Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
математика, 11 класс, комплект 3
2017-2018 учебный год

1. Члены последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют соотношению $a_{n+1}=2a_n+3,\ \ a_1=a$ для любых n и целом a. При каких a число 637 является членом последовательности?

2. Найти наибольшее значение функции $y=24\pi x/(9\pi^2+16x^2)$ на множестве решений уравнения $\sin x\cdot\cos 2x-2\cos^3 x+\cos 2x-\sin x+2\cos x=1$.

3. Найти натуральное число, делящееся на 225 и имеющее 15 различных делителей.

4. На окружности совершенно случайно взяты три точки A, B и C. Найти вероятность того, что треугольник ABC тупоугольный.

5. При каких a система $\begin{cases}\left(x^2+(y-7)^2-9\right)\left((x-4)^2+(y-3)^2-1\right)=0\\ ax-y-4a-2=0\end{cases}$ имеет четыре решения?

6. Плоскость P пересекает боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках M, N, K соответственно и образует угол 45^0 с боковой гранью SBC. Найти объем пирамиды $SABC$, если произведение ее ребер $SA\cdot SB\cdot SC=5\sqrt{15}$, а пирамида $SMNK$ правильная.

Решения

Вариант 1

Задача 1 Ответ: $a=5\cdot 2^{8-n}-3$ для $n=1,2,\dots 8$

Решение

Найдем общий член последовательности:

$$a_2=2\cdot a+3\to a_3=2(2\cdot a+3)+3=2^2\cdot a+2\cdot 3+3\to a_4=2\left(2^2\cdot a+2\cdot 3+3\right)+3=2^3\cdot a+3\left(2^2+1\right)$$

$$a_n=2^{n-1}\cdot a+3\left(2^{n-2}+2^{n-1}+\dots+1\right)=2^{n-1}\cdot a+3\left(2^{n-1}-1\right)=(a+3)\cdot 2^{n-1}-3$$

Нужно найти целые a и n, при которых $a_n=637$:

$$(a+3)\cdot 2^{n-1}-3=637\to(a+3)\cdot 2^{n-1}=640=5\cdot 2^7\to a+3=5\cdot 2^{8-n}$$

Число $a+3$ может быть целым для $n=1,2,\dots 8$, т.е. существует восемь таких значений $a=5\cdot 2^{8-n}-3$ для $n=1,2,\dots 8$.

Задача 2 Ответ: $y_{\max}=\dfrac{24}{25}=0,96$

Решение

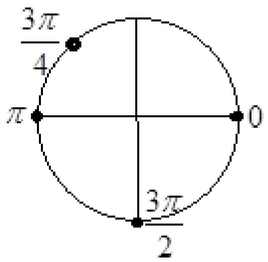
Преобразование:

$$-\sin x\cdot(1-\cos 2x)+\cos x\cdot\left(2-2\cos^2 x\right)-(1-\cos 2x)=0$$

$$-\sin x\cdot(1-\cos 2x)+\cos x\cdot(1-\cos 2x)-(1-\cos 2x)=0\to(1-\cos 2x)(\cos x-\sin x-1)=0$$

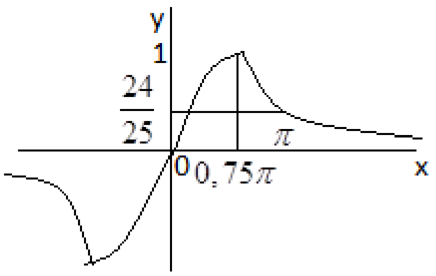
Множество решений:

$$\left[\begin{array}{c}\cos 2x=1\\ \cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{c}x=\pi k\\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right.\to\left[\begin{array}{l}x=\pi k\\ x=2\pi m\quad ,n,m,k\in Z\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\end{array}\right.$$



