Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
математика, 7 класс
2017-2018 учебный год

1. Половина пути от дома до школы проходит по равнине, остальная часть – по холмам. Петя вышел из дома в 8 час, а вернулся из школы в 15 час, при этом он 6 часов находился в школе и сразу после уроков отправился домой. Скорость его движения на спусках – 6км/час, на подъемах – 3км/час, на ровных участках – 4км/час. Найти длину пути от дома до школы.

2. Дробь $\frac{p}{q}$ с натуральными p, q такова, что возрастание числителя на 1, а знаменателя – на 5 делает ее большей. Найти такую дробь, если $p+q<8$.

3. Пятизначное четное число a, являющееся квадратом целого числа, делится на 21. Найти минимальное a, удовлетворяющее этим условиям.

4. Целой частью числа x, обозначение $[x]$, называют наибольшее целое число, не превосходящее x. Число $\{x\}=x-[x]$ называют дробной частью числа x. Найти x, для которого $2x+[x]=4$.

5. Граница квадрата со стороной 9, вырезанного из белого картона, окрашена в красный цвет. Необходимо разрезать квадрат на 6 равных по площади частей, границы которых содержат отрезки, окрашенные в красный цвет, с одинаковой общей длиной.

Решения

Вариант 1

Задача 1

Ответ: 2 км.

Решение

$S-$ длина пути, S_1- длина пути по спускам, S_2- длина пути на подъемах, $S/2=S_1+S_2$

$t=15-8-6=1-$ время в пути туда и обратно. Тогда

$$1=\frac{S_1}{6}+\frac{S_2}{3}+\frac{S}{2\cdot4}+\frac{S_1}{3}+\frac{S_2}{6}+\frac{S}{2\cdot4}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)(S_1+S_2)+\frac{S}{4}=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)\frac{S}{2}+\frac{S}{4}=\frac{S}{2}\to S=2$$

Задача 2 Ответ: $\frac{1}{6}$

Решение.

По условию $\frac{p}{q}<\frac{p+1}{q+5}\to q>5p$. С учетом натуральности p и q, условия $p+q<8$ имеем

$6p<p+q<8\to p=1\to q=6$

Задача 3 Ответ: $a_{\min}=15876$

Решение

Среди делителей четного числа, делящегося на 21 и являющегося квадратом целого числа, имеются $7^2,3^2,2^2$, т.е.

$a=7^2\cdot3^2\cdot4\cdot k^2$. С учетом пяти значности справедливо неравенство:

$10000\le7^2\cdot3^2\cdot4\cdot k^2\le99998\to6\le k^2\le57\to k_{\min}^2=9\to a_{\min}=7^2\cdot3^2\cdot4\cdot9=15876$

Задача 4 Ответ: $x=\frac{3}{2}$

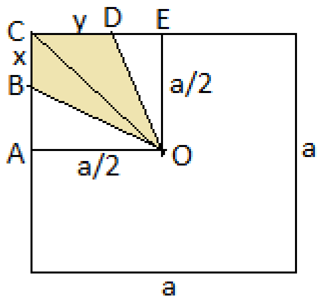
Решение

$$x=\frac{4-[x]}{2}\to\{x\}=x-[x]=\frac{4-[x]}{2}-[x]=\frac{4-3[x]}{2}$$

Поскольку $0\le\{x\}<1\to0\le\frac{4-3[x]}{2}<1\to\frac{2}{3}<[x]\le\frac{4}{3}$ и число $[x]-$ целое, то единственное допустимое значение $[x]=1$. Тогда $x=\frac{3}{2}$

Задача 5

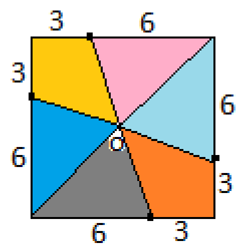
Решение



O – центр квадрата, многоугольник $OBCD$ – один из шести искомых кусков, $BC=x,\ CD=y$, $a=9$.

$S_{OBCD}=\frac{a^2}{6}=\frac{a}{4}\cdot(x+y)\to x+y=\frac{2a}{3}=6$ – длина красной части границы многоугольника.

Способ разрезания (один из …)



Вариант 2

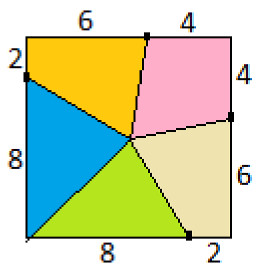
Задача 1 Ответ: 3 км.

Задача 2 Ответ: $\frac{1}{4}$

Задача 3 Ответ: $a_{\max} = 5625$

Задача 4 Ответ: $x = \frac{5}{2}$

Задача 5 Ответ:



Вариант 3

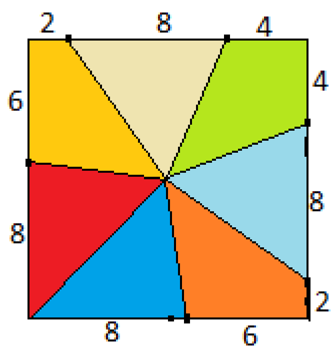
Задача 1 Ответ: 1,5 км.

Задача 2 Ответ: $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

Задача 3 Ответ: $a_{\min} = 327184$

Задача 4 Ответ: $x = -\frac{7}{2}$

Задача 5 Ответ:



Вариант 4

Задача 1 Ответ: 1,4 км.

Задача 2 Ответ: $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$

Задача 3 Ответ: $a_{\max} = 74529$

Задача 4 Ответ: $x = -\frac{3}{2}$

Задача 5 Ответ: