left(4\sin^2 3x-1\right)-2\left(1-2\sin^2 x\right)+1=0\to$$

$$\cos 2x\left(4\sin^2 3x-1\right)+\left(4\sin^2 3x-1\right)=0\to\left(4\sin^2 3x-1\right)\left(\cos 2x+1\right)=0$$

Решения $\left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}, k\in Z \\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z \end{array}\right.$



Задача 3 Ответ: $x = \pm\frac{11\pi}{12} + 2\pi k, x = \pm\frac{7\pi}{12} + 2\pi k, \text{x} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Задача 4 Ответ: Ответ: $P(A) = 1 - \frac{2C_7^3 + 2C_7^2}{2^7} = \frac{1}{8}$

Задача 5 Ответ: $a \in \left[\frac{1}{6}; \frac{2}{3}\right]$

Задача 6 Ответ: $S_{бок} = \frac{7a^2}{5}$