Наибольшее значение функции

$$y=24\pi x/(9\pi^2+16x^2)\to y'=24\pi\cdot\frac{9\pi^2-16x^2}{(9\pi^2+16x^2)^2}=0\to x_{\max}=\frac{3\pi}{4},y_{\max}=1,x_{\min}=-\frac{3\pi}{4},y_{\min}=-1$$



Ближайшими к $x_{\max}=\dfrac{3\pi}{4}$ решениями уравнения являются $x=0$ и $x=\pi$, причем на них достигается наибольшее значение функции $y(x)$, $y(0)=0,\ y(\pi)=\dfrac{24}{25}$

Задача 3 Ответ: 5625, 2025

Решение

Заметим, что число a с разложением на простые делители вида $a=p_1^{s_1}\cdot p_2^{s_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{s_k}$ имеет $(s_1+1)(s_2+1)\cdot\ldots\cdot(s_k+1)$ различных делителей. Если a делится на 225, то $a=3^{s_1}\cdot 5^{s_2}\cdot b$, причем $s_1\geq 2$ и $s_2\geq 2$. Если $b>1$, то оно имеет по крайней мере один простой делитель p: $p\neq 3,\ p\neq 5$. Тогда общее число различных делителей числа a не меньше

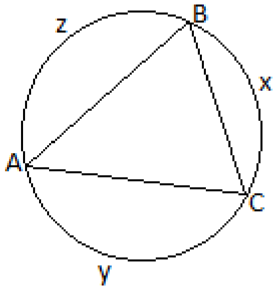
$(s_1+1)(s_2+1)\cdot 2 \geq 3\cdot 3\cdot 2 = 18 > 15$, что противоречит условию. Отсюда следует, что $b=1$ и общее число делителей числа a равно $(s_1+1)(s_2+1)=15$. Последнее возможно в двух случаях:

1. $s_1=2,\ s_2=4 \to a_1=3^2\cdot 5^4=5625$ 2. $s_1=4,\ s_2=2 \to a_2=3^4\cdot 5^2=2025$

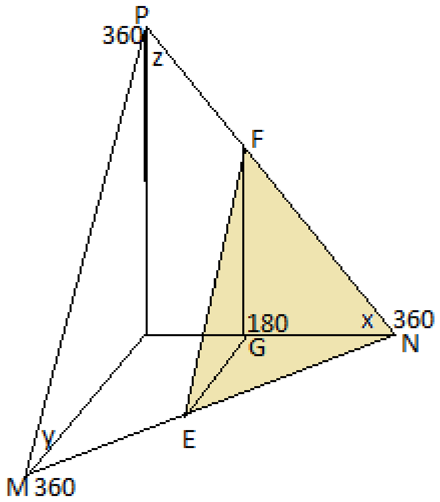
Задача 4 Ответ: $P(A)=\dfrac{3}{4}$

Решение

Обозначения: $x, y, z -$ величины (в градусах) дуг окружности, на которые опираются углы при вершинах A, B, C треугольника.

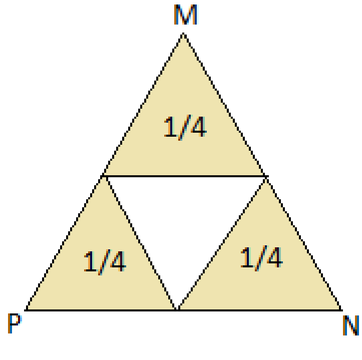


По условию $x+y+z=360,\ x>0,\ y>0,\ z>0$. Множество допустимых троек являются координатами точек треугольника MNP в пространстве:



