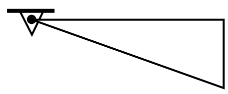
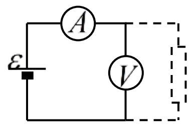
Решения
Заключительный тур олимпиады Росатом,
физика, 11 класс, комплект 1
2017-2018 учебный год

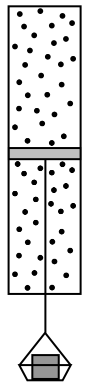


1. Вырезанный из листа фанеры плоский прямоугольный треугольник, длины катетов которого относятся друг другу, как 1:2 подвешен шарнирно за вершину меньшего острого угла к горизонтальному потолку. Треугольник удерживают так, что его длинный катет горизонтален (см. рисунок). Какую минимальную силу нужно приложить к треугольнику для этого. Масса треугольника - m .

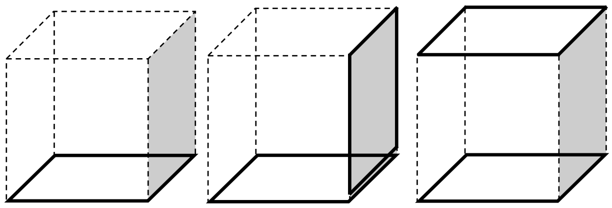


2. К батарее с ЭДС ε и неизвестным внутренним сопротивлением подключены последовательно амперметр и вольтметр с некоторыми неизвестными внутренними сопротивлениями. Если параллельно вольтметру включить некоторое сопротивление, то показания амперметра увеличатся в 2 раза, вольтметра в 2 раза уменьшатся. Найти показания вольтметра до включения в цепь сопротивления.

3. Тело начинает движение из состояния покоя с ускорением a_0 и далее движется прямолинейно. Из-за действия силы сопротивления воздуха ускорение тела падает с увеличением его скорости v по закону $a = a_0 v_0 / (v + v_0)$, где v_0 - известная постоянная. Через какое время скорость тела достигнет значения $2v_0$?



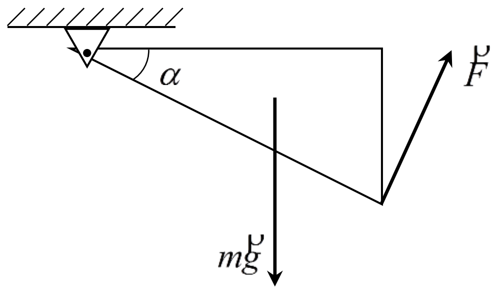
4. В вертикальном цилиндрическом сосуде площадью сечения S и длиной h находится очень легкий подвижный поршень, к которому с помощью длинного стержня прикреплена легкая чашка. В отсеках, на которые поршень делит сосуд, находится по одному молю идеального одноатомного газа под давлением p_0, а поршень в равновесии делит сосуд на равные части. На чашку кладут тело массой m и поршень после нескольких колебаний приходит в новое положение равновесия. Найти смещение поршня относительно первоначального положения. Сосуд теплоизолирован, поршень хорошо проводит тепло, теплоемкостью поршня и сосуда пренебречь. Каким будет смещение поршня при $m \to \infty$ и почему?



5. Индуктивность замкнутого квадратного витка, сделанного из тонкой проволоки, равна L (левый рисунок). Если рядом с этим витком перпендикулярно его плоскости и без электрического контакта с ним расположить точно такой же по размеру, но сверхпроводящий виток (так, что они образуют соседние грани куба), то индуктивность первого витка станет равна L_1 (средний рисунок). Какой будет индуктивность витка, если сверхпроводящий виток расположить параллельно его плоскости так, что они образуют с первым противоположные грани куба?

Решения

1. Чтобы треугольник был в равновесии момент искомой силы $\vec{F}$ относительно шарнира должен быть равен по величине моменту силы тяжести. Поэтому сила F будет минимальна, если будет максимальным ее плечо относительно шарнира. Следовательно, внешнюю силу нужно приложить к точке треугольника, максимально удаленной от шарнира, и направить перпендикулярно отрезку, соединяющему эту точку с шарниром. То есть внешняя сила $\vec{F}$ должна быть приложена к вершине угла $\pi/2-\alpha$ и направлена перпендикулярно гипотенузе (см. рисунок).