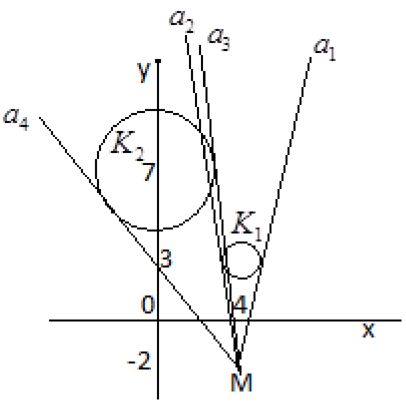
Если треугольник тупоугольный, например $x>180$, то допустимые точки с координатами $(x;y;z)$ принадлежат треугольнику EFN, площадь которого равна $\dfrac{1}{4}S_{NMP}$. Аналогично, для допустимых точек при $y>180$ и $z>180$. Поскольку вероятность события пропорциональна площади соответствующей ему области в треугольнике MNP, имеем $P(A/x>180)=\dfrac{S_{EFN}}{S_{MNP}}=\dfrac{1}{4}$.

Ту же вероятность имеют события $P(A/y>180)=\dfrac{1}{4}$, $P(A/z>180)=\dfrac{1}{4}$. В итоге $P(A)=\dfrac{3}{4}$.



Задача 5 Ответ: $a \in \left(\dfrac{-36-6\sqrt{22}}{7}; -2\sqrt{6} \right)$

Решение



Обозначения:

$K_1 -$ окружность с уравнением $(x-4)^2+(y-3)^2-1=0$; $M(4;-2)-$ точка, через которую проходят прямые $ax-y-4a-2=0$ при любых a; $a_1, a_2 -$ значения параметра a, соответствующие касательным к окружности K_1, проведенным из точки M; $a_3, a_4 -$ значения параметра a, соответствующие касательным к окружности K_2, проведенным из точки M;

Вычисление a_1, a_2:

$$\begin{cases} (x-4)^2+(y-3)^2-1=0 \\ ax-y-4a-2=0 \to y-3=a(x-4)-5 \end{cases} \to (x-4)^2+\left(a(x-4)-5\right)^2-1=0 \to$$

$$\to \left(1+a^2\right)(x-4)^2-10a(x-4)+24=0$$

Условие касания $D/4=0 \to 25a^2-24(1+a^2)=0 \to \mathrm{a}^2=24 \to a_1=2\sqrt{6}, a_2=-2\sqrt{6}$

Вычисление a_3, a_4:

$$\begin{cases} x^2+(y-7)^2-9=0 \\ ax-y-4a-2=0 \to y-7=a(x-4)-9 \end{cases} \to x^2+\left(a(x-4)-9\right)^2-9=0 \to x^2+(ax-(4a+9))^2-9=0$$

Усло-

$$\to \left(1+a^2\right)x^2-2a(4a+9)x+(4a+9)^2-9=0$$

$$D/4=0 \to a^2(4a+9)^2-(1+a^2)((4a+9)^2-9)=0 \to -(4a+9)^2+9(1+a^2)=0 \to$$

вие касания

$$\to 7a^2+72a+72=0 \to a_3=\frac{-36-6\sqrt{22}}{7},\ a_4=\frac{-36+6\sqrt{22}}{7}$$

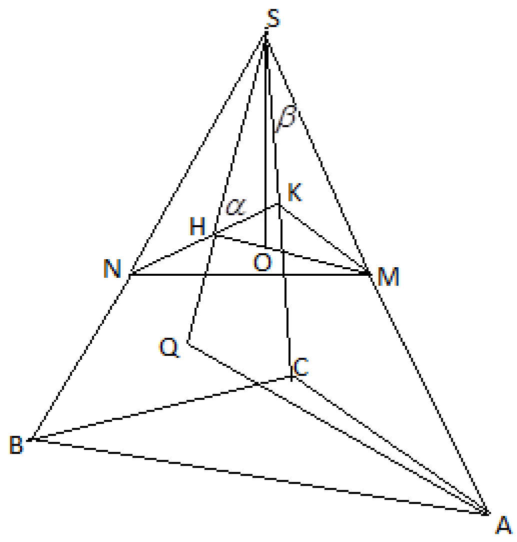
Заметим, что $a_3<a_2$ и для всех $a \in \left(a_3; a_2\right)$ прямая $ax-y-4a-2=0$ пересекает окружности K_1 и K_2, а система имеет четыре решения.

Задача 6 Ответ: $V_{SABC}=\dfrac{p\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\alpha}{\left(1+3\cos^2\alpha\right)^{3/2}}=\dfrac{p\sqrt{3}tg\alpha}{\left(tg^2\alpha+4\right)^{3/2}}$. В варианте 1 $\alpha=45^0, p=5\sqrt{15}, V=3$

Плоскость P пересекает боковые ребра SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках M, N, K соответственно и образует угол α с боковой гранью SBC. Найти объем пирамиды $SABC$, если произведение ее ребер $SA \cdot SB \cdot SC = p$, а пирамида $SMNK$ правильная.

Ответ: $V_{SABC}=\dfrac{p\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\alpha}{\left(1+3\cos^2\alpha\right)^{3/2}}=\dfrac{p\sqrt{3}tg\alpha}{\left(tg^2\alpha+4\right)^{3/2}}$

Решение.



Обозначения: $H-$середина NK; $\mathrm{R}MHS=\alpha-$заданный угол; $\mathrm{R}MSK=\beta-$угол при вершине правильной пирамиды; $\mathrm{R}MSH=\gamma-$ угол наклона ребра AS к плоскости боковой грани SBC;

$a-$сторона правильного треугольника MNK; $l-$боковое ребро правильной пирамиды $SMNK$

В этих обозначениях $V_{SABC}=\dfrac{1}{6}SA\cdot SB\cdot SC\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\dfrac{p}{6}\sin\beta\cdot\sin\gamma$.

Выразим $\sin\beta,\ \sin\gamma$ через тригонометрические функции угла α.

Из $\mathrm{V}SNK$ $a=2l\sin\beta/2$. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды и площадь ее основания связаны соотношением:

$$S_{бок}\cdot\cos\alpha=S_{осн}\to\frac{3}{2}l^2\sin\beta=\frac{\sqrt{3}a^2}{4\cos\alpha}\to\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2}{4\sin^2\beta/2}\sin\beta\cos\alpha=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\to tg\beta/2=\sqrt{3}\cos\alpha$$

Тогда $\sin\beta=\dfrac{2tg\beta/2}{1+tg^2\beta/2}=\dfrac{2\sqrt{3}\cos\alpha}{1+3\cos^2\alpha}$.

Из $\mathrm{V}SHM$ по теореме синусов $\sin\gamma=\dfrac{\sqrt{3}\cdot a\cdot\sin\alpha}{2l}$.

Из $\mathrm{V}SOM$ $l^2=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}tg\alpha\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{a^2}{12}\left(tg^2\alpha+4\right)\to l=\dfrac{a\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2\sqrt{3}\cos\alpha}$.

Тогда $\sin\gamma=\dfrac{3\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}$. Объединяя формулы, получим объем $V_{SABC}=\dfrac{p\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\alpha}{\left(1+3\cos^2\alpha\right)^{3/2}}=\dfrac{p\sqrt{3}tg\alpha}{\left(tg^2\alpha+4\right)^{3/2}}$

Вариант 2

Задача 1 Ответ: $a=4379$

Задача 2 Ответ: $y_{\min}=\dfrac{1}{17}$

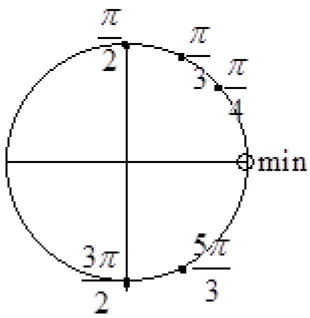
Решение

Преобразование:

$$\cos x\left[\sin x+(1+2\sqrt{2})\cos x-2\sin x\cos x-(\sqrt{2}+2\cos^2 x)\right]=0\to$$