Для того чтобы найти силу F воспользуемся условием вторым равновесия. Причем моменты сил будем вычислять относительно шарнира – это позволит сделать момент неизвестной силы реакции шарнира равным нулю.

Пусть длина меньшего катета треугольника равна a. Тогда длина большего катета - $2a$, а дина гипотенузы - $\sqrt{5}a$. Поэтому момент силы $\vec{F}$ относительно шарнира равен $M_F=\sqrt{5}Fa$. Найдем момент силы тяжести. Центр тяжести плоского треугольника находится в точке пересечения его медиан. А поскольку точка пересечения медиан делит каждую медиану на части, относящиеся друг к другу, как 2:1, то плечо силы тяжести относительно шарнира равно двум третьим частям его горизонтального катета. Поэтому $M_{mg}=(2/3)mg2a=(4/3)mga$. Следовательно, условие моментов для треугольника дает

$$\sqrt{5}Fa=\frac{4}{3}mga\,.$$

Отсюда находим

$$F=\frac{4}{3\sqrt{5}}mg\,.$$

2. По закону Ома для замкнутой цепи имеем (в случае цепи без дополнительного сопротивления) находим ток в цепи (который равен току через амперметр)

$$I=\frac{\varepsilon}{r+r_A+r_V}$$

где r - внутреннее сопротивление источника, r_A - сопротивление амперметра, r_V - сопротивление вольтметра. Отсюда находим напряжение на вольтметре

$$U_V=Ir_V=\frac{\varepsilon r_V}{r+r_A+r_V}=\varepsilon-I\left(r+r_A\right) \qquad (*)$$

Аналогично находим, что когда параллельно вольтметру подключают сопротивление R, напряжение на вольтметре будет равно

$$U_V'=\varepsilon-I'\left(r+r_A\right)$$

Но по условию показания амперметра увеличиваются вдвое ($I'=2I$), а вольтметра вдвое уменьшаются ($U_V'=U_V/2$). Отсюда

$$\frac{U_V}{2}=\varepsilon-2I\left(r+r_A\right) \qquad (**)$$

Выражая теперь величину $I\left(r+r_A\right)$ из формулы (*) и подставляя ее в формулу (**), получим

$$\frac{U_V}{2}=\varepsilon-2\left(\varepsilon-U_V\right)$$

Или

$$U_V=\frac{2}{3}\varepsilon$$

3. Поскольку при прямолинейном движении мгновенное ускорение тела определяется как

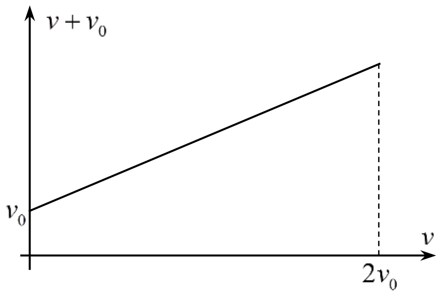
$$a=\frac{v_к-v_н}{\Delta t}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

где $v_к$ и $v_н$ скорость тела в начале и в конце малого интервала времени Δt, то изменение скорости тела за малый интервал времени Δt равно $\Delta v = a\Delta t$. Если просуммировать изменения скорости тела за все малые интервалы времени, но которые можно разбить полное время движения, получится полное изменение скорости, которая из-за равенства нулю начальной скорости равна конечной скорости тела

$$\sum_n \frac{\Delta v_n}{a_n} = \sum_n \Delta t_n$$

где a_n - ускорение тела внутри малого интервала времени Δt_n. Подставляя в эту формулу зависимость ускорения от скорости, найдем

$$\frac{1}{a_0 v_0} \sum_n \Delta v_n \left(v_n + v_0 \right) = \sum_n \Delta t_n$$



где v_n - значение внутри n-ого интервала времени Δt_n. Сумма в правой части дает значение времени τ в тот момент, когда скорость станет равна $2v_0$. Сумма в левой части имеет графический образ как площадь под графиком зависимости $f(v) = v + v_0$ (ср. с вычислением работы переменной силы). Вычисляя эту площадь (см. рисунок), получим

$$\tau = \frac{4v_0}{a_0}$$

4. Поскольку поршень хорошо проводит тепло, можно считать, что температура газа в отсеках одинакова. После того как на чашку положили тело, и тело вместе с поршнем опустилось вниз, потенциальная энергия тела перешла во внутреннюю энергию газа. Поэтому, если поршень опустился на величину Δx вниз, закон сохранения энергии дает

$$mg\Delta x = \frac{3}{2} p_в S \left(l + \Delta x \right) + \frac{3}{2} p_н S \left(l - \Delta x \right) - \frac{3}{2} 2 p_0 S l \qquad (*)$$

где $2l$ - длина сосуда, $p_н$ и $p_в$ - давления газа в верхней и нижней частях сосуда. С другой стороны, из условия равновесия поршня имеем

$$mg = \left(p_н - p_в \right) S \qquad (**)$$

Кроме того, внутренние энергии газа над и под поршнем равны. Поэтому

$$p_в \left(l + \Delta x \right) = p_н \left(l - \Delta x \right) \qquad (***)$$

Исключая из системы уравнений (*)-(***) давления газа, получим уравнение относительно Δx

$$5mg\Delta x^2 + 6 p_0 S l \Delta x - 3mgl^2 = 0$$

Отсюда находим

$$\Delta x = \left(\frac{\sqrt{9 p_0^2 S^2 + 15 m^2 g^2} - 3 p_0 S}{5mg} \right) l$$

При $m \to \infty$ поршень не ляжет на дно сосуда, даже несмотря на бесконечную силу тяжести. Это связано с тем, что при большой массе груза даже небольшое его смещение приводит к высвобождению большой потенциальной энергии и, соответственному сильному нагреванию газа в сосуде, возрастанию его давления и увеличению разности давлений между нижним и верхним газами. Пренебрегая в случае большой массы величиной $p_0 S$ по сравнению с mg, получим

$$\Delta x = \sqrt{\frac{3}{5}} l$$

5. Пропустим через первый виток ток I. Тогда поток магнитного поля через него будет равен

$$\Phi = LI \qquad (1)$$

где I - индуктивность первого витка. Поскольку магнитных зарядов не существует, суммарный поток через любую замкнутую поверхность, в состав которой входит наш виток (и в частности, через куб, для которого рассматриваемый виток является одной гранью) будет равен нулю. Поэтому

$$\Phi = 4\Phi_{12} + \Phi_{16} \qquad (2)$$

где Φ_{12} - поток магнитного поля через соседнюю грань куба, Φ_{16} - поток магнитного плоя через противоположную грань. Поскольку магнитный поток через сверхпроводящий виток должен быть равен нулю, то при поднесении его к рассматриваемому витку в нем индуцируется ток I_1, создающий точно такой же (но противоположный) поток через самого себя. Ток I_1 создает магнитный поток через основной виток, который во столько же раз меньше потока Φ, во сколько раз ток I_1 мегьше тока I. Поэтому поток магнитного поля через основной виток при поднесении к нему сверхпроводящего витка будет равен

$$\Phi - \frac{I_1}{I}\Phi_{12} = \Phi - \frac{\Phi_{12}^2}{\Phi} = \Phi\left(1 - \frac{\Phi_{12}^2}{\Phi^2}\right) \tag{3}$$

С другой стороны, этот поток по определению равен $L_1 I$. Отсюда получаем

$$\frac{\Phi_{12}}{\Phi} = \sqrt{1 - \frac{L_1}{L}} \tag{4}$$

В результате из формулы (2) находим

$$\Phi_{16} = \Phi\left(1 - 4\sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}\right) \tag{5}$$

Если теперь мы уберем боковой виток и разместим сверхпроводящий виток на противоположной грани куба, то в нем возникнет такой ток I_2, который, с одной стороны, будет компенсировать магнитный поток Φ_{16} основного тока через самого себя, а с другой создаст поток через основной виток, во столько же раз меньший потока Φ_{16} во сколько ток I_2 меньше тока I. Поэтому поток магнитного поля через основной виток в этом случае равен

$$\Phi_2 = \Phi - \frac{I_2}{I}\Phi_{16} = \Phi - \frac{\Phi_{16}^2}{\Phi} = \Phi\left(1 - \frac{\Phi_{16}^2}{\Phi^2}\right) \tag{6}$$

Но этот поток по определению равен $L_2 I$, где L_2 - индуктивность основного витка в присутствии сверхпроводящего витка на противоположной грани. Поэтому из предыдущей формулы получаем

$$L_2 = L\left(1 - \left(1 - 4\sqrt{1 - \frac{L_1}{L}}\right)^2\right) = 0,96 \text{ мГн}$$