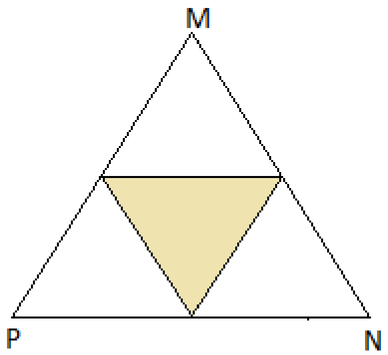
$$\cos x\left[\sin x(1-2\cos x)+\cos x(1-2\cos x)-\sqrt{2}(1-2\cos x)\right]=0\to$$

$$\cos x\cdot(1-2\cos x)\cdot(\sin x+\cos x-\sqrt{2})=0$$



Задача 3 Ответ: 5103

Задача 4 Ответ: $P(A)=\frac{1}{4}$



Задача 5 Ответ: $a=\frac{6\sqrt{2}-4}{7}$, $a=\frac{8-\sqrt{19}}{15}$

Задача 6 $V_{SABC}=\frac{p\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\alpha}{\left(1+3\cos^2\alpha\right)^{3/2}}=\frac{p\sqrt{3}tg\alpha}{\left(tg^2\alpha+4\right)^{3/2}}$. В варианте 2 $\alpha=60^0$, $p=14\sqrt{7}, V=6$

Вариант 3

Задача 1 Ответ: $a=8014$

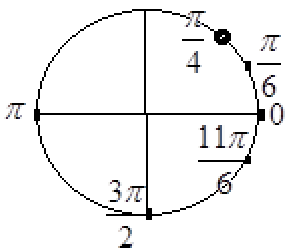
Задача 2 Ответ: $y_{\max}=\frac{3}{26}$

Решение

Преобразование:

$$\sin x\left[\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}\cos x-2\cos x+\sqrt{3}-2\sin x\cos x+2\cos^2 x\right]=0\to$$

$$\sin x\left[\sqrt{3}(\sin x-\cos x+1)-2\cos x(1+\sin x-\cos x)\right]=\sin x\cdot(\sin x-\cos x+1)\cdot\left(\sqrt{3}-2\cos x\right)=0$$

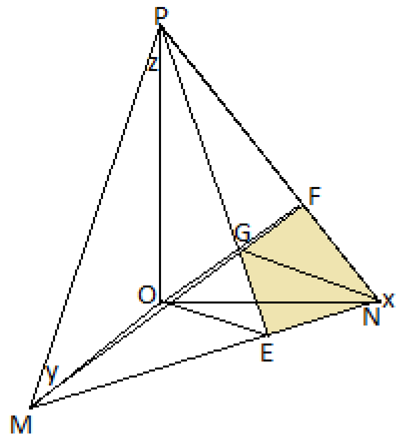


Задача 3 Ответ: 576

Задача 4 Ответ: $P(A)=\frac{1}{2}$

Решение

Пусть, например $x > 2y, x > 2z$. На рис изображена область в треугольнике MNP соответствующая этим неравенствам.

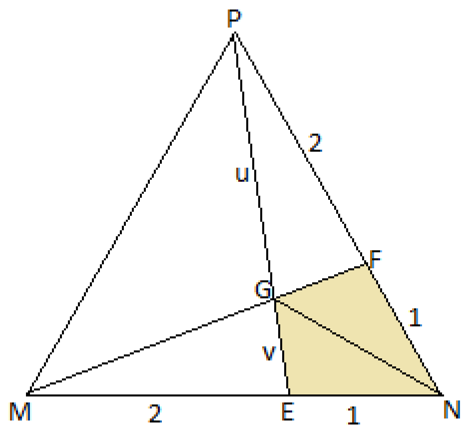


$OE -$ прямая на плоскости xoy с уравнением $x = 2y$; $NE : NM = 1:3$

$OF -$ прямая на плоскости xoz с уравнением $x = 2z$; $NF : NP = 1:3$

Прямые MF и PE на плоскости треугольника MNP пересекаются в точке G. Допустимые тройки

$$(x;y;z) \leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=360 \\ x>2y \\ x>2z, x>0, y>0, z>0 \end{cases}$$ являются координатами точек четырехугольника $NEGF$.

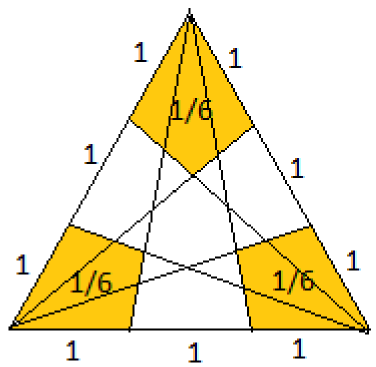


Точка G делит отрезок PE в отношении $PG : GE = u : v$ и по теореме Менелая (треугольник NPE и секущая FM)

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{2}{3} = 1 \rightarrow u = 3v$$

Площадь треугольника NGE равна $S_{NGE} = \frac{1}{4} S_{NEP} = \frac{1}{12} S_{NMP} \rightarrow S_{NEGF} = \frac{1}{6} S_{MNP} \rightarrow P(A / x > 2y, x > 2z) = \frac{1}{6}$.

Аналогично, $P(A / y > 2x, y > 2z) = P(A / z > 2x, z > 2y) = \frac{1}{6}$. Тогда $P(A) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.



Задача 5 Ответ: $a \in \left(-\infty; \frac{4 - 3\sqrt{14}}{4} \right) \cup \left(\frac{5}{12}; \frac{4 + 3\sqrt{14}}{4} \right)$

Задача 6. $V_{SABC} = \dfrac{p\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\alpha}{\left(1+3\cos^2\alpha\right)^{3/2}} = \dfrac{p\sqrt{3}tg\alpha}{\left(tg^2\alpha+4\right)^{3/2}}$. В варианте 3. $\alpha = 30^0$, $p = 13\sqrt{39}, V = 9$

Вариант 4

Задача 1 Ответ: $a = 4465$

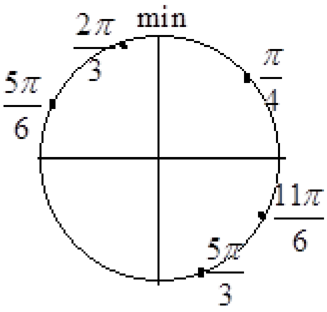
Задача 2 Ответ: $y_{\min} = \dfrac{19}{37}$

Решение

Преобразование:

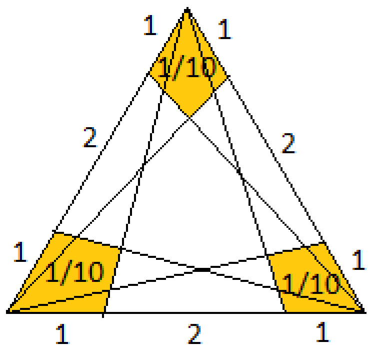
$$\sqrt{3}\left(\sin x + \cos x - \sqrt{2}\right) + 2\sin 2x\left(\sin x + \cos x - \sqrt{2}\right) = 0 \to$$

$$\left(\sin x + \cos x - \sqrt{2}\right)\left(2\sin 2x + \sqrt{3}\right) = 0$$



Задача 3 Ответ: 295245

Задача 4 Ответ: $P(A) = \dfrac{3}{10}$



Задача 5 Ответ: $a = -\dfrac{4}{3}$, $a = \dfrac{5+2\sqrt{22}}{21}$

Задача 6. $V_{SABC} = \dfrac{p\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\alpha}{\left(1+3\cos^2\alpha\right)^{3/2}} = \dfrac{p\sqrt{3}tg\alpha}{\left(tg^2\alpha+4\right)^{3/2}}$. В варианте 4 $\alpha = arctg\sqrt{5}$, $p = 27\sqrt{15}, V = 15$